GÉOMÉTRICA
Calcul Géométrique

Proposition de projet commun INRIA, ENS, I3S

28 janvier 2002

1 L'équipe

Chercheurs permanents

Pierre Alliez	[CR]
Jean-Daniel Boissonnat	[DR] (Responsable scientifique)
Frédéric Cazals	[CR]
Raphaëlle Chaine	[MC UNSA]
Olivier Devillers	[DR] (Responsable permanent)
Michel Pocchiola	[MC ENS] (Responsable permanent antenne ENS)
Monique Teillaud	[CR] (à temps partiel dans le projet)
Mariette Yvinec	[CR]

Doctorants

Dominique Amar	[doctorant, en collaboration avec GALAAD]
David Cohen Steiner	[doctorant, détaché du corps des Télécoms]
Éric Colin de Verdière	[doctorant, ENS]
Julia Flötotto	[doctorante, allocataire MENRT]
Philippe Guigue	[doctorant, allocataire MENRT]

Collaborateurs extérieurs :

Dominique Attali	[Chargée de recherche CNRS, IMAG]
Jean-Marie Morvan	[Professeur à l'Université Claude Bernard en délégation]
Gert Vegter	[Professeur à l'Université de Groningen]

Assistante de projet

Agnès Clément-Bessière	[TR] (à temps partiel dans le projet)

2 Contexte et enjeux

2.1 La révolution des objets géométriques

Le calcul géométrique est resté longtemps limité à l'ingénierie, et principalement à la conception et la fabrication assistées par ordinateur. Les progrès technologiques récents bouleversent cette situation.

- Les nouveaux *systèmes de mesure*, scanners, télémètres, imageurs 3D, permettent de mesurer des formes tridimensionnelles très variées et complexes, anatomiques, géologiques ou architecturales par exemple.
- Les *performances graphiques* des ordinateurs progressent de manière spectaculaire aussi bien sur les PC, les consoles de jeux que les systèmes de réalité virtuelle haut de gamme.
- Le développement fulgurant des *réseaux et de l'Internet* permet l'échange d'objets géométriques complexes et de nouvelles activités dans le cadre du commerce électronique, du télétravail ou des jeux.
- De nouveaux *procédés de fabrication* d'objets tridimensionnels comme la stéréolithographie conduisent à de véritables imprimantes 3D.

Ces changements technologiques rendent possible ce qui ne l'avait jamais été auparavant : la création de modèles tridimensionnels facilement observables, transmissibles, reproductibles, modifiables. Ils apportent aux ingénieurs de nouveaux modes de conception et fabrication comme les maquettes numériques, le prototypage rapide, l'ingénierie inverse. Ils ouvrent aussi de nouveaux champs d'application au calcul géométrique comme la modélisation géométrique d'objets non manufacturés, la simulation et la planification d'interventions chirurgicales, le *docking* et le repliement de molécules en biologie moléculaire.

Les objets géométriques tridimensionnels envahissent également notre vie quotidienne à travers les jeux vidéo et le multimédia. Leur arrivée sur les réseaux va avoir un impact sur le commerce électronique, sur l'éducation et la culture, via le télé-enseignement et les visites virtuelles, et sur le travail à distance : en médecine notamment, la réunion d'experts en réseaux disposant de moyens de visualisation 3D sera demain une réalité. Il s'agit d'une nouvelle révolution culturelle et économique dont l'importance peut être comparée à celle des images.

Le calcul géométrique se voit ainsi prendre une importance sans précédent en même temps qu'il doit faire face à des problèmes d'une complexité et d'une variété beaucoup plus grandes que par le passé. Les questions combinatoires et algorithmiques deviennent critiques et de nouveaux sujets apparaissent comme l'échantillonnage et l'approximation de formes complexes, leur codage, leur transmission.

2.2 La géométrie algorithmique

La géométrie algorithmique est devenue à la fin des années 70 une nouvelle branche de l'informatique qui traite les questions combinatoires en géométrie, conçoit des structures de données et des algorithmes géométriques, et en analyse la complexité. Cette discipline est rapidement devenue une des branches les plus actives de l'algorithmique avec des résultats remarquables comme les structures de recherche multidimensionnelles, la combinatoire des arrangements, la théorie des diagrammes de Voronoï, les problèmes d'optimisation en petites dimensions, ou les algorithmes randomisés. Pour en savoir plus, on pourra se reporter aux sites [15, 14] et aux livres consacrés à la géométrie algorithmique, e.g. [23, BY98].

Calcul géométrique. Les chercheurs en géométrie algorithmique se sont, au début, peu préoccupé de production et de distribution de codes géométriques de qualité. Les questions d'architecture logicielle, de stabilité numérique et de performances pratiques étaient largement ignorées. Seuls quelques codes épars de qualités très diverses existaient au début des années 90 et les solutions proposées par la communauté de géométrie algorithmique n'avaient que faiblement pénétré les domaines applicatifs et l'industrie [8]. Cette situation a changé récemment, notamment sous l'impulsion de l'école européenne de géométrie algorithmique mobilisée autour du projet CGAL. Celle-ci a profondément renouvelé le calcul géométrique, conduit aux principales avancées théoriques et pratiques, et développé une bibliothèque sans équivalent, capable de traiter des applications de tailles industrielles.

Approximation géométrique. La géométrie algorithmique a jusque là essentiellement considéré la géométrie linéaire et très peu les objets plus complexes comme les courbes et les surfaces. L'approche combinatoire et algorithmique de l'étude des formes, initiée par H. Poincaré[1], a pourtant pris une importance considérable avec l'arrivée de l'informatique. Pour des besoins très différents et avec des contraintes qui leur sont propres, l'analyse numérique, l'informatique graphique, la robotique triangulent leurs objets d'étude, espaces fonctionnels, mondes virtuels ou espaces de configuration. Inversement, la reconstruction de surfaces exige d'interpoler des formes à partir d'échantillons. Le passage effectif et à double sens du continu au discret est au cœur de la problématique des objets géométriques. C'est un sujet immense et largement inexploré qui soulève des questions de nature topologique, géométrique, combinatoire, algorithmique, et informatique [11].

2.3 De PRISME à GÉOMÉTRICA

Le projet PRISME a été créé en 1987. Sa problématique était alors centrée sur la robotique : théorie des mécanismes, planification de trajectoire et modélisation géométrique. Cette activité a progressivement disparu au sein de PRISME pour essaimer et se développer de façon indépendante chez ALEPH TECHNOLOGIES, et au sein des projets ICARE et SAGA, fondés par des anciens de PRISME, B. Faverjon, C. Samson et J-P. Merlet. PRISME a depuis lors centré ses activités autour des algorithmes géométriques en partenariat étroit avec les meilleures équipes européennes du domaine. Le lien avec la robotique n'est cependant pas perdu, notamment au travers de l'implication de PRISME dans CHIR.

L'objectif général des recherches de PRISME en géométrie algorithmique a été de développer une algorithmique rigoureuse et réaliste. Ceci a conduit à des paradigmes algorithmiques nouveaux en géométrie comme la randomisation (thèses de M. Teillaud et K. Dobrindt), le parallélisme à gros grain (thèse d'A. Fabri), les algorithmes adaptatifs (thèse de F. Nielsen), l'arithmétique exacte pour les prédicats (thèse de S. Pion). Les travaux sur la randomisation et le calcul exact en géométrie ont donné une visibilité indiscutable au projet PRISME.

1. Le fondateur de la topologie algébrique et l'inventeur des triangulations. On pourra consulter l'article *Topologie* de l'Encyclopédia Universalis ou le livre de M. Henle, *A Combinatorial Introduction to Topology.*

PRISME a été un des principaux initiateurs et concepteurs de CGAL. Les contributions principales portent sur l'architecture logicielle, le noyau de classes d'objets géométriques, les triangulations et les diagrammes de Voronoï. CGAL est à la fois le moteur de nouvelles recherches (par exemple sur la robustesse) et un instrument logiciel rendant possible de nouveaux développements et expérimentations.

PRISME est également bien connu pour ses applications des techniques de la géométrie algorithmique, notamment à la planification de trajectoires de robots (thèses de F. Avnaim, X-N. Bui, S. Lazard), l'aménagement spatial (thèse de E. de Lange), la modélisation moléculaire (thèse de J. Duquesne), le maillage de surfaces (thèses de P. Desnoguès, S. Balaven), la reconstruction de formes (thèses de B. Geiger, S. Nullans, F. Da) et, plus récemment, la compression (thèse de P. M. Gandoin). La reconstruction de surfaces tridimensionnelles a en particulier conduit à des succès industriels majeurs avec Siemens et Dassault-Systèmes.

Depuis sa création, PRISME a beaucoup évolué et l'acronyme n'a plus beaucoup de sens. La fin de la période de développement initial de CGAL, l'ouverture à l'algorithmique des objets courbes, annoncée au séminaire d'évaluation de 1997 et concrétisée par le lancement du projet IST ECG dont l'INRIA est le coordinateur, et le souhait de formaliser un rapprochement avec l'équipe Géométrie et Algorithmes de l'Ecole Normale Supérieure, conduisent à proposer la création de GÉOMÉTRICA.

3 Axes de recherche

GÉOMÉTRICA a pour ambition de développer un cadre théorique et expérimental pour une géométrie algorithmique effective. Les préoccupations centrales concernent

- la complexité et le passage à l'échelle des méthodes,
- la fiabilité et la robustesse des algorithmes,
- le passage continu-discret et la qualité des approximations.

Le programme de recherche s'articule autour de quatre axes qui sont détaillés dans la suite :

- structures de données et algorithmes géométriques,
- calcul géométrique,
- approximation géométrique,
- codage et transmission de données géométriques.

Les deux premiers axes prolongent des activités traditionnelles du projet PRISME. Les deux autres axes sont plus nouveaux.

3.1 Structures de données et algorithmes géométriques

Triangulations. Les triangulations ou décompositions simpliciales sont des structures fondamentales. Elles sont à la base du calcul par éléments finis. Elles interviennent de façon essentielle en modélisation géométrique et en visualisation. Elles sont aussi utilisées comme structures de données pour résoudre les problèmes de localisation ou de recherche de voisins qu'on rencontre notamment en robotique, en recherche opérationnelle ou dans les systèmes d'information géographique.

La communauté de géométrie algorithmique a beaucoup étudié les triangulations et tout particulièrement la triangulation de Delaunay et son dual le diagramme de Voronoï [3, 19]. La combinatoire et l'algorithmique des triangulations planes est maintenant relativement bien maîtrisée. Il en va tout autrement en dimensions supérieures. Dès la dimension 3, des questions restent ouvertes.

