
Développement d'une méthode implicite sans Matrice pour la simulation 2D/3D des écoulements compressibles et faiblement compressibles en maillages non-structurés

Thèse soutenue par

Thibaud KLOCZKO

le 15 mars 2006

devant le jury composé de:

MM. Alberto BECCANTINI	Ingénieur-Docteur au CEA Saclay
Christophe CORRE	Maître de conférences à l'ENSAM Paris
Erik DICK	Professeur à l'Université de Ghent
Bruno DUBROCA	Professeur associé à l'Université de Bordeaux I
Hervé GUILLARD	Directeur de recherche à l'INRIA Sophia-Antipolis
Alain LERAT	Professeur à l'ENSAM Paris

CADRE ET ENJEUX DU TRAVAIL DE THESE

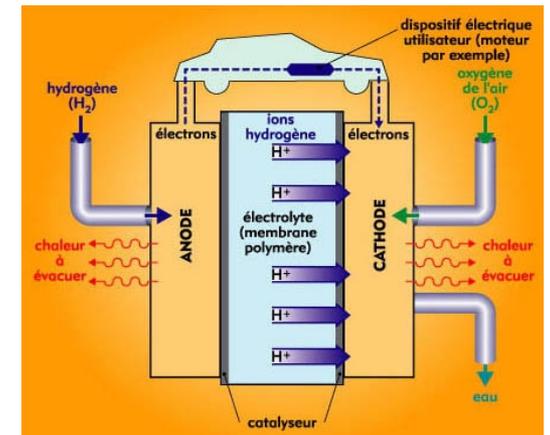
α . Contexte du travail de thèse : le risque hydrogène

L'hydrogène aujourd'hui et demain

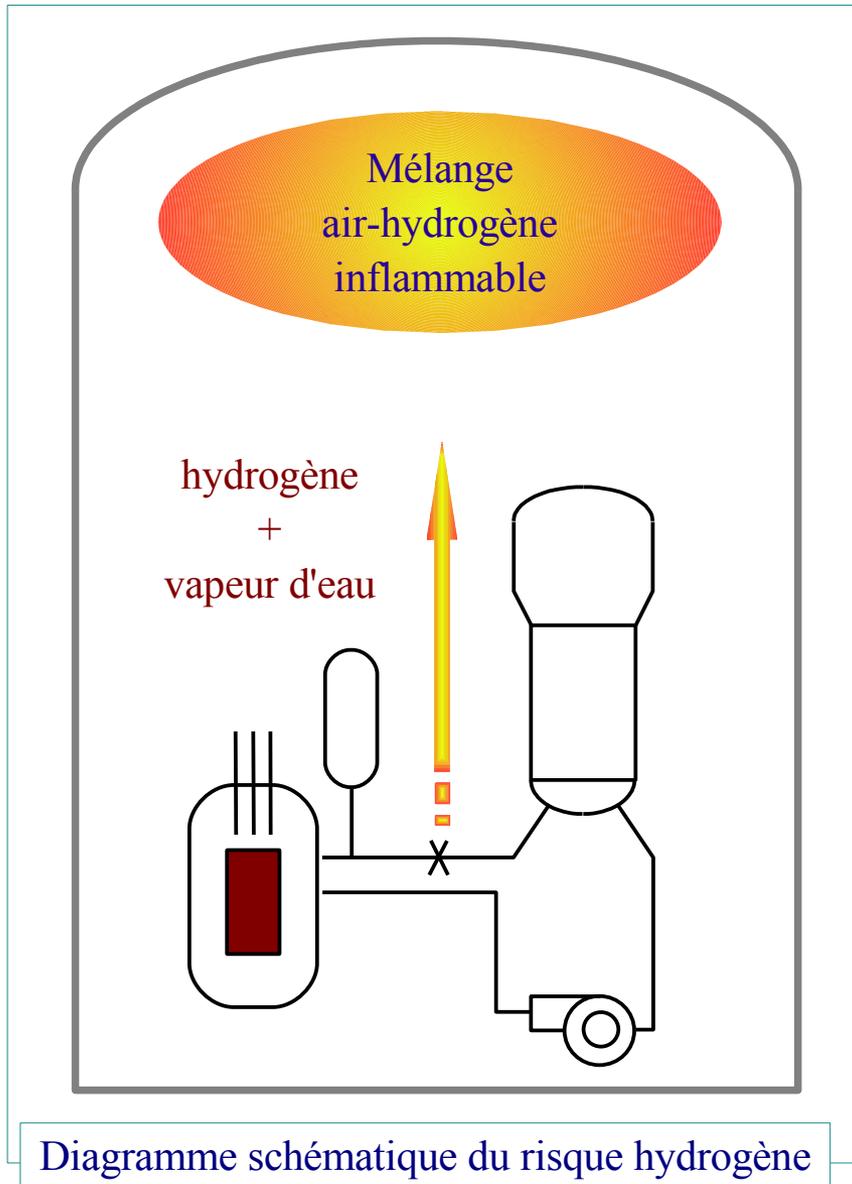
- Installations industrielles
 - Réacteurs à eau pressurisée (REP ou PWR)
 - Chambre à vide de réacteurs à fusion (ITER)
 - Réseaux de distribution (pipeline, station service)
- Applications domestiques
 - Véhicules à hydrogène (réservoir, garage)
 - Pile à combustible (portables, immeubles)

