Description des primitives géométriques

Projet PRISME

Action FIABLE, partie 1.

1 Introduction

Ce document décrit les différents tests géométriques nécessaires à la programmation d'algorithmes calculant un arrangement de coniques ou un diagramme de Voronoï.

Dans tous les cas, une fois identifié un prédicat géométrique, les problèmes sont les suivants.

- Savoir répondre de manière exacte et fiable dans les cas difficiles
- Savoir éliminer rapidement les cas faciles.

Les courbes algébriques (non linéaires) interviennent de manières différentes dans ces deux problèmes. Pour l'arrangement de coniques, c'est les données elle mêmes qui sont des courbes algébriques. Pour Voronoï de segments c'est les courbes bissectrices, donc le résultat, qui sont des courbes algébriques (des paraboles).

2 Arrangement de coniques ou d'arcs de coniques

Un arrangement de coniques est le découpage du plan induit par un ensemble de coniques. C'est-à-dire qu'il faut calculer les points d'intersection entre ces différentes coniques et le découpage du plan en différentes régions ainsi défini.

En fait on peut rechercher différents résultats :

- Les points d'intersections (seulement).
- L'arrangement.
- Le cloisonnement vertical (par chaque sommet on trace un rayon vertical, les régions sont ainsi simple, c'est à dire bornée par deux arcs de coniques et deux segments verticaux).

Une méthode classique consiste à découper les coniques en morceaux monotones en x, puis à procéder à un balayage par une droite verticale. Une telle technique nécessite de pouvoir comparer les abscisses de différents points.

2.1 Définition des coniques

Il faut préciser la manière dont sont définies les coniques ou arcs de coniques.

Pou un algorithme de balayage, il est nécessaire de découper les coniques en morceaux x-monotones (les différents morceaux d'une conique ne se coupant qu'à leurs extrémitées).

On pourra adopter la définition d'une conique par son équation cartésienne $a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot xy + d \cdot x + e \cdot y + f = 0$. La définition d'un arc de conique se faisant en ajoutant une inégalité $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ et en spécifiant laquelle des deux solutions avec la verticale est retenue.

Une alternative à cette définition est de définir la conique par des points de passage. Cinq points de passages définissent une conique. Pour un arc de conique, deux des points de passage peuvent définir les extrémités de l'arc.

Une autre possibilité est la représentation par les foyers, ou par foyer et directrice, les extrémitées des arcs pouvant alors être spécifiées par un segment supporté par la directrice).

Dans tous les cas il faut préciser la nature des données primitives (les coefficients des équations ou les coordonnées des points de passage). On pourra dans un premier temps se limiter à des entiers sur 24 bits par exemple.

2.2 Sommets de l'arrangements

- Points à tangente verticale (pour le cloisonement vertical).
- Extrémité d'arc
- Points d'intersection de deux coniques.

2.3 Prédicats

- Localisation point conique. Le point est-il du coté positif ou négatif d'une conique (entière) orientée.
- Comparaison d'abscisses. On est amené à comparer les abscisses de deux sommets de l'arrangements, soit six cas différents.
- Localisation sommet arc. Étant donné un sommet et un arc de conique tel que la droite verticale issue du sommet coupe cet arc, le sommet est-il au dessus ou en dessous de l'arc. Trois cas différent selon la nature du sommet.
- Lancer de rayon vertical. Étant donné un point et deux arcs, quel est le premier arc coupé par un rayon vertical issu du point (peut se déduire de le la comparaison d'abscisses, mais doit être réalisable avec un degré inférieur).

Pour tous les cas, on peut revenir aux données primitives (par exemple les deux arcs définissant un point d'intersection.

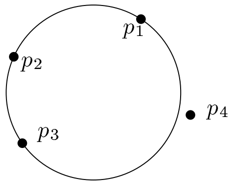
On pourra se demander quel est le degré minimal du test, parmi toutes les expressions possibles choisir celle qui limite l'erreur...

3 Voronoï de segments

Le diagramme de Voronoï de segments est un découpage du plan en régions. La région du plan associée à un segment est l'ensemble des points du plan plus proches de ce segment que de tous les autres. Les arêtes d'un tel diagramme sont des segments de droites portées par la bissectrice de deux segments ou la médiatrice de deux extrémités, ou bien des arcs de paraboles (points équidistant d'un segment et d'une extrémitée).

L'algorithme par balayage requiert des tests de degré assez élevé, les algorithmes incrémentaux se contentent a priori des tests suivants (voir aussi [1])

- 4 points.

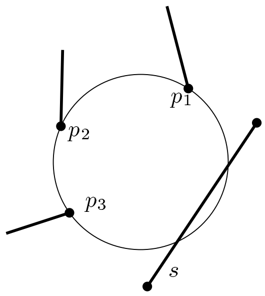


De quel coté du cercle passant par p_1, p_2 et p_3 se trouve le point p_4 ?

Si l'orientation du triangle $p_1p_2p_3$ est connue, ce test se réduit à l'évaluation du signe du déterminant:

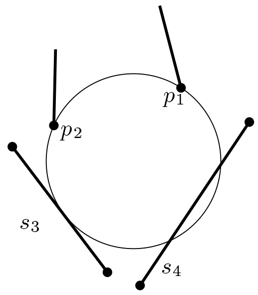
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_3^2 & x_4^2+y_4^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- 3 points et 1 segment



Le cercle passant par p_1, p_2 et p_3 contient-il ou coupe-t-il le segment s?

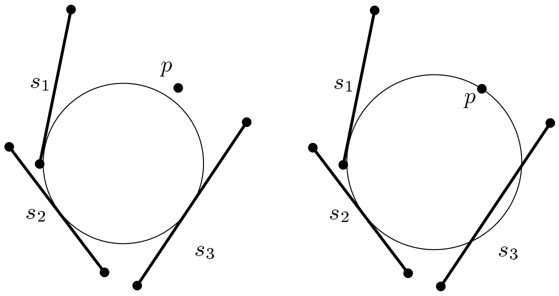
- 2 points et 2 segments.



Le cercle passant par p_1, p_2 et tangent à s_3 contient-il ou coupe-t-il le segment s_4 ?

ou bien de manière équivalente sous certaines hypothèses d'orientation : le cercle passant par p_2 et tangent à s_3 et s_4 contient-il le point p_1 ?

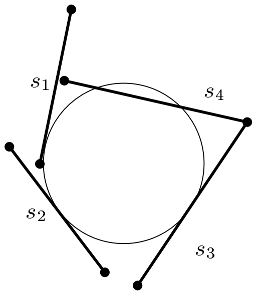
– 1 point et 3 segments (le cas le plus dur).



Le cercle tangent à s_1, s_2 et s_3 contient-il le point p?

ou bien de manière équivalente sous certaines hypothèses d'orientation : le cercle passant par p et tangent à s_1 et s_2 contient-il ou coupe-t-il le segment s_3?

– 4 segments.



Le cercle tangent à s_1, s_2 et s_3 contient-il ou coupe-t-il le segment s_4?

Références

[1] C. Burnikel, K. Mehlhorn, and S. Schirra. How to compute the Voronoi diagram of line segments: Theoretical and experimental results. In *Proc. 2nd Annu. European Sympos. Algorithms*, volume 855 of *Lecture Notes Comput. Sci.*, pages 227–239. Springer-Verlag, 1994.