Une première question concerne la *combinatoire* des triangulations et, en particulier, de la triangulation de Delaunay. Il est bien connu que la triangulation de Delaunay en dimension 3 peut être quadratique mais sa complexité est meilleure dans beaucoup de situations pratiques. Le cas où les sommets sont distribués de manière "uniforme" sur une surface est important en modélisation géométrique et intervient dans la plupart des algorithmes de maillage et de reconstruction de surface (voir le paragraphe 3.3). Nous avons obtenu très récemment une borne linéaire dans le cas de surfaces polyédriques et des conditions d'échantillonnage faibles [AB]. Nous comptons étendre ce résultat et notamment aborder le cas des surfaces lisses qui est plus délicat et pour lequel J.Erickson [16] a exhibé une borne inférieure en $\Omega(n^{1.5})$.

Un autre problème encore mal résolu malgré certaines avancées récentes [35, 29] est celui des *triangulations contraintes* en dimension 3. Une triangulation contrainte est une triangulation qui inclut un certain nombre de facettes prédéfinies. Par exemple, une triangulation modélisant un objet tridimensionnel devra contenir les facettes qui constituent la frontière de l'objet. En dimension 3, les problèmes de triangulations contraintes n'ont pas toujours de solution et décider si on peut trianguler un ensemble de contraintes donné est NP-complet. Pour assurer l'existence d'une triangulation contrainte, on s'autorise à ajouter aux sommets qui définissent les contraintes données un certain nombre (si possible minimal) de sommets additionnels appelés points de Steiner.

Une autre approche consiste à rendre les contraintes Delaunay conformes, c'est-à-dire à rajouter suffisamment de sommets de Steiner pour que toute facette et toute arête de contrainte soit incluse dans l'union des faces de la triangulation de Delaunay des sommets (voir [CCY01] pour un premier résultat).

Dans certaines applications, en particulier dans le domaine du calcul scientifique, l'utilisateur d'une triangulation souhaite non seulement respecter des contraintes mais aussi contrôler la forme et la taille des simplexes. Cette question est cruciale dans le contexte de la méthode des éléments finis puisqu'elle conditionne la convergence. Ici encore, le problème est de rajouter un nombre fini et le plus petit possible de points de Steiner (on parle de raffinement de maillage) pour garantir la qualité des simplexes. Le raffinement de maillage est l'objet de nombreux travaux [22, 3] et a été en particulier largement étudié par le projet GAMMA [22, 3]. Dans ce contexte, nous souhaitons approfondir l'approche proposée par Ruppert [33] et Chew [9] et récemment étendue par

Schewchuk [36].

$\boxed{\text{Programme à 4 ans}}$ J.-D. Boissonnat, O. Devillers, M. Yvinec

- Poursuivre l'étude combinatoire des triangulations de Delaunay 3D dans des cas pratiques intéressants, en particulier en rapport avec la reconstruction de surfaces et les maillages.
- Poursuivre l'étude des triangulations contraintes 3D.
- Développer des méthodes de raffinement de triangulations de Delaunay et de génération de maillages permettant de respecter des contraintes géométriques et des contraintes sur la forme et la taille des cellules imposées par les schémas numériques.

Algorithmique des objets courbes Deux voies complémentaires permettent d'aborder le traitement géométrique des objets courbes : le développement de méthodes d'approximation et le développement de méthodes algorithmiques dédiées au traitement des objets courbes. L'algorithmique des objets courbes est un domaine encore largement inexploré. Les membres du futur projet GÉOMÉTRICA ont acquis une certaine expérience de cette géométrie dans le cadre des diagrammes de Voronoï, des pseudo-triangulations et des graphes de visibilité.

L'algorithmique et la combinatoire des diagrammes de Voronoï sont maintenant bien connus lorsque les sites sont ponctuels et la distance euclidienne [2, 18]. Dès que les sites sont des objets non linéaires ou que l'on s'intéresse à des distances plus exotiques telles que les distances à poids additifs ou multiplicatifs, les bisecteurs qui délimitent les cellules du diagramme sont des objets courbes et peu de résultats existent.

Les triangulations ne sont pas toujours les décompositions de l'espace ambiant les mieux adaptées à un problème donné. Notre recherche sur le calcul des graphes de visibilité de collection d'objets convexes lisses a naturellement conduit à l'introduction d'un type de décomposition du plan associée à un nouveau type de région élémentaire : les *Pseudo-Triangulations* et les *Pseudo-Triangles* [PV96b, PV96a, AP01, Ang02]. Les liens existants entre les pseudo-triangulations et la théorie des matroides orientées de rang 3 [4, PV96c] ou encore avec la théorie de la rigidité [38] font des pseudo-triangulations un outil fondamental de la géométrie algorithmique 2D.

$\boxed{\text{Programme à 4 ans}}$ M. Pocchiola, M. Yvinec

- Développer l'algorithmique des diagrammes de Voronoï dans le cas de sites non ponctuels, nonlinéaires et/ou de normes différentes de la norme euclidienne.
- Poursuivre l'étude pratique et théorique des pseudo-triangulations 2D (énumération et calcul des pseudo-triangulations, représentation des arrangements de pseudo-droites).
- Adapter l'outil des pseudo-triangles et pseudo-triangulations au cas des objets lisses avec points d'inflexions.
- Généraliser les pseudo-triangulations en 3D.

Optimisation de performances. Un objectif central du projet GÉOMÉTRICA est de concevoir des algorithmes géométriques, de les implémenter et de les optimiser afin de produire du code effectif, c'est-à-dire efficace dans des conditions réelles d'utilisation.

Il y a quelques années, la communauté de géométrie algorithmique considérait un problème résolu lorsque l'on disposait d'un algorithme de complexité asymptotique optimale (par exemple $O(n \log n)$ pour la triangulation de Delaunay de points du plan). Nous cherchons maintenant à avoir une approche plus réaliste de l'analyse des performances des algorithmes et à prendre en compte la répartition des données, ou la taille des problèmes pratiques qui est parfois bien inférieure aux conditions théoriques de l'analyse asymptotique.

Cette recherche d'algorithmes effectifs a conduit à des avancées théoriques telles que l'utilisation de la randomisation [BDS$^+$92, Dev92] ou le développement de nouveaux types de structures de données [Dev98]. Même si ces nouvelles approches n'apportent pas toujours d'amélioration de la complexité théorique, elles ont conduit à des améliorations notables des performances, tant en ce qui concerne la rapidité du calcul que la capacité à traiter des gros volumes de données.

Il est également nécessaire de mener des études expérimentales approfondies pour comparer et optimiser les algorithmes dans différentes conditions d'utilisation. Par exemple, des stratégies de localisation dans une triangulation doivent être évaluées théoriquement, mais aussi expérimentalement pour aboutir à une bonne solution logicielle [DPT01].

Ce point de vue guidera l'ensemble de notre travail et l'optimisation des performances se retrouve dans la plupart de nos thèmes de recherche. En priorité, nous chercherons à obtenir des algorithmes de construction et de localisation pour les triangulations qui ne sont pas de Delaunay : triangulations régulières, triangulations contraintes.

Programme à 4 ans — Tous

- Conception de structures de données et d'algorithmes effectifs.
- Optimisation des performances d'algorithmes de localisation dans les triangulations régulières et les triangulations contraintes.

3.2 Calcul géométrique

L'implantation naïve des algorithmes utilisant la représentation flottante des nombres réels peut conduire à un comportement anormal des programmes, erreurs grossières, boucles infinies ou terminaisons catastrophiques. Si ces comportements sont bien connus, ils sont difficiles à maîtriser [2]. Une part importante

2. «Dans l'industrie, la réalisation et la maintenance d'algorithmes géométriques comportant une part combinatoire et une part numérique sont très coûteuses. La réalisation de tels algorithmes ne procède pas d'une méthodologie rigoureuse et reproductible mais d'un savoir-faire personnel difficilement transmissible. Si les conséquences semblent mineures et n'affecter que des cas limites peu fréquents, en fait, on remarque que la gestion des ε et des cas limites devient la partie la plus coûteuse en mise au point et en maintenance.» A. Lieutier, Dassault Systèmes.

de la recherche récente en géométrie algorithmique, que nous appelons calcul géométrique, vise à combler le gouffre séparant la description théorique d'un algorithme d'une implantation fiable, efficace et robuste.

Nous allons tout d'abord définir ce que nous appelons *prédicats* et *constructeurs*. Un objet géométrique associe généralement une structure combinatoire (par exemple le graphe d'adjacence des faces d'un polyèdre) et un ensemble de valeurs numériques qui décrivent le plongement de l'objet dans l'espace. L'instabilité numérique des algorithmes géométriques est fondamentalement liée à cette double nature combinatoire et numérique des objets géométriques. La démarche qui soutend toutes nos études consiste à distinguer dans les algorithmes géométriques deux types de primitives numériques : les prédicats et les constructeurs. Les prédicats se réduisent en général au signe d'une expression numérique, décident des branchements à effectuer par l'algorithme et permettent de calculer la structure combinatoire du résultat. Ils jouent un rôle critique du point de vue de la robustesse et il est donc essentiel de les évaluer exactement. Les constructeurs calculent le plongement géométrique du résultat. Certains problèmes n'utilisent que des prédicats et pas de constructeurs : c'est par exemple le cas des algorithmes de construction de la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points [3]. Nous proposons quatre axes de travail : la formalisation du calcul géométrique en termes de prédicats et de constructeurs, le développement de méthodes pour l'évaluation exacte des prédicats, le contrôle des arrondis géométriques, et la poursuite du développement de la bibliothèque CGAL.

Prédicats. Il est maintenant bien établi que la robustesse d'une implémentation passe par l'évaluation exacte des prédicats mis en jeu [40, 34]. Tous les algorithmes résolvant un problème donné n'utilisent pas nécessairement les mêmes prédicats : privilégier les algorithmes qui nécessitent un jeu de prédicats de complexité algébrique minimale permet de limiter les exigences arithmétiques d'une implantation robuste [BP00, BS00, BV02, AP01]. La recherche de prédicats intrinsèques, c'est-à-dire invariants pour les symétries du problème, peut également conduire à une compréhension plus fine de l'algorithme et à de meilleures performances [28, Ang02].

Notre démarche conduit à spécifier systématiquement les prédicats des algorithmes que nous concevons. Il faut ensuite, pour coder de manière efficace l'évaluation d'un prédicat:
— ramener la question géométrique à l'évaluation la plus simple possible du signe d'une expression algébrique [DFMT03],
— calculer exactement le signe de cette expression [BY00, BEPP99]
— concevoir des filtres permettant de conclure rapidement dans les cas faciles [DP99, Pio99].

Ces différents aspects peuvent nécessiter l'utilisation de résultats existants ou des développements originaux en géométrie algébrique ou en arithmétique exacte. Nous utilisons en particulier les compétences du projet GALAAD pour les aspects algébriques. Un tel travail a déjà été mené avec des prédicats sur les arcs de cercles [DFMT03].