Garantir l'utilisation sûre de ce vecteur d'énergie

- Réseau européen Hysafe
 - Etudes expérimentales
 - Simulations numériques



β. Scénario type d'un accident grave dans une enceinte REP



- Brèche du circuit primaire
 - Relâchement de vapeur d'eau
 - Pressurisation de l'enceinte
- Production d'hydrogène
 - Réaction de la vapeur avec le zircaloy des gaines
 - Relâchement d'hydrogène dans l'enceinte
- Nuage *Air - Hydrogène* inflammable
 - Combustion du mélange (déflagration/détonation)
 - Endommagement de l'enceinte de confinement

*Développement par le LTMF
d'un code de calcul pour
la thermohydraulique enceinte
(CAST3M)*

Complexité des écoulements thermo-hydrauliques

- Régimes d'écoulements variés
 - × Quasi-incompressible (phase de distribution du mélange)
 - × Fortement compressible (détonation)
 - Méthodes numériques versatiles
- Phénomènes instationnaires
 - × Pressurisation d'enceinte
- Géométries complexes et de grande taille
 - Maillages non-structurés
 - Méthodes numériques peu gourmandes en place mémoire
- Ecoulements multi-espèces

Nécessité d'un outil numérique satisfaisant à ces exigences ...

δ. Outil numérique actuellement disponible

... le code *CAST3M*

Résolution des équations de Navier-Stokes compressibles

- Solveurs de Riemann approchés
 - × Schémas de Roe, AUSM+, Rusanov
- Versions **préconditionnées** pour les écoulements bas-Mach
 - × Roe-Turkel, Rusanov-Turkel, AUSM+(P)
- Reconstruction à l'ordre deux de type Barth-Jespersen
- Approximation linéaire exacte des flux visqueux de type Noh (méthode diamant)
- Accélération de convergence par un **traitement implicite de type Newton-Krylov**

*Faiblesse de l'algorithme implicite **Newton-Krylov***

- **Inversion et stockage coûteux de matrices**
- **Temps de calcul rédhibitoires**

ε. Objectifs du travail de thèse

Développement d'un traitement implicite alternatif

- Réduction importante du **stockage mémoire**
- Amélioration des **performances en temps de calcul**

Contraintes supplémentaires

- Propriétés valables pour **toutes les gammes de nombre de Mach**
- Propriétés valables aussi **en instationnaire**
- Application à des **maillages non-structurés**

*Développement d'un traitement implicite **efficace** pour la résolution des équations d'Euler et de Navier-Stokes pour **tout régime d'écoulement***

ζ. Traitements implicites peu coûteux : état de l'art

Traitements implicites visant à la réduction du stockage mémoire

- Technique de **diagonalisation** pour le compressible

- × Factorisation approchée ou ADI (Pulliam & Chaussee, 1981)

- × Extension bas-Mach instationnaire (Buelow, Pulliam, Pandya, 2003)

Place mémoire insuffisamment réduite ⇒ *Traitements implicites plus simples*

- Méthodes **sans Matrice** pour le compressible

- × Technique de lissage des résidus (Lerat, Daru, Sidès, 1982)

- × Application aux schémas décentrés (Jameson & Yoon, 1987)

- × Méthode sans Matrice (Löhner *et al.* 1998, 2001)

- Extension pour les cas bas-Mach instationnaires

→ **Sujet de la présente thèse**

η . Préconditionnement bas-Mach : état de l'art

Déficiences des solveurs compressibles à faible nombre de Mach

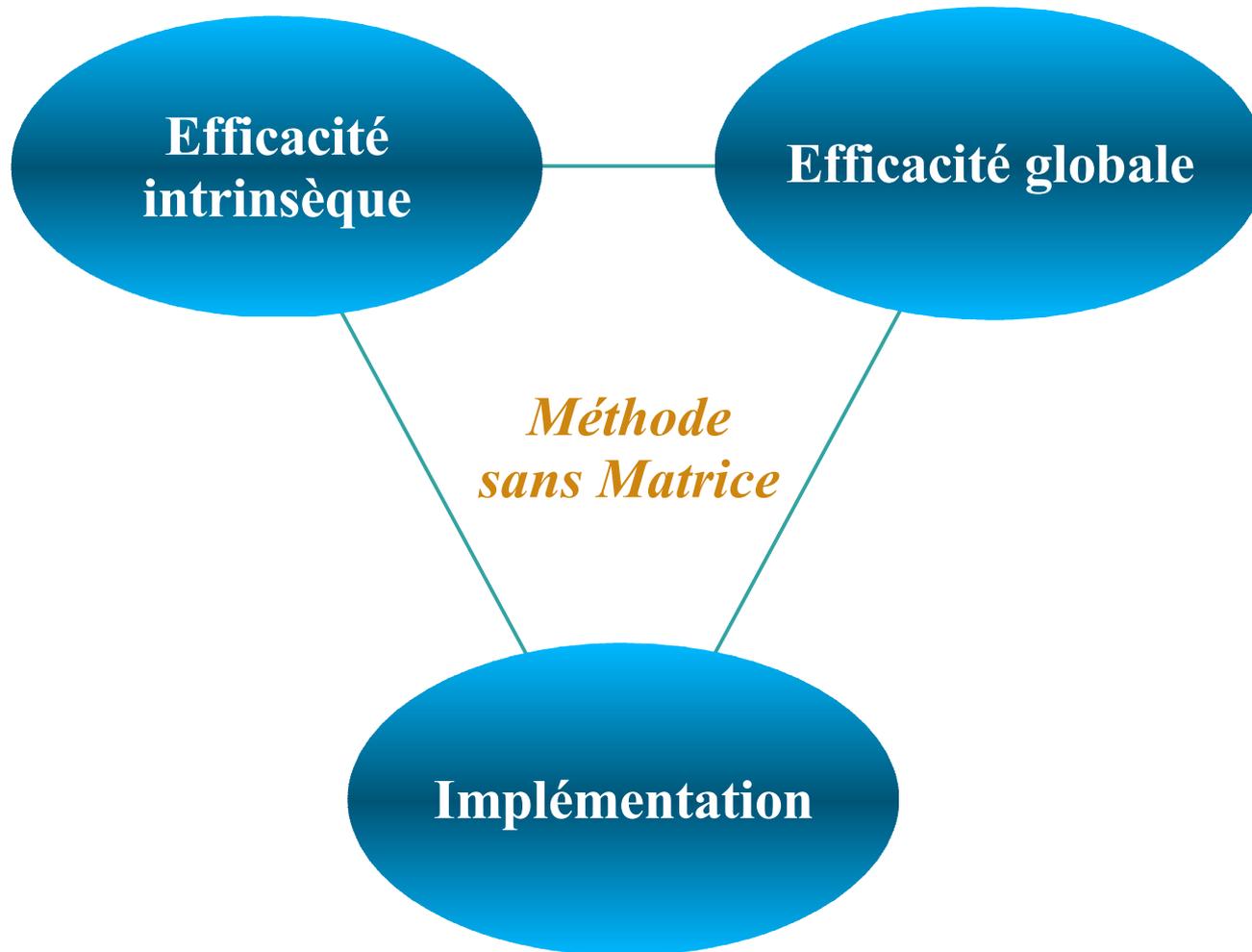
- Mauvais conditionnement du système \Rightarrow Efficacité médiocre
- Surdissipation des schémas décentrés \Rightarrow Précision médiocre

