Réunion 2 - 4 novembre 1997

Ordre du jour : tests d'intersection entre deux arcs de cercles.

2.1 Approche Bézoutien

Bernard et Ioannis, pouvez-vous nous écrire une intro plus complète svp, nous donner des références ? plus généralement, tout complément sur cette section sera fortement appréciée ! merci

2.1.1 Rappels

F_0, F_1, F_2 polynômes de $\mathbb{R}[X, Y]$.

$$\begin{aligned} \theta(F_0, F_1, F_2)(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \frac{\begin{vmatrix} F_0(x_1, x_2) & F_0(y_1, x_2) & F_0(y_1, y_2) \\ F_1(x_1, x_2) & F_1(y_1, x_2) & F_1(y_1, y_2) \\ F_2(x_1, x_2) & F_2(y_1, x_2) & F_2(y_1, y_2) \end{vmatrix}}{(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)} \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \lambda_{\alpha, \beta} \;\; x^\alpha y^\beta \end{aligned}$$

avec les notations habituelles pour des polynômes à plusieurs variables (multi-indices).

Alors le Bézoutien $M(F_0, F_1, F_2)$ est la matrice des $\lambda_{\alpha,\beta}$. Son déterminant est un multiple du résultant.

Voir [Emi95, EM97] *(il suffit de cliquer dans* `http://www.inria.fr/prisme/personnel/teillaud/courbes/courbes.html`*).*

2.1.2 Arcs de cercles

$\longrightarrow$ On suppose qu'un arc de cercle A est donné par
- un cercle C
- une droite L
tous deux représentés par une équation
$+$ signe de L sur les points de l'arc.

Soient $A_1 = (C_1, L_1)$ et $A_2 = (C_2, L_2)$ deux arcs. Alors soit le Bézoutien $M(L_1 - z, C_1, C_2)$ de $L_1 - z, C_1, C_2$. $det(M(L_1 - z, C_1, C_2))$ est noté $D(z)$. $D(z) = 0$ ssi il existe un point p tq :

$$\begin{cases} L_1(p) - z = 0 \\ C_1(p) = 0 \\ C_2(p) = 0 \end{cases}$$

$D(z)$ est un polynôme de degré 2 en z, il a donc 2 racines z' et z'' correspondant aux 2 points p', p'' intersection de C_1 et C_2. Ensuite on veut connaître les signes de $L_1(p')$ et $L_1(p'')$ (c'est-à-dire exactement les signes de z' et z''), pour savoir combien d'intersections ont lieu sur l'arc de cercle A_1.

On répètera l'opération pour L_2, puis pour $L_1 + zL_2$. On obtient ainsi un régionnement du plan permettant de décider combien de fois se coupent les 2 arcs.

On doit donc regarder les signes des coefficients du polynôme $D(z)$.

$D(z)$ est un polynôme de degré 2 dont les coefficients sont de degré 6 en les coefficients des 2 droites et des 2 cercles. Bernard l'a calculé avec *Maple*, ils ont une expression compliquée. $M(z)$ est une matrice 3×3 dont les coefficients sont de degré 3. Peut-être qu'en travaillant sur $M(z)$, on pourrait trouver une façon plus simple de connaître les signes des coefficients de D ?

$\longrightarrow$ On peut aussi considérer la matrice de multiplication de L_1 dans le quotient $\mathbb{R}[X,Y]/(C_1, C_2)$. Ses valeurs propres sont les valeurs de L_1 en les racines de $C_1 = C_2 = 0$.

$\longrightarrow$ Si C_1 est donné par une équation paramétrique en t et l'arc A_1 par un intervalle pour t, et si A_2 est donné comme précedemment par (C_2, L_2), il suffit de reporter l'équation paramétrique dans l'équation implicite pour trouver le polynôme (de degré 3 en t) dont les racines donneront les points d'intersection des 2 cercles.

Il faut ensuite trouver le nombre de racines de ce polynôme telles que $L_2 \geq 0$. La méthode de Sturm permet de répondre.

Le degré des coefficients des polynômes de la suite de Sturm semble être 8.

$\longrightarrow$ Si les 2 arcs sont donnés par une équation paramétrique et un intervalle chacun, on cherche à compter les solutions d'un système d'équations polynomiales en 2 variables t', t'', dans un pavé de $\mathbb{R}^2$. On pourrait utiliser la méthode de Hermite, qui généralise celle de Sturm. Elle revient à calculer la signature d'une matrice symétrique.

2.1.3 Avantages de ces méthodes

Leur caractère très général. On pourrait les utiliser pour des coniques quelconques. $\circ$ *Olivier :* L'utilisation d'equations non normalisées pour les cercles ne change pas le degré 6.$\circ$

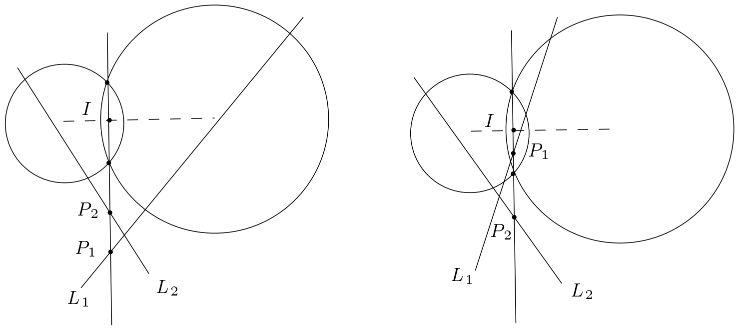
2.2 Une approche spécifique au cas des cercles

Soient$A_1 = (C_1, L_1)$ et $A_2 = (C_2, L_2)$ deux arcs.