3. En revanche, la construction du diagramme de Voronoï dual fait appel à des constructeurs pour calculer les coordonnées des sommets du diagramme.

Programme à 4 ans | O. Devillers, M. Pocchiola

- Recherche de prédicats de complexité minimale, et de prédicats intrinsèques.
- Recherche de bonnes formulations algébriques.
- Développement des techniques de filtrage arithmétique.

Arrondis géométriques. Les méthodes précédentes ne permettent cependant pas de résoudre le cas des algorithmes qui font appel à des constructeurs, voire utilisent des constructeurs en cascade. C'est un sujet peu exploré, à l'exception de travaux sur les arrangements de segments du plan [24, 20] et sur le diagramme de Voronoï [DG99]. On peut aborder le problème à plusieurs niveaux, d'une part concevoir des constructeurs élémentaires permettant de construire de nouveaux objets géométriques simples arrondis d'une manière clairement spécifiée, par exemple le point à coordonnées entières le plus proche de l'intersection de deux segments. D'autre part, construire des objets géométriques plus complexes dont les spécifications ne sont pas locales telles que convexité, planarité ou inclusion. L'objectif à long terme est d'être capable de garantir la robustesse des algorithmes qui cascadent des constructions arrondies.

Programme à 4 ans | O. Devillers

- Développer des calcul d'arrondis certifiés pour les constructions élémentaires : par exemple, pour arrondir au point à coordonnées entières le plus proche le point d'intersection de deux segments, cercles ou coniques; de même pour le centre de la sphère passant par quatre points ou orthogonale à quatre sphères.
- Construire des objets géométriques complexes en assurant des propriétés globales : spécifier des notions d'arrondis par défaut et par excès pour l'intersection de polygones, d'objets définis par des arcs de coniques.

CGAL. CGAL est une bibliothèque de programmes géométriques visant à fournir une implantation robuste, fiable et efficace de la plupart des structures de données et algorithmes géométriques. CGAL est développée en C++, exploite largement les mécanismes offerts par ce langage en matière de programmation générique, et s'inspire de la STL (Standard Template Library) [FGK+00].

CGAL est le résultat d'un effort collectif associant sept équipes de pays différents et soutenu par deux projets Européens successifs. Nous sommes plus particulièrement chargés du développement du module des triangulations [BDTY00] et d'une partie du noyau. Poursuivre le développement de CGAL est l'un des objectifs prioritaires du projet GÉOMÉTRICA pour plusieurs raisons.

– CGAL est un vecteur essentiel pour la diffusion dans les milieux applicatifs et industriels des solutions proposées par la géométrie algorithmique. CGAL permet de développer rapidement des prototypes et ses performances autorisent le passage à des logiciels d'exploitation. CGAL est en fait un vecteur de communication à double sens. Les utilisateurs de CGAL nous permettent d'identifier des applications des algorithmes géométriques dans des domaines très variés, voire de nouveaux sujets de recherche (cf. `http://www.cgal.org`)

– CGAL est une boîte à outils pour le développement d'applications géométriques et un outil d'expérimentation géométrique précieux pour l'enseignement et la recherche. La généricité de CGAL rend la bibliothèque extrêmement flexible et permet d'effectuer toutes sortes de tests. En particulier CGAL permet de tester les méthodes robustes évoquées plus haut. CGAL constitue ainsi à la fois un moteur et un test pour les recherches du projet GÉOMÉTRICA.

Programme à 4 ans P. Alliez, R. Chaine, M. Teillaud, M. Yvinec

- Développer un module de maillages (voir section 3.1).
- Développer un module de reconstruction (voir section 3.3).
- Développer un module de compression (voir section 3.4).

3.3 Approximation géométrique

L'approximation géométrique consiste à produire une structure de données qui représente une approximation d'une forme. On distingue dans la suite le cas où la forme est connue de celle où la forme n'est que partiellement connue. Par ailleurs, la grande variété des formes a conduit à des types de modèles très différents. Les plus classiques sont :

- les représentations de la frontière (BRep), sous forme d'un graphe de carreaux paramétriques (un cas simple est celui d'une surface polyédrique),
- les représentations implicites décrivant un solide comme le lieu des points où une certaine fonction est positive et son bord comme l'ensemble des zéros de la fonction,
- les représentations constructives par assemblage de primitives volumiques (CSG),
- les représentations par décomposition de la forme en éléments simples (complexes cellulaires) qui peuvent être des voxels d'une grille dans le cas de données structurées comme on les rencontre en imagerie, ou des cellules d'un complexe plus général comme un diagramme de Voronoï dans le cas de données irrégulières.

Nous comptons privilégier les modèles polyédriques (triangulations et complexes cellulaires plus généraux). Ils sont très généraux, facilement visualisables, peuvent servir de passerelles entre les différents types de modèles, et semblent être les seuls qu'il soit envisageable d'utiliser pour de très nombreux problèmes pratiques : représenter de manière exacte la somme de Minkowski ou le squelette d'objets courbes est par exemple hors de portée aujourd'hui et restera toujours beaucoup plus coûteux qu'un calcul sur des approximations polyédriques.

Suivant les applications, les performances et les contraintes sont très différentes. Pour les jeux vidéos, la vitesse prime. En infographie, l'aspect visuel est plus important que l'exactitude, et il faut savoir gérer différents niveaux de détail. En CAO et en ingénierie au contraire, la qualité des approximations est essentielle.

Enfin, il faut bien souvent pouvoir représenter des objets en mouvement ou déformables. C'est le cas en robotique, en simulation chirurgicale et en modélisation moléculaire.

Maillages de surfaces. Le maillage de surfaces est un sujet important en infographie et un préalable au maillage d'un domaine tridimensionnel. Les approches développées jusqu'ici [5, 22] sont essentiellement heuristiques et n'offrent pas ou peu de garanties théoriques. Certifier la qualité des approximations est néanmoins crucial en CAO, en robotique et, d'une manière générale, dans tous les domaines où la précision est un facteur critique.

La qualité d'une approximation géométrique revêt plusieurs aspects :

Topologiques : on veut garantir que l'approximation a le même type topologique que la surface. Bien qu'on dispose de conditions suffisantes pour que la surface et son approximation soient homéomorphes, elles sont difficiles à rendre effectives et demandent de savoir calculer des singularités et les points critiques de fonctions définies sur une surface. On aborde ces questions de deux points de vue : d'une part en exhibant des conditions conduisant à des mécanismes d'échantillonnage plus simples et, d'autre part, en étudiant en collaboration avec GALAAD les questions algébriques qui interviennent dans la mise en œuvre de ces méthodes.

Géométriques : on veut également garantir que l'approximation soit proche de la surface. Si on connaît des algorithmes de raffinement de maillage de surfaces, on ne sait pas donner de majorant intéressant du nombre de sommets de l'approximant. Rappelons que l'approximation optimale (nombre de sommets pour une erreur donnée) du graphe d'une fonction de deux variables est un problème NP-complet et que le placement optimal de points sur une sphère n'a pas de solution générale[4]. Le choix de la distance mesurant l'écart entre les deux surfaces est lui-même un sujet d'étude : distance de Hausdorff, Fréchet, volume de la différence symétrique [ALSS99], etc. Il est également important de pouvoir contrôler les angles des facettes, majorer l'erreur sur les normales et l'aire totale de la surface. D'une manière générale, on veut pouvoir établir des propriétés de convergence des invariants géométriques.

On classe les techniques de maillage actuelles en trois types:

Paramétrique : lorsque le maillage est effectué dans un espace paramétrique [10], ce dernier nécessitant un découpage préalable de la surface en carreaux puis leur paramétrisation. Par exemple les lacets générateurs du groupe fondamental [LPVV01] découpent la surface tout en fournissant un schéma polygonal dont le plongement dans le plan fournit une paramétrisation [17]. Une fois dans l'espace paramétrique on applique des algorithmes de maillage 2D efficaces et conformes à un espace de contrôle défini sous la forme d'une carte de métrique isotrope ou anisotrope [7, 6]. Des techniques spectrales associées à la théorie de l'échantillonnage donnent aussi accès à une vision globale du contenu géométrique d'une surface [31]. Une paramétrisation s'avère également indispensable pour représenter le mouvement ou la déformation des objets mais il n'y a pas de garantie sur les auto-intersections ni sur le maintien de la topologie.

Explicite : lorsqu'un maillage surfacique est adapté par des opérateurs de décimation et de raffinement associés à une optimisation des positions des sommets [9, 21]. La qualité de l'approximation fonction de la complexité est alors

4. C'est le fameux problème des dictateurs ennemis, cf. M. Berger, La Recherche, No 346, Octobre 2001.

inconnue a priori et délicate à contrôler de manière globale car les opérateurs de raffinement n'agissent que localement [25, 37]. Cette dernière raison explique aussi les difficultés à contrôler la topologie de l'objet.

Volumique : lorsqu'on calcule la triangulation de Delaunay tridimensionnelle de points sur la surface. Sous certaines conditions d'échantillonnage il est démontré qu'un sous ensemble des facettes constitue alors une surface homéomorphe à la surface de départ [13]. L'approche volumique présente l'intérêt d'offrir une gestion naturelle des changements de topologie dans le cas d'objets en mouvement ou déformables.

Enfin certaines surfaces n'ont pas d'expression analytique simple mais sont définies géométriquement (par exemple l'axe médian d'une surface ou la somme de Minkowski de deux objets). Dans ce cas, on cherche des procédés d'échantillonnage des objets de départ et des résultats de convergence qui conduisent à une approximation garantie de la surface ainsi définie.

Programme à 4 ans — P. Alliez, J.-D. Boissonnat, M. Pocchiola, M. Yvinec

- Définir et étudier de bonnes approximations de surfaces.
- Contribuer à l'élaboration d'une théorie de l'échantillonnage des surfaces.
- Etudier des techniques de découpage et de paramétrisation avec un contrôle des distortions induites.
- Développer un mailleur de surfaces certifié.
- Développer des mailleurs spécialisés (axe médian, molécules).

Reconstruction de surfaces L'ingénierie inverse, l'imagerie médicale, ou encore l'archivage de modèles historiques sous formes de modèles virtuels ont comme point de départ un objet réel. La chaîne de traitement de l'information consiste alors à numériser l'objet, reconstruire un modèle, le valider, et utiliser le résultat.

Les progrès technologiques effectués par les capteurs permettent de numériser des objets complexes. Les données produites présentent des caractéristiques variables. Si les télémètres laser engendrent des nuages de points 3D non structurés, les données issues de scanners médicaux ou microscopes se présentent sous forme de sections planes. Le volume des données peut varier de quelques centaines de points à plusieurs centaines de millions. Le bruit peut être faible comme dans les scanners industriels ou important comme dans les échographes médicaux.