Conserver l'efficacité et la précision des solveurs compressibles à bas-Mach

- Préconditionnement bas-Mach \Rightarrow **Conservation de l'efficacité**
 - × Equations d'Euler (Turkel, 1987 ; Van Leer, 1991)
 - × Equations de Navier-Stokes (Choi & Merkle, 1993 ; Weiss & Smith, 1995)
 - × Ecoulements instationnaires (Venkateswaran & Merkle, 1999)
- Schémas décentrés preconditionnés \Rightarrow **Conservation de la précision**
 - × Roe-Turkel, AUSM+(P) (Guillard & Viozat, 1997 ; Edwards & Liou, 1998)

Singularité des preconditionneurs à $M=0$

- Valeur de coupure ou "cut-off" \Rightarrow **Délicat à définir dans tous les cas**



I- Construction d'une phase implicite sans Matrice **à faible coût unitaire** pour tout régime d'écoulement

II- Analyse de **l'efficacité intrinsèque** de cette méthode pour tout régime d'écoulement

- × Étude de l'influence du "cut-off" bas-Mach
- × Démonstration de **l'efficacité globale**

III- Implémentation de la méthode sans Matrice dans CAST3M

- × **Comparaisons** avec les techniques existantes

PHASE IMPLICITE SANS MATRICE
A FAIBLE COÛT UNITAIRE
POUR TOUT REGIME D'ECOULEMENT

I-1. Schéma explicite et notations

Système de lois de conservation :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{p=1}^d \frac{\partial f_p}{\partial x_p} = 0$$

w : vecteur des variables conservatives

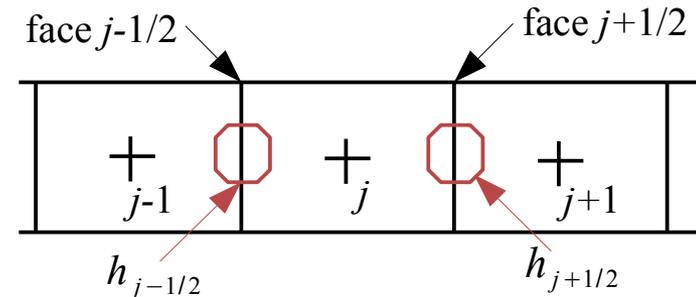
f : vecteur des flux physiques

d : nombre de dimensions du problème

Présentation 1D : $\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ avec $A = \frac{\partial f}{\partial w}$ matrice jacobienne des flux physiques

Schéma explicite :

$$\frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\Delta t} + \frac{h_{j+1/2}^n - h_{j-1/2}^n}{\delta x} = 0$$



où h est le flux numérique approchant le flux physique f aux faces de la cellule j

$$\Delta w_j^{\text{exp}} = -\Delta t \cdot \mathbf{R}_j^n = -\frac{\Delta t}{\delta x} (h_{j+1/2}^n - h_{j-1/2}^n) = -\sigma (\delta h)_j^n$$