On considère l'arrangement formé par les droites L_1, L_2 et l'axe radical de C_1 et C_2. Notre problème revient à localiser dans C_1 et C_2 les 2 points d'intersection de L_1 et de L_2 avec l'axe radical.

Pour cela on calcule les puissances de ces 2 points par rapport à C_1 (les points nous intéressant étant par définition sur l'axe radical, ils sont à l'intérieur de C_2 *ssi* ils sont à l'intérieur de C_1). Rappel : la puissance de M par rapport à

C(centre O, rayon r) est $OM^2 - r^2$, son signe permet de déterminer si M est à l'intérieur ou à l'extérieur de C.
Ceci nous permet de savoir si les points d'intersection entre les cercles sont du même côté de L_1 et L_2 (figure 1).



(a) (b)

(a) P_1 et P_2 sont à l'extérieur des cercles : les points d'intersection entre C_1 et C_2 sont tous les deux du même côté par rapport à L_1 et L_2.
(b) P_1 est à l'intérieur des cercles : les points d'intersection entre C_1 et C_2 sont situés de part et d'autre de L_1.

Figure 1: Méthode utilisant l'axe radical

Lorsqu'on sait que les points d'intersection entre les cercles sont du même côté de L_1 et L_2, il reste à déterminer s'ils sont "du bon côté" de L_1 et L_2. Pour cela, on peut par exemple regarder si le milieu I des points d'intersection (= le point d'intersection entre l'axe radical et la droite des centres des cercles) est "du bon côté" de L_1 et L_2. Ce qui revient également à trier les points P_1, P_2 et I sur l'axe radical.

Cette méthode, comme la précédente, fait intervenir des calculs de degré 6 en les données. Elle est plus simple (c-a-d ne demande aucune connaissance algébrique particulière) mais non généralisable aux coniques quelconques.
∘*Olivier :* De plus les performances de cette méthode se dégradent si les équations des cercles ne sont pas normalisées : on passe alors dans un système où les coefficients d'équations de droite deviennent de degré 2, ce qui se traduit par un degré 8 ou 10 au final (selon que seul l'axe radical, ou également L_1 et L_2 ont des coefficients de degré 2). ∘

∘*Bernard :* On peut encore regarder cette méthode sous l'angle des Bézoutiens : localiser par rapport aux cercles le point d'intersection de L_1 avec l'axe radical revient à regarder le Bézoutien $det(M(L_1, C_1 - C_2, C_1 - z))$. De même on regarde $det(M(L_2, C_1 - C_2, C_1 - z))$ pour L_2. ∘

2.3 Une représentation des arcs de cercle "stable par intersection"

On cherche un mode de représentation des arcs pouvant représenter à la fois des arcs donnés en entrée et des arcs intervenant dans les calculs d'arrangement de cercles ou d'arcs de cercle.

Soit un arc de cercle défini par l'intersection de 3 cercles (figure 2). La

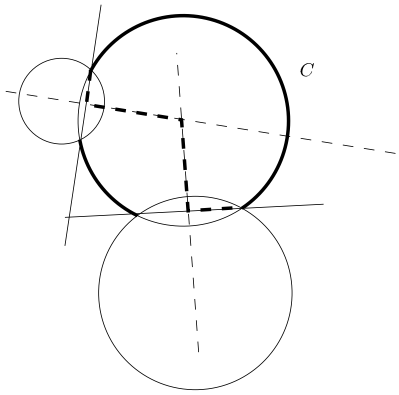


Figure 2: Représentation d'un arc de cercle par 4 droites et 1 cercle

donnée des deux axes radicaux et des deux droites des centres, avec une orientation pour chacune, suffit à distinguer un arc de cercle sur C parmi les 4 arcs potentiels. De manière équivalente, on peut donner la ligne polygonale en pointillé gras sur la figure.

Si on considère deux arcs donnés ainsi, les nouveaux arcs définis par leurs intersections peuvent être représentés eux aussi de la même façon. La propriété recherchée de stabilité de la représentation est vérifiée.

Cette représentation permet d'utiliser la méthode 2.2.

2.4 Divers

Le cas particulier des "congés" a été rapidement envisagé.

References

[EM97] I.Z. Emiris and B. Mourrain. Matrices in elimination theory. *J. Symbolic Computation, Special Issue on Elimination*, 1997. Submitted.

[Emi95] I.Z. Emiris. Le résultant : théorie et applications, 1995. *Cours, Journées de géométrie algorithmique, Le Bessat.*