Après l'étape de numérisation, il faut reconstruire une surface polyédrique, implicite ou paramétrique. La reconstruction a reçu une attention soutenue depuis une vingtaine d'années [12, Boi84, 27]. La communauté de géométrie algorithmique a récemment formalisé le problème, et produit des algorithmes à la fois efficaces et offrant des garanties topologiques et géométriques sur la surface reconstruite [1, BC00]. Ces algorithmes utilisent tous la triangulation de Delaunay des données (ou une variante) et ont conduit à des logiciels utilisés sur des jeux de données de tailles industrielles.

- Poursuivre l'étude de la géométrie des nuages de points sur une surface : estimation de quantités différentielles (normales, courbures), détection des bords, interpolation.
- Reconstruction de surfaces à bord et/ou non lisses avec des garanties topologiques et géométriques.
- Reconstruction dans le cas de données bruitées.
- Reconstruction dans le cas de gros volumes de données —plusieurs millions de points. On évitera par exemple de calculer in extenso la triangulation de Delaunay $3D$ associée au nuage de points.
- Simplification de nuages de points. Il peut s'agir de respecter une erreur en minimisant le nombre de points utilisés, ou bien de minimiser l'erreur si le nombre de points est fixé.

3.4 Compression et transmission de données géométriques

Le domaine de la compression et de la transmission appliquée aux objets géométriques est assez nouveau pour la communauté de géométrie algorithmique et a plutôt été abordé par celle du traitement et de la synthèse d'images. Nous nous attaquons à ces nouveaux problèmes avec une double conviction : 1) la géométrie algorithmique peut apporter plus de rigueur et un regard neuf, et 2) les contraintes réseaux sont suffisamment importantes pour développer une théorie de la représentation et du codage de l'information adaptée aux objets géométriques.

Compression. Les capacités limitées des réseaux nécessitent une compression de l'information avant transmission. Or la modélisation des objets 3D par maillage surfacique ou volumique combine des aspects numériques (les coordonnées des sommets) et des aspects combinatoires (relier ces sommets entre eux), ce qui justifie des algorithmes de compression spécialisés.

Les techniques produisant les meilleurs taux de compression de maillages utilisent actuellement l'ordre d'énumération des sommets pour coder l'aspect combinatoire de la triangulation [39]. Une autre approche consiste à ne pas transmettre cette combinatoire et à utiliser l'ordre de transmission des sommets pour améliorer le taux de compression [DG00]. La combinatoire est ensuite reconstruite soit à partir de la seule position des points, soit aidée par la transmission d'une information supplémentaire pour supprimer les ambiguïtés. L'enjeu consiste à développer des techniques de compression à taux maximal garanti, adaptatifs en complexité (vitesse / taux de compression), et dont le comportement asymptotique est rigoureusement analysé [AD01b, KADS03].

Progressivité. Dans un monde en réseau, les objets sont remplacés par des flux, une représentation naturellement bien adaptée à leur transmission. Cette contrainte de temporalité nous invite à ajouter une composante temporelle aux données en développant des techniques progressives de codage.

Les applications sensibles (médical, calcul numérique) requièrent des représentations et compressions sans perte : le modèle géométrique reconstruit devant être identique au modèle initial. Ceci n'est pas incompatible avec une transmission *progressive* qui permet de visualiser une approximation de l'objet avant la fin de la transmission [30, AD01a, DG00]. Comme pour la compression d'images et de vidéos, la difficulté du codage progressif réside non seulement dans la mise au point de l'algorithme de décomposition progressive de la géométrie, mais aussi dans la définition d'une distorsion reliée à des critères perceptuels. On cherche donc une coopération entre la simplification des données et la compression, appelée aussi compromis débit/distorsion. Cette gestion des différents niveaux de détail et la représentation des objets à différentes échelles est un des grands enjeux dans cette chaîne d'opérations [26, Gan01, All00].

En plus de la contrainte temporelle liée au débit limité et variable d'un réseau s'ajoute la notion de transmission avec pertes ou avec une dégradation du signal. Il s'agit alors d'organiser les données sous une forme cohérente de telle sorte qu'une transmission incomplète ou erronée des données n'engendre qu'un effet mesuré sur la fidélité de la reconstruction vis à vis des données originales.

Programme à 4 ans — P. Alliez, O. Devillers

- Compression sans perte et à taux maximal garanti de maillages surfaciques.
- Généralisation à la compression de maillages volumiques.
- Utiliser une technique de remaillage de surfaces pour concevoir une méthode progressive de codage optimale au sens du compromis débit/distorsion.
- Codage pour une transmission progressive résistante aux dégradations des conditions de transmission (comme la perte de paquets).

4 Domaines d'application

Les domaines d'application de la géométrie algorithmique sont très variés [14]. Nous comptons nous limiter à quatre secteurs pour lesquels la géométrie algorithmique a apporté récemment des contributions décisives : la modélisation géométrique, le calcul scientifique, les télécommunications et la métrologie. Les apports attendus des techniques de la géométrie algorithmique sont de plusieurs types : l'introduction de nouvelles structures de données, des analyses rigoureuses de la complexité et de la qualité des solutions proposées, des implémentations robustes et efficaces.

4.1 Modélisation géométrique

Dans le passé récent, nous avons abordé des problèmes de modélisation géométrique dans le domaine médical, en géologie et en CAO.

Dans le *domaine médical*, deux applications sont en cours. La première, hébergée par l'action Chir, utilise les outils de reconstruction développés chez Prisme à des fins de modélisation et planification en chirurgie cardio-vasculaire (thèse de L. Adhami). La seconde est développée dans le cadre d'une Action de Recherche Coopérative INRIA intitulée VitesV —Visualisation Tridimensionnelle et Exploration du Système Vasculaire. Il s'agit, à partir d'images médicales, de modéliser des réseaux artériels dans le but de simuler l'écoulement sanguin.

Dans le domaine *géologique*, nous avons collaboré avec le BRGM dans le cadre du programme GÉOFRANCE 3D de cartographie du sous-sol français. La thèse de S. Nullans a conduit à un logiciel exploité au BRGM qui permet de reconstituer un modèle plausible du sous-sol à partir de données irrégulières et très peu denses.

En CAO et plus précisément en "reverse engineering", nous avons développé une nouvelle méthode de reconstruction de surfaces polyédriques à partir de nuages de points non structurés. Ces travaux ont conduit à la réalisation du logiciel NUAGES-PC qui, après une évaluation de plusieurs mois qui a mis en compétition la concurrence internationale, a été acquis par Dassault Systèmes et intégré à CATIA V-5. Plusieurs améliorations et extensions de `nuages-pc` sont actuellement en cours. Nous travaillons également sur la reconstruction à partir de coupes. Ces données sont acquises par des scanners médicaux et on les rencontre principalement dans le domaine de la santé. Mais elles interviennent aussi dans l'industrie pour la numérisation de pièces particulièrement complexes.

Enfin, nous souhaitons nous intéresser aux questions géométriques posées par la modélisation moléculaire (modélisation, maillage, déformation). Nous comptons établir des collaborations avec des biochimistes et des biophysiciens et mieux comprendre la place de la géométrie dans la modélisation des phénomènes complexes observés.

4.2 Calcul scientifique

Les maillages sont les outils de base des calculs scientifiques. On distingue traditionnellement les maillages structurés (grilles éventuellement déformées) et les maillages non structurés (le plus souvent des triangulations). Les maillages structurés sont plus simples à construire et à manipuler. Ils sont directement utilisables par les méthodes multigrilles et les méthodes par différence finies. Les maillages non structurés s'adaptent mieux aux géométries complexes et à un raffinement non uniforme mais posent des problèmes qui n'ont pas encore de solution satisfaisante. Le principal problème est de produire un nombre minimal d'éléments d'aspect borné et satisfaisant une carte de densité donnée pouvant varier de manière brutale. Il y a de nombreux travaux sur ce sujet [22, 3]. On se reportera au paragraphe 3.1 pour notre approche du problème.

Le diagramme de Voronoï des points d'une grille est une grille. Ceci ne reste plus vrai si on déplace les points mais le diagramme de Voronoï garde la propriété que chacune de ses faces est orthogonale au segment qui joint les centres des deux cellules qui partagent la face. Cette propriété est importante pour les méthodes par volumes finis en mécanique des fluides. Nous nous sommes servis d'une variante de cette idée pour construire des maillages de transition en collaboration avec l'IFP (thèse de S. Balaven). Il s'agit de générer des maillages de transition entre les maillages hexaédriques utilisés pour discrétiser les réservoirs de pétrole et les maillages à symétrie radiale qui décrivent les puits [BBBS00]. La solution proposée a conduit au dépôt d'un brevet et le logiciel développé devrait être commercialisé par une filiale de l'IFP.

Les diagrammes de Voronoï permettent également de construire des interpolations locales (basées sur la notion de voisins "naturels") qui ont de bonnes propriétés de continuité et de précision. Une collaboration avec le projet SINUS a conduit à des premiers résultats intéressants dans le plan [32]. Nous espérons pouvoir continuer notre collaboration en mettant à disposition des numériciens les codes que nous avons développés en 3D pour le calcul des voisins naturels et des systèmes de coordonnées associés.

D'une manière générale, nous comptons intensifier nos collaborations avec des équipes de numériciens. Les triangulations 3D de CGAL sont déjà utilisées au Queen Mary and Westfield collège de Londres par l'équipe du professeur Peter Coveney qui a mis au point une nouvelle méthode de simulation de fluides complexes (polymères, suspensions colloïdales), la méthode des particules dissipatives. Les triangulations 3D de CGAL ont été retenues pour leur fiabilité et leur capacité à gérer insertions et suppressions.

L'ARC VitesV et l'action COLOR Tetmesh avec les projets Epidaure et Caïman nous permet de développer à partir des triangulations de CGAL, un mailleur efficace utilisable par les solveurs du projet Caïman et le simulateur chirurgical du projet Epidaure.

4.3 Télécommunications

La transmission de données géométriques est un domaine appelé à se développer et sur lequel nous voulons accentuer nos efforts. Les applications industrielles sont encore embryonnaires, les techniques développées dans le monde de la recherche n'ont encore que peu diffusé (Macromedia [5], Virtue3d [6] par exemple) et les efforts de normalisations (MPEG4) sont encore en pleine évolution.

Nous pensons que nos travaux récents sur la compression de modèles géométriques ainsi que nos projets mentionnés au paragraphe 3.4 sont appelés à trouver de nombreuses applications : les catalogues virtuels, les données médicales, les systèmes d'information géographiques, les musées virtuels, la documentation enrichie... Avec des impératifs très variables en termes de précision des données, de temps ou de débit de transmission qui doivent être pris en compte par les algorithmes.

Nous avons proposé une ARC (TéléGéo) afin de créer une synergie autour de ces sujets.