$\sigma = \frac{\Delta t}{\delta x}$

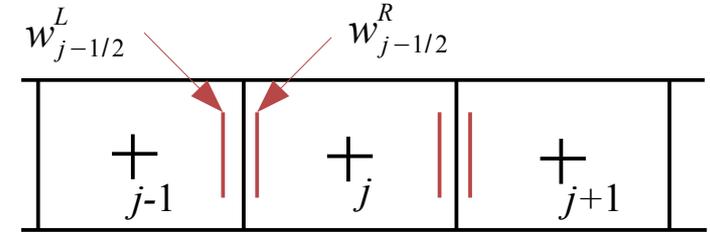
Opérateur de différence

$$\delta \phi_j = \phi_{j+1/2} - \phi_{j-1/2}$$

résidu explicite

I-2. Construction d'une phase implicite bloc

Implicitation : $\Delta w_j^n + \sigma (\delta h)_j^{n+1} = 0$



Linéarisation :

$$h_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = h^{n+1}(w_{j-\frac{1}{2}}^L, w_{j-\frac{1}{2}}^R) = h^n(w_{j-\frac{1}{2}}^L, w_{j-\frac{1}{2}}^R) + (J^L)_{j-\frac{1}{2}}^n \cdot \Delta w_L^n + (J^R)_{j-\frac{1}{2}}^n \cdot \Delta w_R^n$$

avec $J^L = \frac{\partial h(w^L, w^R)}{\partial w^L} = \frac{1}{2}(A + |A^{Roe}|)$ et $J^R = \frac{\partial h(w^L, w^R)}{\partial w^R} = \frac{1}{2}(A - |A^{Roe}|)$

Phase implicite bloc :

$$H \cdot \Delta w_j^n = -\Delta t \cdot R_j^n$$

avec $H \cdot \Delta w_j^n = \left(I_d - \sigma J_{j-\frac{1}{2}}^R + \sigma J_{j+\frac{1}{2}}^L \right)^n \Delta w_j^n - \sigma (J^L)_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta w_{j-1}^n + \sigma (J^R)_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta w_{j+1}^n$

bloc matriciel
bloc matriciel
bloc matriciel

D
 L_1
 U_1

I-3. Inconvénients d'une phase implicite bloc

Système linéaire : $M \cdot [\Delta w^n] = [\Delta w^{\text{exp}}]$

$$M = \begin{bmatrix} x & x & \cdot & x & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \cdot & x & \cdot & \cdot \\ \cdot & x & x & x & \cdot & x & \cdot \\ L_2 & \cdot & L_1 & D & U_1 & \cdot & U_2 \\ \cdot & x & \cdot & x & x & x & \cdot \\ \cdot & \cdot & x & \cdot & x & x & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & x & \cdot & x & x \end{bmatrix} \quad [\Delta w^n] = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \Delta w_{j-1}^n \\ \Delta w_j^n \\ \Delta w_{j+1}^n \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad [\Delta w^{\text{exp}}] = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ -\Delta t \cdot R_{j-1}^n \\ -\Delta t \cdot R_j^n \\ -\Delta t \cdot R_{j+1}^n \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Résolution : \times 1^{ère} étape : évaluation et stockage des jacobiens de flux numériques

\times 2^{ème} étape : résolution du système linéaire

➤ Stockage mémoire et temps CPU rédhibitoires pour les maillages de grande taille.

➤ Nécessité de simplifier la phase implicite

Système linéaire simplifié : $\tilde{M} \cdot [\Delta w^n] = [\Delta w^{\text{exp}}]$ avec $[\Delta w^n] \rightarrow [0]$

I-4. Construction d'une phase implicite sans Matrice

Implicitation : $\Delta w_j^n + \sigma (\delta h)_j^{n+1} = 0$

Linéarisation :
$$h^{n+1}(w^L, w^R) = h^n(w^L, w^R) + \underbrace{h^{n+1}(w^L, w^R) - h^n(w^L, w^R)}_{= \Delta h^n}$$

Implicitation inconsistante : $\Delta h^n \rightarrow \Delta h^{RUSANOV}$ (Jameson & Yoon)

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta h^{RUSANOV} = 0 \Rightarrow$ ce choix inconsistant n'affecte pas la précision

Flux de Rusanov :

$$\Delta h_{j+\frac{1}{2}}^{RUSANOV} = (\mu \Delta f)_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2} \rho_{j+\frac{1}{2}}^n (\delta \Delta w)_{j+\frac{1}{2}}^n \quad \text{où } \rho = \rho(A) \text{ rayon spectral de } A = \frac{\partial f}{\partial w}$$

Opérateur de moyenne

$$\mu \phi_{j+1/2} = \frac{1}{2} (\phi_{j+1} + \phi_j)$$

I-5. Caractéristiques de la phase implicite sans Matrice

Phase implicite sans Matrice :

$$\left(1 - \frac{\sigma}{2} \rho_{j-\frac{1}{2}} + \frac{\sigma}{2} \rho_{j+\frac{1}{2}}\right)^n \Delta w_j^n - \frac{\sigma}{2} \rho_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta w_{j-1}^n + \frac{\sigma}{2} \rho_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta w_{j+1}^n + \sigma \delta \mu \Delta f_j^n = -\Delta t \cdot R_j^n$$

coefficient scalaire D coefficient scalaire L_1 Coefficient scalaire U_1 $\sigma \delta \mu \Delta f_j^n$: incréments de flux

Grâce à l'évaluation de Δh via le schéma de Rusanov, il n'y a plus de matrice jacobienne impliquée dans le LHS

⇒ Justification de l'appellation "sans Matrice"

Résoudre un système linéaire pour lequel la phase implicite contient des incréments de vecteurs Δw^n et des incréments de flux Δf^n

Garantir une mise en oeuvre aisée en maillages non-structurés

I-6. Résolution de la phase implicite sans Matrice

Relaxation de type Jacobi par point :

Termes extradiagonaux et incréments de flux relaxés

$$D \Delta w_j^{(l+1)} = -\Delta t \cdot R_j^n - L_1 \Delta w_{j-1}^{(l)} - U_1 \Delta w_{j+1}^{(l)} - \sigma \delta \mu \Delta f_j^{(l)}$$

Principe de l'algorithme PJ (Point Jacobi)

$$\left\{ \begin{array}{l} l=0 \ ; \ \Delta w^{(0)}=0 \ ; \ \Delta f^{(0)}=0 \\ \left[\begin{array}{l} l = 0 \rightarrow l_{max} \\ \Delta w_j^{(l+1)} = \frac{1}{D} \left[-\Delta t \cdot R_j^n - L_1 \Delta w_{j-1}^{(l)} - U_1 \Delta w_{j+1}^{(l)} - \sigma \delta \mu \Delta f_j^{(l)} \right] \end{array} \right. \\ l=l_{max} \ ; \ \Delta w^n = \Delta w^{(l_{max})} \end{array} \right.$$

- Pas de stockage de matrices Jacobiennes
- Pas d'inversion matricielle
- Faible efficacité intrinsèque de la procédure PJ

I-7. Résolution de la phase implicite sans Matrice (suite)

Relaxation de type Symmetric Gauss-Seidel (SGS) :

Utilisation des états déjà évalués au cours du balayage + balayage "aller-retour"

$$\left\{ \begin{array}{l}
 l=0 \ ; \ \Delta w^{(0)}=0 \ ; \ \Delta f^{(0)}=0 \\
 \left[\begin{array}{l}
 l = 0 \rightarrow l_{max} \\
 \left[\begin{array}{l}
 j = 1 \rightarrow j_{max} \\
 \Delta w_j^{(l+\frac{1}{2})} = \frac{1}{D} \left[-\Delta t \cdot R_j^n - L_1 \Delta w_{j-1}^{(l+\frac{1}{2})} - U_1 \Delta w_{j+1}^{(l)} + \frac{1}{2} \sigma \Delta f_{j-1}^{(l+\frac{1}{2})} - \frac{1}{2} \sigma \Delta f_{j+1}^{(l)} \right] \\
 j = j_{max} \rightarrow 1 \\
 \Delta w_j^{(l+1)} = \frac{1}{D} \left[-\Delta t \cdot R_j^n - L_1 \Delta w_{j-1}^{(l+\frac{1}{2})} - U_1 \Delta w_{j+1}^{(l+1)} + \frac{1}{2} \sigma \Delta f_{j-1}^{(l+\frac{1}{2})} - \frac{1}{2} \sigma \Delta f_{j+1}^{(l+1)} \right] \\
 j = j_{max} \rightarrow 1 \\
 \Delta w_j^{(l+1)} = \frac{1}{D} \left[-\Delta t \cdot R_j^n - L_1 \Delta w_{j-1}^{(l+\frac{1}{2})} - U_1 \Delta w_{j+1}^{(l+1)} + \frac{1}{2} \sigma \Delta f_{j-1}^{(l+\frac{1}{2})} - \frac{1}{2} \sigma \Delta f_{j+1}^{(l+1)} \right] \\
 l=l_{max} \ ; \ \Delta w^n = \Delta w^{(l_{max})}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

➤ Amélioration de l'efficacité intrinsèque

➤ Surcoût lié à l'actualisation

I-8. Extension aux équations de Navier-Stokes

Equations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{p=1}^d \frac{\partial f_p^E}{\partial x_p} = \sum_{p=1}^d \frac{\partial f_p^V}{\partial x_p}$$

w : vecteur des variables conservatives

f^E : vecteur des flux non-visqueux

f^V : vecteur des flux visqueux

d : nombre de dimensions du problème

Présentation 1D :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f^E(w)}{\partial x} - \frac{\partial f^V(w, w_x)}{\partial x} = 0$$

Discrétisation centrée simple des flux visqueux :

$$h^V = f^V\left(\mu w, \frac{\delta w}{\delta x}\right)$$

Implication des flux visqueux :

$$(h^V)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \approx (h^V)_{j+\frac{1}{2}}^n + \frac{A_1^V}{\delta x} \delta \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n \quad \text{avec} \quad A_1^V = \frac{\partial f^V}{\partial w_x}$$

I-9. Simplification rayon spectral visqueux

Matrice A_1^V définie positive d'où : $\frac{A_1^V}{\delta x} \rightarrow \rho^V = \frac{\rho(A_1^V)}{\delta x}$

$$(h^V)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \approx (h^V)_{j+\frac{1}{2}}^n + \rho_{j+\frac{1}{2}}^V \delta \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n$$

Phase implicite sans Matrice formellement inchangée :

$$D \Delta w_j^n + L_1 \Delta w_{j-1}^n + U_1 \Delta w_{j+1}^n = -\Delta t \cdot R_j^n - \sigma \delta \mu \Delta f_j^n$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = -\sigma \left(\frac{1}{2} \rho^E + \rho^V \right)_{j-\frac{1}{2}}^n \\ U_1 = -\sigma \left(\frac{1}{2} \rho^E + \rho^V \right)_{j+\frac{1}{2}}^n \\ D = 1 - L_1 - U_1 \end{array} \right.$$

- Pas de stockage des Jacobiens visqueux
- Résolution PJ ou SGS

I-10. Extension aux écoulements instationnaires

Méthode du pas-de-temps dual :