4.4 Métrologie

Les pièces mécaniques manufacturées doivent respecter certaines tolérances. La métrologie cherche à évaluer la qualité d'objets manufacturés en mesurant certaines grandeurs (cylindricité par exemple). Les normes (ASMEY14.5M pour la cylindricité) font intervenir des grandeurs qui sont parfois algorithmiquement

5. http://www.macromedia.com/software/shockwaveplayer/public_beta/
6. http://www.virtue3d.com/

trop difficiles à évaluer et, en pratique, les industriels se contentent d'une mesure assez grossière de la qualité.

La géométrie algorithmique peut apporter des améliorations et nous comptons poursuivre des efforts de valorisation dans ce domaine. Nous avons déjà proposé un algorithme rapide pour obtenir une excellente approximation de la cylindricité d'un ensemble de points [DP00].

5 Collaborations

5.1 Interactions avec les autres projets de l'INRIA

Nous avons des collaborations en cours avec les projets suivants :

Galaad et Coprin : questions algébriques. Projet IST ECG, ARC Costic.

Isa, Reves: problèmes de visibilité, représentation de surfaces, compression (ARC Visi3D, TéléGéo).

Planete: compression et transmission de modèles 3D.

Epidaure, Chir : modélisation géométrique et robotique (ARC VitesV, projet TéléMédecine).

Gamma, Caiman : maillages pour le calcul scientifique (ARC Costic, ARC VitesV).

Nous sommes également intéressés à collaborer avec les projets

Algo : analyse d'algorithmes.

Lemme : preuve d'algorithmes géométriques, axiomatisation.

5.2 Collaborations en France et à l'étranger

A la suite du projet PRISME, GÉOMÉTRICA continuera à jouer un rôle moteur dans la communauté française de géométrie algorithmique. Nous avons établi des contacts avec des mathématiciens géomètres, notamment J-M. Morvan de l'université Claude Bernard et F. Chazal de l'université de Bourgogne. J-M.Morvan est en délégation dans le projet pour un an à partir de septembre 2001.

Nos collaborations les plus étroites se font cependant au niveau européen. Les projets ALCOM, CGAL et maintenant ECG ont successivement financé une collaboration de plus de dix ans avec les meilleures équipes européennes de géométrie algorithmique : Saarbrucken (K. Mehlhorn), Zurich (E. Welzl), Utrecht (M. Overmars), Groningen (G. Vegter), Berlin (H. Alt) et Tel Aviv (M. Sharir).

Ces partenaires sont regroupés dans le consortium CGAL qui pilote le développement et la diffusion de CGAL.

Des liens plus récents se sont tissés avec Barcelone (F. Hurtado) au travers d'une action intégrée Picasso.

Aux États Unis, nous avons une longue et fructueuse collaboration avec F.

Preparata (Brown). Nous collaborons également avec J. Erickson et J. Ponce dans le cadre d'une action CNRS/Université d'Illinois à Urbana.

6 Diffusion de logiciels

Nous menons une politique active de transfert de nos logiciels. Depuis 1995, les logiciels suivants ont été distribués :

- NUAGES : Logiciel de reconstruction d'objets 3D à partir de coupes parallèles
  commercialisé par Siemens (scanners) et Leibinger (radiothérapie)
- Hiérarchie de Delaunay : Logiciel de calcul de la triangulation de Delaunay 3D
  commercialisé par Kréon (capteurs 3D)
- NUAGES-PC : Logiciel de reconstruction d'objets 3D à partir de nuages de points
  intégré à CATIA V 5 de Dassault-Systèmes
- CGAL: bibliothèque d'algorithmes géométriques
  sources disponibles `http://www.cgal.org`
  une startup est en cours de création

7 Bibliographie de l'équipe

Structures de données et algorithmes géométriques

[AB] Dominique Attali and Jean-Daniel Boissonnat. A linear bound on the complexity of the delaunay triangulation of points on polyhedral surfaces. In *submitted*.

[Ang02] P. Angelier. *Algorithmique des graphes de visibilité*. Thèse de doctorat en sciences, Ecole Normale Supérieure, Paris, France, Mars 2002. A paraître.

[AP01] P. Angelier and M. Pocchiola. A sum of squares theorem for visibility complexes. In *Proc. 17th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 302–311, 2001.

[BBBS00] S. Balaven, C. Bennis, J-D. Boissonnat, and S. Sarda. Generation of hybrid grids using power diagrams. In *Proc. Numerical Grid Generation in Field Simulations*, 2000.

[BDS+92] J.-D. Boissonnat, O. Devillers, R. Schott, M. Teillaud, and M. Yvinec. Applications of random sampling to on-line algorithms in computational geometry. *Discrete Comput. Geom.*, 8:51–71, 1992.

[BSTY98] J.-D. Boissonnat, M. Sharir, B. Tagansky, and M. Yvinec. Voronoi diagrams in higher dimensions under certain polyhedra distance functions. *Discrete Comput. Geom.*, 14:485–519, 1998.

[BY98] Jean-Daniel Boissonnat and Mariette Yvinec. *Algorithmic geometry*. Cambridge University Press, UK, 1998. traduit de la version française (Ediscience international) par Hervé Brönnimann.

[CCY01] David Cohen-Steiner, Eric Colin de Verdière, and Mariette Yvinec. Conforming delaunay triangulations in 3d. Rapport de recherche 4345, INRIA, 2001.

[Dev92] O. Devillers. Randomization yields simple $O(n \log^* n)$ algorithms for difficult $\Omega(n)$ problems. *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, 2(1):621–635, 1992.

[Dev98] O. Devillers. Improved incremental randomized Delaunay triangulation. In *Proc. 14th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 106–115, 1998.

[Dob94] Katrin Dobrindt. *Algorithmes dynamiques randomisés pour les arrangements. Application à la planification de trajectoires.* Thèse de doctorat en sciences, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, France, 1994.

[DP00] Olivier Devillers and Franco P. Preparata. Evaluating the cylindricity of a nominally cylindrical point set. In *Proc. 11th ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms (SODA)*, pages 518–527, 2000.

[DPT01] Olivier Devillers, Sylvain Pion, and Monique Teillaud. Walking in a triangulation. In *Proc. 17th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 106–114, 2001.

[Fab94] Andreas Fabri. *Géométrie algorithmique en parallèle sur des machines réelles.* Thèse de doctorat en sciences, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, France, 1994.

[Nie96] Franck Nielsen. *Algorithmes géométriques adaptatifs.* Thèse de doctorat en sciences, université de Nice-Sophia Antipolis, France, 1996.

[PV96a] M. Pocchiola and G. Vegter. Topologically sweeping visibility complexes via pseudo-triangulations. *Discrete Comput. Geom.*, 16:419–453, December 1996.

[PV96b] M. Pocchiola and G. Vegter. The visibility complex. *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, 6(3):279–308, 1996.

[PV96c] Michel Pocchiola and Gert Vegter. Pseudo-triangulations: Theory and applications. In *Proc. 12th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 291–300, 1996.

[Tei91] M. Teillaud. *Vers des algorithmes randomisés dynamiques en géométrie algorithmique.* Thèse de doctorat en sciences, Université Paris-Sud, Orsay, France, 1991.

Calcul géométrique

[BDTY00] Jean-Daniel Boissonnat, Olivier Devillers, Monique Teillaud, and Mariette Yvinec. Triangulations in CGAL. In *Proc. 16th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 11–18, 2000.

[BEPP99] Hervé Brönnimann, Ioannis Emiris, Victor Pan, and Sylvain Pion. Sign determination in Residue Number Systems. *Theoret. Comput. Sci.*, 210(1):173–197, 1999. Special Issue on Real Numbers and Computers.

[BP00] Jean-Daniel Boissonnat and Franco P. Preparata. Robust plane sweep for intersecting segments. *SIAM J. Comput.*, 29:1401–1421, 2000.

[BS00] J.-D. Boissonnat and J. Snoeyink. Efficient algorithms for line and curve segment intersection using restricted predicates. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 16(1):35–52, 2000.

[BV00] Jean-Daniel Boissonnat and Antoine Vigneron. An elementary algorithm for reporting intersections of red/blue curve segments. In *Proc. 8th Canad. Conf. Comput. Geom.*, 2000.

[BV02] Jean-Daniel Boissonnat and Antoine Vigneron. Elementary algorithms for reporting intersections of curve segments. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 21:167–175, 2002.

[BY00] Hervé Brönnimann and Mariette Yvinec. Efficient exact evaluation of signs of determinants. *Algorithmica*, 27:21–56, 2000.

[DFMT03] Olivier Devillers, Alexandra Fronville, Bernard Mourrain, and Monique Teillaud. Exact predicates for circle arcs arrangements. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 2003.

[DG99] Olivier Devillers and Pierre-Marie Gandoin. Rounding voronoi diagram. In *Proc. 8th Discrete Geometry and Computational Imagery conference (DGCI99)*, volume 1568 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 375–387. Springer-Verlag, 1999.

[DP99] Olivier Devillers and Franco P. Preparata. Further results on arithmetic filters for geometric predicates. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 13:141–148, 1999.

[FGK+00] A. Fabri, G.-J. Giezeman, L. Kettner, S. Schirra, and S. Schönherr. On the design of CGAL a computational geometry algorithms library. *Softw. – Pract. Exp.*, 30(11):1167–1202, 2000.

[Pio99] Sylvain Pion. *De la géométrie algorithmique au calcul géométrique.* Thèse de doctorat en sciences, université de Nice-Sophia Antipolis, France, 1999.

Approximation géométrique

[ALSS99] Pierre Alliez, Nathalie Laurent, Henri Sanson, and Francis Schmitt. Mesh approximation using a volume-based metric. In *PACIFIC GRAPHICS '99 Conference Proceedings*, pages 292–301, 1999.

[BC00] Jean-Daniel Boissonnat and Frédéric Cazals. Smooth surface reconstruction via natural neighbour interpolation of distance functions. In *Proc. 16th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 223–232, 2000.

[BC01a] J-D. Boissonnat and F. Cazals. Coarse-to-fine surface simplification with geometric guarantees. In A. Chalmers and T-M. Rhyne, editors, *Eurographics'01*, Manchester, 2001. Blackwell.

[BC01b] Jean-Daniel Boissonnat and Frédéric Cazals. Natural coordinates of points on a surface. *Comp. Geometry Theory and Applications*, 19:155–173, 2001.

[Boi84] J.-D. Boissonnat. Geometric structures for three-dimensional shape representation. *ACM Trans. Graph.*, 3(4):266–286, 1984.

[Boi88] J.-D. Boissonnat. Shape reconstruction from planar cross-sections. *Comput. Vision Graph. Image Process.*, 44:1–29, 1988.

[Des96] Pascal Desnoguès. *Triangulations et quadriques.* Thèse de doctorat en sciences, université de Nice-Sophia Antipolis, France, 1996.