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{p=1}^d \frac{\partial f_p^E}{\partial x_p} = \sum_{p=1}^d \frac{\partial f_p^V}{\partial x_p}$$

t : temps physique

τ : temps fictif ou dual

Discrétisation pas-de-temps dual :

$$\frac{w_j^{n,m+1} - w_j^{n,m}}{\Delta \tau_j^{n,m}} + \frac{3 w_j^{n,m+1} - 4 w_j^n + w_j^{n-1}}{2 \Delta t} + \frac{\delta (h^E - h^V)_j^{n,m+1}}{\delta x} = 0$$

Processus pas-de-temps dual :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Boucle en temps physique : } n = 1..N \\ \left[\begin{array}{l} \text{Boucle en temps fictif : } m = 1..M \\ \text{Tant que } w^{n,m+1} - w^{n,m} > \varepsilon \\ w^{n,m+1} = F(w^{n,m}, w^n, w^{n-1}) \end{array} \right. \\ w^{n+1} = w^{n,m+1} \quad \text{et} \quad w^{n,m+1} - w^{n,m} = 0 \end{array} \right.$$

- Précision à l'ordre 2 en temps physique
- Implication en temps fictif

I-11. Extension aux écoulements instationnaires (suite)

Implicitation en temps fictif :

$$\text{flux numérique non visqueux : } (h^E)_{j+\frac{1}{2}}^{n,m+1} \approx (h^E)_{j+\frac{1}{2}}^{n,m} + (\mu \Delta f^E)_{j+\frac{1}{2}}^{n,m} - \frac{1}{2} \rho_{j+\frac{1}{2}}^E \delta \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n,m}$$

$$\text{flux numérique visqueux : } (h^V)_{j+\frac{1}{2}}^{n,m+1} \approx (h^V)_{j+\frac{1}{2}}^{n,m} + \rho_{j+\frac{1}{2}}^V \delta \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n,m}$$

Phase implicite sans Matrice formellement inchangée :

$$D \Delta w_j^{n,m} + L_1 \Delta w_{j-1}^{n,m} + U_1 \Delta w_{j+1}^{n,m} = -\Delta \tau_j^{n,m} \cdot R_j^{n,m} - \sigma \delta \mu \Delta f_j^{n,m}$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} L_1 = -\sigma \left(\frac{1}{2} \rho^E + \rho^V \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n,m} \\ U_1 = -\sigma \left(\frac{1}{2} \rho^E + \rho^V \right)_{j+\frac{1}{2}}^{n,m} \\ D = \left(1 + \frac{3}{2} \lambda \right) - L_1 - U_1 \\ R_j^{n,m} = \frac{3 w_j^{n,m} - 4 w_j^n + w_j^{n-1}}{2 \Delta t} + \frac{\delta (h^E - h^V)_j^{n,m}}{\delta x} \end{array} \right.$$

➤ Maintien d'un faible coût unitaire

$$\text{et } \sigma = \frac{\Delta \tau}{\delta x} \quad \lambda = \frac{\Delta \tau}{\Delta t}$$

Comment maintenir un faible coût unitaire en présence du préconditionnement bas-Mach ?

I-12. Préconditionnement bas-Mach des équations

Equations preconditionnées :

$$P^{-1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{p=1}^d \frac{\partial f_p^E}{\partial x_p} = \sum_{p=1}^d \frac{\partial f_p^V}{\partial x_p}$$

P : matrice de preconditionnement

- Amélioration du conditionnement du système
- Ajustement correct de la dissipation numérique

Préconditionneur de Turkel :

$$P = I_d + (\beta^2 - 1) Q$$

avec

$$Q = \frac{\gamma - 1}{c^2} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ H \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{u^2 + v^2}{2}; -u; -v; 1 \right)$$

Paramètre bas-Mach

$$\Rightarrow \beta^2 = \min \left[\max(M^2, \beta_E^2, \beta_V^2, \beta_U^2), 1 \right]$$

Cut-off Euler

Cut-off visqueux

Cut-off instationnaire

I-13. Perte du caractère sans Matrice

Dissipation numérique préconditionnée :

$$\rho(A^E) \rightarrow \rho(P \cdot A^E) \cdot P^{-1} = \tilde{\rho}^E \cdot P^{-1}$$

La nouvelle phase implicite n'est plus sans Matrice :

$$D \Delta w_j^{n,m} + L_1 \Delta w_{j-1}^{n,m} + U_1 \Delta w_{j+1}^{n,m} = -\Delta \tau_j^{n,m} \cdot R_j^{n,m} - \sigma \delta \mu \Delta f_j^{n,m}$$

$$\text{avec } \begin{cases} L_1 = -\sigma \left(\frac{1}{2} \tilde{\rho}^E \cdot P^{-1} + \rho^V \cdot I_d \right)_{j-\frac{1}{2}}^{n,m} \\ U_1 = -\sigma \left(\frac{1}{2} \tilde{\rho}^E \cdot P^{-1} + \rho^V \cdot I_d \right)_{j+\frac{1}{2}}^{n,m} \\ D = (P_j^{-1} + \frac{3}{2} \lambda \cdot I_d) - L_1 - U_1 \end{cases} \Rightarrow \text{Coefficients matriciels}$$

Application de la relaxation PJ :

$$D \Delta w_j^{(l+1)} = -\Delta t \cdot R_j^{n,m} - L_1 \Delta w_{j-1}^{(l)} - U_1 \Delta w_{j+1}^{(l)} - \sigma \delta \mu \Delta f_j^{(l)}$$

➤ Inversion du coefficient matriciel D à moindre coût

I-14. Optimisation du traitement implicite sans Matrice

Utilisation des propriétés spécifiques de la matrice Q : $Q^2 = Q$ $Q = \phi^T \cdot \psi$

Forme explicite de D^{-1} : $D^{-1} = \alpha I_d + \varepsilon [q_1]^T \cdot [q_2]$

Traitement MF-PJ purement sans Matrice :

$$\Delta w_j^{(l+1)} = \underbrace{\frac{1}{a+b} (\Delta w_1^{(l)} + \Delta w_2^{(l)})}_{\text{traitement sans matrice standard avec } \dot{\rho}^E \text{ au lieu de } \dot{\rho}^E} + \underbrace{\chi_j \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ H \end{pmatrix}}_{\text{traitement bas-Mach spécifique (= 0 si } \beta = 1)}$$

avec $\begin{cases} a = 1 + \dot{\rho}_{i-1/2}^E + \dot{\rho}_{i+1/2}^E \\ b = \frac{3}{2} \lambda + \dot{\rho}_{i-1/2}^V + \dot{\rho}_{i+1/2}^V \end{cases}$; $\begin{cases} \Delta w_1^{(l)} = F(R_j^{n,m}, \Delta w_j^{(l)}, \Delta f_j^{(l)}) \\ \Delta w_2^{(l)} = F(\Delta w_j^{(l)}) \end{cases}$ et $\chi_j \begin{cases} = 0 \text{ si } \beta = 1 \\ \neq 0 \text{ si } \beta \neq 1 \end{cases}$

I-15. Propriétés du traitement implicite sans Matrice

- pas de stockage de matrice Jacobienne (flux convectif et/ou visqueux)
- aucune inversion matricielle
- ➔ traitement implicite extrêmement peu coûteux même à bas-Mach



- perte d'efficacité intrinsèque liée aux simplifications "rayon spectral"
- le faible coût unitaire doit compenser cette perte
- ➔ analyser l'efficacité globale de la méthode

I- Construction d'une phase implicite sans Matrice à faible coût unitaire pour tout régime d'écoulement

II- Analyse de l'efficacité intrinsèque de cette méthode pour tout régime d'écoulement

- × Étude de l'influence du "cut-off" bas-Mach
- × Démonstration de l'efficacité globale

III- Implémentation de la méthode sans Matrice dans CAST3M

- × Comparaisons avec les techniques existantes

II-1. Analyse de Von Neumann

Objectifs :

- Estimer la perte d'efficacité intrinsèque due aux simplifications MF
- Comparer la méthode MF avec les traitements implicites blocs standards

Linéarisation du problème :

$$H \cdot \Delta w_j^{n,m} = -\Delta \tau \cdot R_j^{n,m} \Rightarrow H \cdot \Delta w_j^{n,m} = -K \cdot w_j^{n,m}$$

Transformée de Fourier :

$$H \cdot \Delta w_j^{n,m} = -K \cdot w_j^{n,m} \Rightarrow H \cdot \Delta \hat{w}_j^{n,m} = -K \cdot \hat{w}_j^{n,m}$$

Facteur d'amplification :

$$\hat{w}^{n,m+1} = G \cdot \hat{w}^{n,m} \Rightarrow \rho(G) = \rho(G(\xi, \eta; M, v/u, CFL, AR))$$

→ Analyse de stabilité et d'efficacité via l'étude de ce facteur d'amplification

II-2. Etude locale et étude globale

Etude locale :

- $(M, v/u)$ donné et (CFL, AR) fixé
- Balayage de l'espace des phases $(\xi, \eta) \in [0; \pi]^2$
 - Si $\exists (\xi, \eta) \in [0; \pi]^2, \rho(G(\xi, \eta)) > 1$ alors le schéma est instable

Etude globale de stabilité :

- Balayage des paramètres M et CFL
- Calcul de $\rho_{max}(M, CFL) = \max_{(\xi, \eta) \in [0; \pi]^2} (\rho(G(\xi, \eta, M, CFL)))$
 - Stabilité en fonction de M et CFL

Etude globale d'efficacité :