[Gei93] Bernhard Geiger. *Three-dimensional modeling of human organs and its application to diagnosis and surgical planning.* Thèse de doctorat en sciences, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, France, 1993.

[LPVV01] F. Lazarus, M. Pocchiola, G. Vegter, and A. Verroust. Computing a canonical polygonal scheme of a triangulated surface. In *Proc. 17th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 80–89, 2001.

[Nul98] Stéphane Nullans. *Reconstruction tridimensionnelle de structures géologiques à partir de données hétérogènes.* Thèse de doctorat en sciences, université de Nice-Sophia Antipolis, France, 1998.

Codage et transmission de données géométriques

[AD01a] Pierre Alliez and Mathieu Desbrun. Progressive compression for lossless transmission of triangle meshes. In *SIGGRAPH '2001 Conference Proceedings*, pages 198–205, 2001.

[AD01b] Pierre Alliez and Mathieu Desbrun. Valence-driven connectivity encoding of 3d meshes. In *Eurographics '2001 Conference Proceedings*, pages 480–489, 2001.

[All00] Pierre Alliez. *Étude de la représentation géométrique et texturelle de scènes en réalité virtuelle 3D pour les services de visualisation dans un contexte télécommunicant.* Thèse de doctorat en sciences, ENST Paris, France, 2000.

[DG00] Olivier Devillers and Pierre-Marie Gandoin. Geometric compression for interactive transmission. In *Proc. of IEEE Visualization 2000*, pages 319–326, 2000.

[Gan01] Pierre-Marie Gandoin. *Compression progressive sans perte de structures géométriques.* Thèse de doctorat en sciences, université de Nice-Sophia Antipolis, France, 2001.

[KADS03] Andrei Khodakovsky, Pierre Alliez, Mathieu Desbrun, and Peter Schröder. Near-optimal connectivity encoding of 2-manifold polygon meshes. *Graphical Models*, 2003. to appear.

Références

[1] N. Amenta, M. Bern, and M. Kamvysselis. A new Voronoi-based surface reconstruction algorithm. In *Proc. SIGGRAPH '98*, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, pages 415–412, July 1998.

[2] F. Aurenhammer. Voronoi diagrams: A survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Comput. Surv.*, 23(3):345–405, September 1991.

[3] M. Bern. Triangulations. In Jacob E. Goodman and Joseph O'Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 22, pages 413–428. CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 1997.

[4] A. Björner, M. Las Vergnas, N. White, B. Sturmfels, and G. M. Ziegler. *Oriented Matroids.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[5] Jules Bloomenthal. An implicit surface polygonizer. In Paul Heckbert, editor, *Graphics Gems IV*, pages 324–349. Academic Press, Boston, MA, 1994.

[6] H. Borouchaki, P. L. George, F. Hecht, P. Laug, and E. Saltel. Delaunay Mesh Generation Governed by Metric Specifications. Part 1: Algorithms. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25:61–83, 1997.

[7] Frank Bossen and Paul Heckbert. A Pliant Method for Anisotropic Mesh Generation. In *5th Intl. Meshing Roundtable*, pages 63–76, oct 1996.

[8] Bernard Chazelle et al. Application challenges to computational geometry: CG impact task force report. In B. Chazelle, J. E. Goodman, and R. Pollack, editors, *Advances in Discrete and Computational Geometry*, volume 223 of *Contemporary Mathematics*, pages 407–463. American Mathematical Society, Providence, 1999.

[9] L. Chew. Guaranteed quality Delaunay meshing in 3d. In *Proc. 13th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 391–393, 1997.

[10] H. L. de Cougny and M. S. Shephard. Surface Meshing Using Vertex Insertion. In *Proceedings of 5th International Meshing Roundtable, Sandia National Labs*, pages 243–256, oct 1996.

[11] Tamal K. Dey, Herbert Edelsbrunner, and Sumanta Guha. Computational topology. In Bernard Chazelle, Jacob E. Goodman, and Richard Pollack, editors, *Advances in Discrete and Computational Geometry - Proc. 1996 AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conf. Discrete and Computational Geometry: Ten Years Later*, number 223 in Contemporary Mathematics, pages 109–143. American Mathematical Society, 1999.

[12] H. Edelsbrunner, D. G. Kirkpatrick, and R. Seidel. On the shape of a set of points in the plane. *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-29:551–559, 1983.

[13] H. Edelsbrunner and N. R. Shah. Triangulating topological spaces. In *Proc. 10th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 285–292, 1994.

[14] David Eppstein. Geometry in action. `http://www.ics.uci.edu/~eppstein/geom.html`.

[15] Jeff Erickson. Computational geometry pages. `http://www.cs.duke.edu/~jeffe/compgeom/`.

[16] Jeff Erickson. Nice point sets can have nasty Delaunay triangulations. In *Proc. 17th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 96–105, 2001.

[17] M.S. Floater. Parametrization and Smooth Approximation of Surface Triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, 14(3):231–250, 1997.

[18] S. Fortune. Voronoi diagrams and Delaunay triangulations. In D.-Z. Du and F. K. Hwang, editors, *Computing in Euclidean Geometry*, volume 1 of *Lecture Notes Series on Computing*, pages 193–233. World Scientific, Singapore, 1st edition, 1992.

[19] S. Fortune. Voronoi diagrams and Delaunay triangulations. In Jacob E. Goodman and Joseph O'Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 20, pages 377–388. CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 1997.

[20] S. Fortune. Vertex-rounding a three-dimensional polyhedral subdivision. *Discrete Comput. Geom.*, 22(4):593–618, 1999.

[21] Pascal J. Frey. About Surface Remeshing. In *Proceedings of 9th International Meshing Roundtable, Sandia National Labs*, pages 123–136, oct 2000.

[22] Pascal J. Frey and Paul-Louis George. *Maillages. Applications aux éléments finis.* Hermes, Paris, France, 1999.

[23] J. E. Goodman and J. O'Rourke, editors. *Handbook of Discrete and Computational Geometry.* CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 1997.

[24] M. Goodrich, L. J. Guibas, J. Hershberger, and P. Tanenbaum. Snap rounding line segments efficiently in two and three dimensions. In *Proc. 13th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 284–293, 1997.

[25] Paul Heckbert and Michael Garland. Optimal Triangulation and Quadric-Based Surface Simplification. *Journal of Computational Geometry: Theory and Applications*, 14(1-3):49–65, nov 1999.

[26] H. Hoppe. Progressive meshes. In *Proc. SIGGRAPH '96*, pages 99–108, 1996.

[27] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald, and W. Stuetzle. Surface reconstruction from unorganized points. *Comput. Graphics*, 26(2):71–78, 1992. Proc. SIGGRAPH '92.

[28] Donald E. Knuth. *Axioms and Hulls*, volume 606 of *Lecture Notes Comput. Sci.* Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1992.

[29] Michael Murphy, David M. Mount, and Carl W. Gable. A point-placement strategy for conforming Delaunay tetrahedralization. In *Proc. 11th ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms*, pages 67–74, 2000.

[30] R. Pajarola and J. Rossignac. Compressed progressive meshes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 6(1):79–93, 2000.

[31] Mark Pauly and Markus Gross. Spectral Processing of Point-Sampled Geometry. In *Proceedings of SIGGRAPH 2001*, pages 379–386, 2001.

[32] Facundo Del Pin. A lagrangian approach based on the natural neighbor interpolation. Rapport de recherche 4090, INRIA, 2000.

[33] J. Ruppert. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. *J. Algorithms*, 18:548–585, 1995.

[34] Stefan Schirra. Robustness and precision issues in geometric computation. In Jörg-Rüdiger Sack and Jorge Urrutia, editors, *Handbook of Computational Geometry*, chapter 14, pages 597–632. Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland, Amsterdam, 2000.

[35] Jonathan R. Shewchuk. A condition guaranteeing the existence of higher-dimensional constrained Delaunay triangulations. In *Proc. 14th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 76–85, 1998.

[36] Jonathan R. Shewchuk. Mesh generation for domains with small angles. In *Proc. 16th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 1–10, 2000.

[37] R. Bruce Simpson. Anisotropic Mesh Transformations and Optimal Error Control. *Appl. Num. Math.*, 14(1-3):183–198, 1994.

[38] I. Streinu. A combinatorial approach to planar non-colliding robot arm motion planning. In *Proc. 41st Annu. IEEE Sympos. Found. Comput. Sci.* IEEE, November 2000. 443–453.

[39] C. Touma and C. Gotsman. Triangle mesh compression. In *Graphics Interface*, pages 26–34, 1998.

[40] C. Yap. Towards exact geometric computation. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 7(1):3–23, 1997.

8 Appendice : Illustration de travaux récents et en cours

8.1 Diagrammes de Voronoi, triangulations et surfaces.

8.2 Calcul de la triangulation de Delaunay.

8.3 Prédicats et robustesse des algorithmes géométriques.

8.4 CGAL (Computational Geometry Algorithm Library).

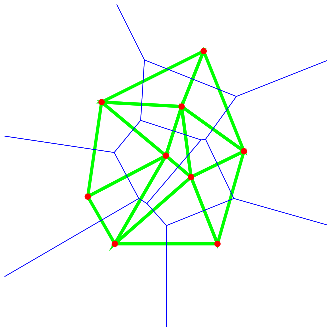
8.5 Reconstruction de surface.

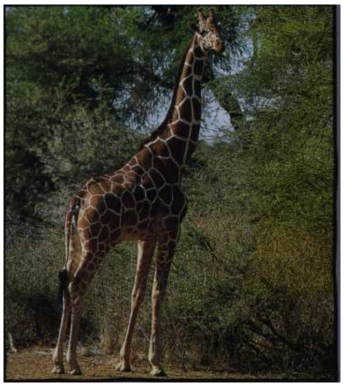
8.6 Codage de modèles numériques de terrains.

8.7 Codage de maillages polygonaux.

8.1 Diagrammes de Voronoi, triangulations et surfaces

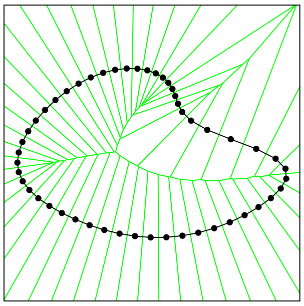
Le diagramme de Voronoi d'un ensemble fini de points E est un pavage de l'espace en cellules convexes (en bleu sur la figure). Chaque cellule est constituée des points de l'espace plus proches d'un point de E que des autres points de E. Si on relie les points de E dont les cellules de Voronoi sont adjacentes, on obtient la triangulation de Delaunay duale (en vert sur la figure).

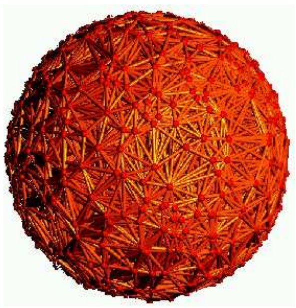




Si E est un échantillon de n points pris sur une surface S, le diagramme de Voronoi de E et la triangulation de Delaunay duale contiennent beaucoup d'information sur la surface S et, lorsque l'échantillonnage est suffisamment dense, on peut fournir des approximations précises. La normale à S en un point p de E est, par exemple, bien estimée par le vecteur qui joint p au sommet de la cellule de Voronoi de p le plus éloigné de p.

On a aussi des approximations globales. Par exemple, l'union des facettes de Delaunay dont l'arête duale coupe S forme un polyèdre homéomorphe à S. On peut également approcher le squelette de S par un sous-ensemble du diagramme de Voronoi de E.
Beaucoup d'algorithmes de maillage ou de reconstruction de surfaces construisent d'abord la triangulation de Delaunay d'un échantillon de points pris sur une surface. La complexité de ces algorithmes dépend donc du nombre de faces de la triangulation.

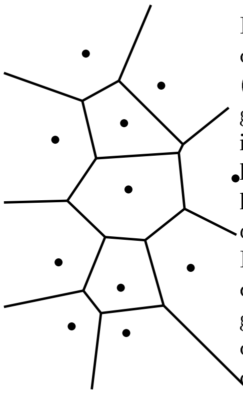




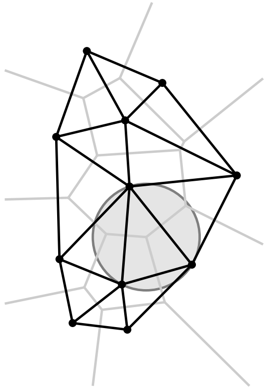
Dans le cas le pire, ce nombre peut être quadratique mais il est conjecturé que cette situation ne peut pas se produire dans le cas de surfaces bien échantillonnées. On a donné très récemment une borne linéaire dans le cas de surfaces polyédriques et des conditions d'échantillonnage faibles. Le cas des surfaces lisses est plus délicat et J.Erickson a exhibé une borne inférieure en $\Omega(n^{1.5})$.

8.2 Calcul de la triangulation de Delaunay

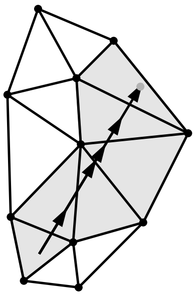
Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay



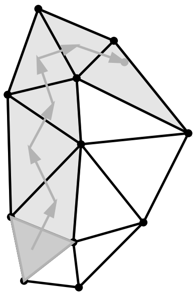
Étant donné un ensemble de sites du plan, le diagramme de Voronoï (à gauche) partitionne le plan en régions où le plus proche site demeure inchangé. La triangulation de Delaunay (à droite) relie deux sites si leurs régions de Voronoï sont adjacentes.
La propriété fondamentale sur laquelle sont basés la plupart des algorithmes calculant la triangulation de Delaunay est qu'un triangle est de Delaunay si sa boule circonscrite est vide.



Marche dans une triangulation



Lorsque l'on rajoute un point dans une triangulation, il faut rapidement trouver quel est le triangle contenant le nouveau point. Pour cela, une stratégie courante consiste à *marcher* de voisin en voisin dans les triangles de la triangulation en essayant de se rapprocher du nouveau point.
Il y a plusieurs stratégies de marche (marche rectiligne (à gauche), marche par visibilité (à droite)) qui sont plus ou moins faciles à programmer et plus ou moins efficaces selon les circonstances.



Hiérarchie de Delaunay

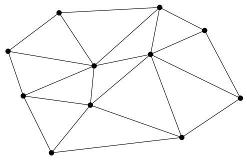
Si on connaît un bon point de départ pour la marche, celle-ci sera plus courte et terminera plus vite. On peut avoir recours à une hiérarchie de triangulations : au niveau le plus bas, on a la triangulation de tous les points et à chaque fois que l'on monte d'un niveau on ne garde qu'un petit échantillon aléatoire des points, la localisation dans l'échantillon sert à trouver un bon point de départ au niveau inférieur. Cette structure est construite incrémentalement, un nouveau point est localisé grâce à la hiérarchie et inséré au niveau le plus bas, puis on détermine aléatoirement si de quels échantillons il fait parti.

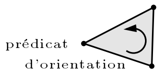
Une telle structure est analysée de manière randomisée, c'est-à-dire en faisant une moyenne sur les choix aléatoires possibles pour l'ordre d'insertion des points et pour la constitution des échantillons. On peut alors prouver que la complexité de cet algorithme est $O(n \log n)$ (en dimension 2 et également en dimension 3 si la triangulation reste d'une taille linéaire). L'échantillon est fixé à un certain pourcentage des points présents au niveau inférieur, ce pourcentage peut ensuite être optimisé, par exemple en supposant que les points sont uniformément répartis.

Cet algorithme se révèle très efficace en pratique, tant en dimension 2 qu'en dimension 3. Il permet en outre d'obtenir un algorithme dynamique, c'est-à-dire dans lequel les points peuvent être ajoutés et supprimés sans qu'il soit nécessaire de tout recalculer.
A titre d'exemple, un fichier de 145 000 points provenant de la numérisation d'une prothèse dentaire (données fournies par Kreon Industries) est triangulé en 16 secondes (Pentium III à 500 MHz).

8.3 Prédicats et robustesse des algorithmes géométriques

Combinatoire et prédicats





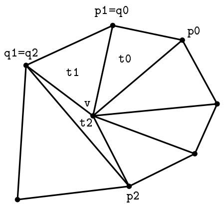
La plupart des algorithmes peuvent être vus sous un angle combinatoire. L'information calculée est de nature discrète, par exemple, étant donné un ensemble de points on cherche des triplets formés par ces points (triangulation).
Pour prendre ces décisions, l'algorithme combinatoire va se poser des questions géométriques élémentaires que l'on appelle prédicats, par exemple l'orientation d'un triangle défini par trois points.

Prédicat et précision numérique

Un prédicat est généralement le signe d'une expression algébrique, si celle ci est évaluée avec l'arithmétique flottante, son signe peut être erronné.
Par exemple l'orientation du triangle pqr est donnée par le signe du déterminant $\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$.

Nous allons illustrer les possibilités d'erreurs avec un modèle jouet d'arithmétique avec deux chiffres décimaux de précision. L'évaluation arrondi du déterminant aux points $p = (-94{,}0)$,$q = (92{,}68)$,$r = (400{,}180)$ donne $(92+94)*180-(400+94)*68 = 190*180-490*68 = 34000-33000 = +1000$ alors que la valeur exacte -112 est négative.

Cohérence géométrique



Exemple: tourner autour de `v`

```
t=t0
faire
  vpq tel que t=vpq
                vpq direct
  t = le voisin de t par l'arête
qv
tant que t ≠ t0
```

C'est une incohérence entre les réponses à différents prédicats due au calcul arrondi qui provoque des problèmes.
Le petit programme ci contre parcourt les triangles autour de `v`. En fait on débute en `t0=vp0q0`, puis on passe en `t1=vp1q1`, puis en `t2=vp2q2` avec une erreur sur l'orientation de ce triangle, puis on boucle entre ces deux triangles.
Ce résultat est dû à l'incohérence des données qui place `t1` et `t2` du même côté de l'arête `vq1`.

Paradigme du calcul exact. La solution adoptée consiste à évaluer les prédicats de manière exacte et non en faisant confiance au calcul arrondi de la machine. On garantit alors que les théorèmes géométriques usuels seront vérifiés en machine.

Filtres arithmétiques. Évaluer un prédicat consiste en général à déterminer le signe d'une certaine expression polynomiale. Le moyen le plus efficace pour évaluer exactement un prédicat est en fait de l'évaluer de manière approchée, mais en accompagnant cette évaluation d'un calcul d'erreur qui permet le plus souvent de certifier que le signe de la valeur approchée est bien celui de la valeur exacte. Dans les cas où l'erreur ne permet pas de conclure de manière sûre, on utilise une arithmétique exacte plus coûteuse, mais cela arrive suffisamment rarement pour que ce coût se ressente peu sur l'algorithme.

8.4 CGAL (Computational Geometry Algorithm Library)

http://www.cgal.org

CGAL est une bibliothèque de programmes géométriques. Le but de CGAL est de mettre à la disposition du monde industriel et des domaines applicatifs les solutions proposées par les spécialistes de géométrie algorithmique en fournissant une implantation robuste, efficace et flexible pour la plupart des algorithmes et structures de données géométriques.

Historique. CGAL est développée par un consortium de sept équipes de recherches des organismes suivants : INRIA Sophia Antipolis, ETH de Zurich, MPI de Saarbruck, Universités de Tel Aviv, Utrecht, Berlin et Halle. CGAL a fait l'objet de deux projets Européens successifs.

Organisation. CGAL est divisé trois parties : le noyau, la librairie de base et la couche support. Le noyau implante les objets géométriques élémentaires (points, segments, droites, cercles, plans, simplexes etc.) et les prédicats couramment utilisés sur ces objets. Le librairie de base fournit l'essentiel des structures et algorithmes géométriques. La couche support propose différentes arithmétiques, gère les entrées sortie et les interfaces entre CGAL e différents logiciels de visualisation.

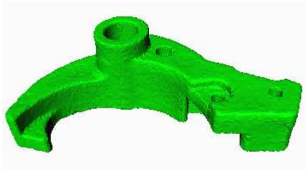
Technologie. CGAL est codée en C++ et utilise largement les mécanismes de programmation générique offerts par ce langage. L'utilisation de classes paramétrées permet d'atteindre les objectifs de robustesse et de flexibilité de CGAL. Par exemple, par simple instantiation d'un paramètre, l'utilisateur peut choisir le type numérique des coordonnées utilisées, ce qui conditionne directement l'arithmétique (approchée, exacte ou exacte filtrée) des prédicats. De même, les structures de données ou algorithmes de la bibliothèque de base sont tous paramétrés par des classes de traits, ce qui permet de les mettre en œuvre sur les objets du noyau de CGAL ou sur des objets propres à l'application.

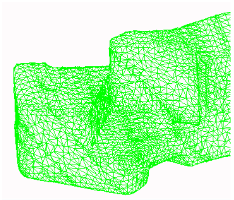
Diffusion. CGAL est telechargée environ 2000 fois par an.
- Enseignement : CGAL est un outil d'enseignement, largement utilisé par les membres du consortium mais aussi dans certaines universités américaines (Polytechnic University, Stanford, Chapell hill, Ohio etc.).
- Recherche : CGAL est utilisé dans différents projets de recherches, dans le domaine de la GIS, cartographie, reconstruction et aussi pour l'études des polymères (voir http://www.cgal.org->Projects Using CGAL).
- Industrie : CGAL est déjà utilisé dans l'industrie, par exemple à l'IFP (Institut Francais de Pétrole), chez Orbotech (Israel), Midland Valley Exploration (UK), Teleatlas (USA) et Noesis (France).

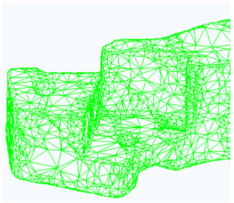
8.5 Reconstruction de surface

Reconstruction

Étant donné un ensemble de points $3D$ pris sur une surface S, la reconstruction de surface consiste à les connecter afin de reconstruire S. Parmi les approches principales, citons les méthodes combinatoires et implicites. Les premières consistent à extraire de la triangulation de Delaunay $3D$ des données un ensemble de triangles représentant la surface à reconstruire. Ces méthodes sont généralement rapides mais peu robustes. Les secondes définissent la surface reconstruite comme le zéro d'une fonction implicite interpolant les données. Bien que plus robustes, ces méthodes sont généralement plus lentes.
Nous avons combiné ces deux approches en définissant la surface à reconstruire comme le zéro d'une fonction implicite définie à partir du diagramme de Voronoï $3D$ des données. Une approximation de cette surface implicite est donnée par un sous-ensemble de la triangulation de Delaunay $3D$. On bénéficie ainsi de la vitesse des méthodes combinatoires et de la robustesse des méthodes implicites. Un exemple de reconstruction pour un vase de 2700 points est présenté ci-contre.

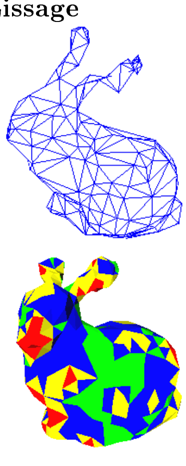






Simplification. Dans l'énoncé précédent, nous avons supposé que l'intégralité du nuage de points devait être utilisé. Mais dans bien des cas cela n'est ni possible ni souhaitable étant donné le volume des données à traiter. À titre d'exemple, la numérisation d'une voiture ou d'une statue peut comporter plusieurs centaines de millions de points. Le problème à résoudre est alors d'effectuer une reconstruction précise en utilisant un sous-ensemble des données uniquement. *Précise* signifie ici que les points omis sont au plus à une certaine tolérance du modèle reconstruit.
Notre méthode de reconstruction se prête naturellement à ce processus de simplification. Supposons un instant qu'une surface implicite ait été reconstruite à partir d'un sous-ensemble des données uniquement. Tous les points non encore considérés qui sont sur cette surface peuvent être omis car ils n'apportent aucune information supplémentaire. Ceci est illustré sur les figures ci-contre, la figure du bas utilisant environ le 1/3 des points de données.

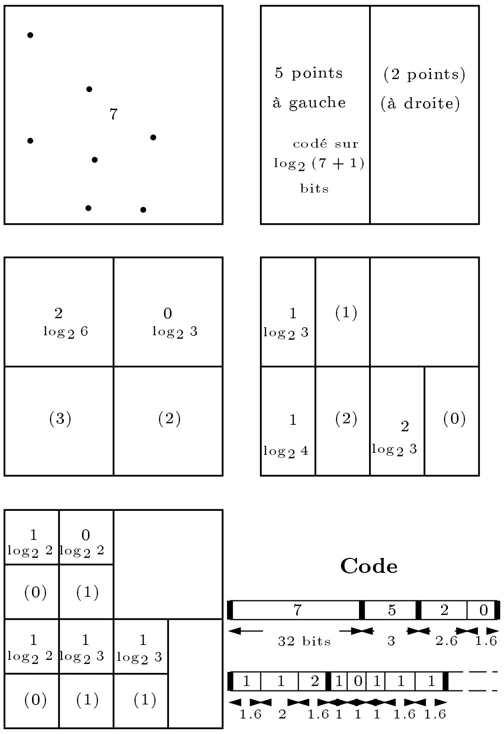
Lissage

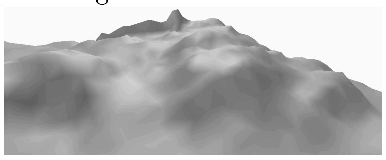


À l'autre extrémité du spectre, se trouvent les jeux de données très éparses constitués de quelques centaines de points. Ceux-ci se présentent dans certaines applications ou l'acquisition est manuelle. Bien que les points soient judicieusement choisis par l'utilisateur, la surface reconstruite à partir de telles données est grossière et généralement inutilisable sans post-traitement et en particulier lissage.
La formulation de la reconstruction en terme de surface implicite permet d'effectuer ce lissage. Comme nous l'avons mentionné, le modèle polyédrique reconstruit correspond à un sous ensemble de la triangulation de Delaunay $3D$. Il suffit donc de mettre à jour celle-ci en insérant de nouveaux points que l'on obtient à partir de la surface implicite. Ce processus est illustré ci-contre sur un modèle de lapin correspondant à 250 points. Le modèle lissé corrige certains défauts du modèle brut, en particulier au niveau des oreilles.

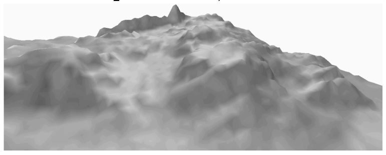
8.6 Codage de modèles numériques de terrains

La technique de compression des points illustrée ci-contre consiste à coder une liste de nombre de points sur un nombre de bits appropriés. On donne d'abord le nombre de points contenu dans un carré contenant tous les points, puis ce carré est découpé en deux et chaque morceau en deux et ainsi de suite récursivement. Pour chaque coupe, on code le nombre de point contenu dans une des deux parties sur un nombre de bit minimal.
L'étude théorique montre que l'on peut ainsi économiser l'information de l'ordre des n points soit $n \log n$ bits.

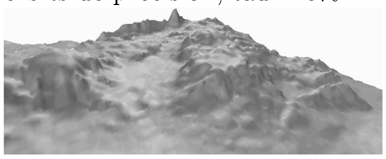




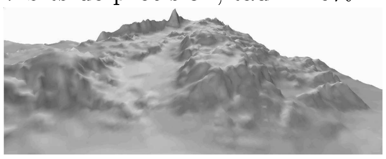
5 bits de précision, taux=3%



6 bits de précision, taux=8%



7 bits de précision, taux=16%



précision maximale de 12 bits, taux=54%

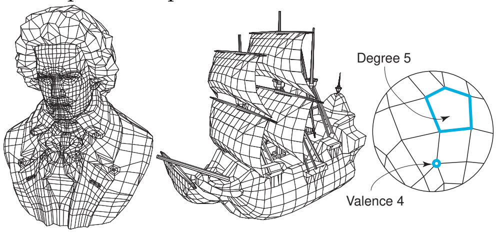
Application aux modèles de terrain

Les images suivantes montrent comment se fait la transmission progressive d'un modèle de terrain à travers notre algorithme. Pour chaque étape de la transmission, nous indiquons le nombre de bits de précision sur les coordonnées des sommets du maillage et le facteur de compression atteint, c'est-à-dire la taille des données brutes originales divisée par la taille des données transmises. La dernière étape de l'algorithme restitue le modèle original (compression sans perte).
Ici, seules les coordonnées des points sont transmises, les points sont reliés par la triangulation de Delaunay de leur projection horizontale.

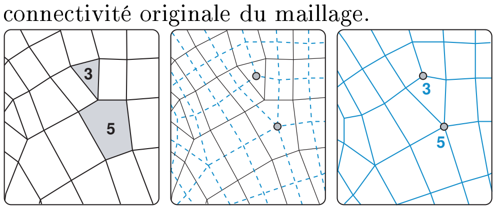
Pour des objets 3D et non des terrains, transmettre la topologie du maillage en plus des coordonnées des points est un problème plus difficile, on peut utiliser le même genre de découpage que celui présenté ici.

8.7 Codage de maillages polygonaux

Un maillage polygonal peut être spécifié par des entités topologiques - les sommets, les arêtes et les faces - et par des quantités géométriques - les positions des sommets.



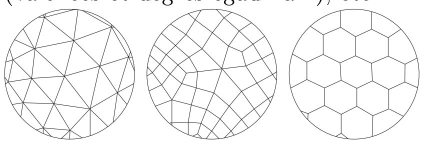
La technique de compression de la connectivité consiste à traverser le maillage dans un ordre canonique tout en énumérant les valences des sommets et les degrés des faces (on appelle valence d'un sommet le nombre d'arêtes incidentes à chaque sommet, et degré d'une face son nombre d'arêtes incidentes). Les valences et degrés sont ensuite compressés séparément par codage arithmétique afin de bénéficier de la régularité présente dans les données. La connectivité d'un maillage primal pouvant être déduite de son dual, et vice et versa, la technique est dite auto-duale puisque l'entropie mesurée est invariante par dualisation. Du côté du décodeur, la liste des valences et des degrés est suffisante pour reconstruire sans perte la connectivité originale du maillage.



Primal mesh — Dualization — Dual mesh

Les maillages polygonaux, à différencier des maillages triangulaires, présentent ainsi une dispersion des degrés des faces en plus d'une dispersion des valences. Pourtant, on peut voir un maillage polygonal comme un maillage triangulaire auquel on aurait retiré des arêtes, donc supprimé une ambiguïté de diagonale et par conséquence réduit l'entropie. Au sens de la théorie de l'information on peut vérifier qu'il est préférable de mailler des objets en utilisant des maillages polygonaux plutôt que triangulaires, même si la dispersion des valences s'en trouve augmentée.

La principale qualité de l'approche valence/degré réside en un taux de compression augmentant avec la régularité des données. Ainsi, un maillage triangulaire régulier (toutes les faces ont un degré 3 et les sommets une valence 6) présente une entropie quasi nulle, idem pour un maillage quadrilatère régulier (valences et degrés égaux à 4), etc.



Analyse théorique On peut calculer le taux maximal exprimé en bit par arête d'un tel algorithme à partir de la formule de l'entropie et de la formule d'Euler qui traduit une limitation de la dispersion des valences et des degrés. Si on écrit r le ratio du nombre de faces par le nombre de sommets, alors on obtient une courbe du taux maximal variant entre $r = 0.5$ et $r = 2$ (respectivement maillages hexagonaux ou triangulaires), avec un pic à 2 bits par arête qui coïncide avec l'entropie déduite de l'énumération des graphes planaires effectuée par Tutte en 1963. On observant la courbe de plus près on constate un taux égal pour $r = 1/r$, ce qui confirme la propriété d'auto-dualité de l'algorithme proposé. On notera aussi que la technique coïncide également pour $r = 2$ avec l'énumération des maillages triangulaires effectuée par Tutte en 1962 (avec un maximum à $\log(256/27) = 3.24$ bits par sommets).