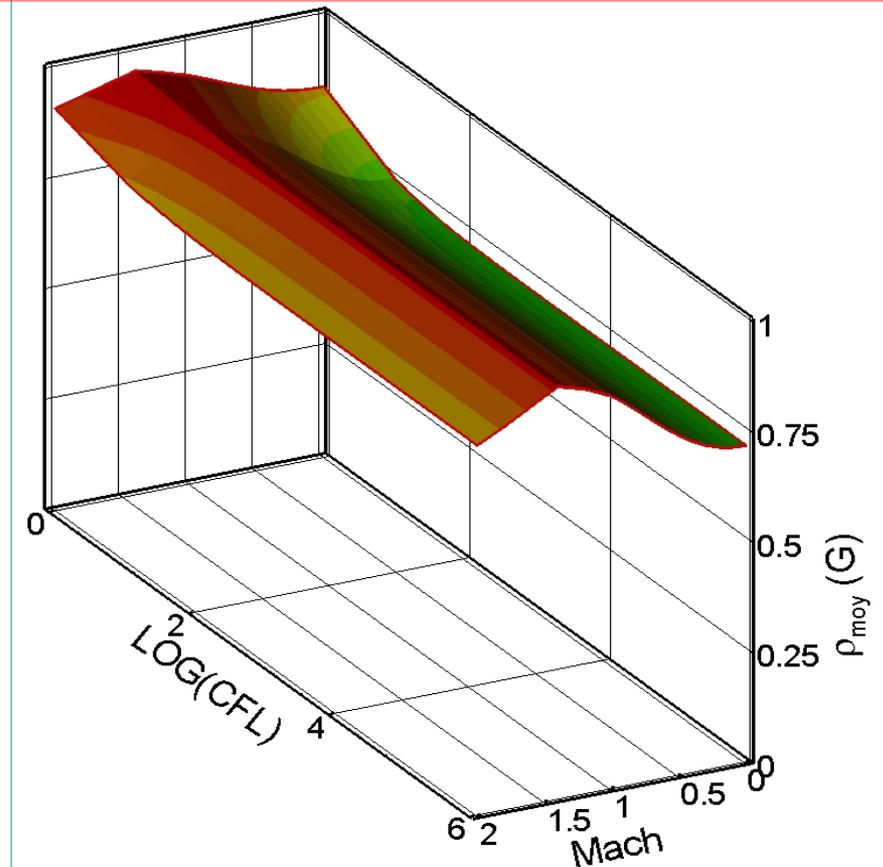
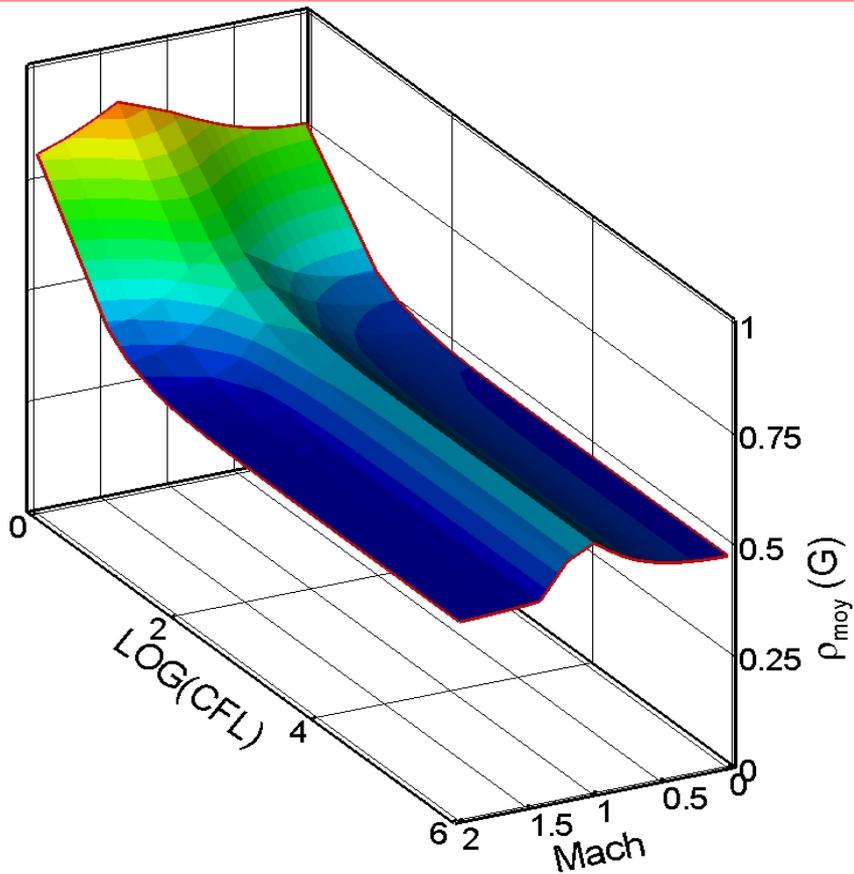
- Calcul de $\rho_{moy}(M, CFL)$
 - Si $\rho_{moy}(M, CFL) \rightarrow 1 \Rightarrow$ faible amortissement des modes d'erreur
 - Si $\rho_{moy}(M, CFL) \rightarrow 0 \Rightarrow$ amortissement rapide et bonne convergence

Informations sur les performances intrinsèques des traitements implicites

II-3. Exemple d'étude globale d'efficacité

Ingrédients pour les équations d'Euler :

- Schéma de **Roe-Turkel** avec extrapolation MUSCL pour la partie explicite
- Phases implicites **Bloc** (à gauche) et **sans Matrice** (à droite)
- Résolution exacte du système (**Solveur Direct**)



II-4. Récapitulatif des résultats de l'analyse de Von Neumann

Analyse systématique de la méthode sans Matrice :

- Perte d'efficacité **réduite à faible nombre de Mach**
- **Simplification rayon spectral visqueux** peu pénalisante pour $\frac{Re_m}{M} > 1$
- Résolution par PJ ou SGS efficace **sauf en maillages très étirés**
- Méthode efficace **en instationnaire**

→ *Résultats confirmés par des expériences numériques*

Optimisation du "cut-off" bas-Mach :

- Modification du **cut-off visqueux**
- Choix d'une longueur de référence pour le **cut-off instationnaire**

II-5. Optimisation du préconditionnement visqueux

Écoulement bas-Mach visqueux : $M \ll 1$ $Re_m = \frac{u \cdot \delta x}{\rho^V} \ll 1$ $AR = 1$

Définition du paramètre bas-Mach : $\beta^2 = \min \left[\max(\beta_E^2, \beta_V^2), 1 \right]$

Cut-off Euler : $\beta_E = \frac{u}{c} = M$ \Rightarrow Cut-off visqueux : $\beta_V \approx \frac{\rho^V / \delta x}{c}$

- Augmentation sensible de l'amortissement pour les schémas blocs
 - Définition mal adaptée pour les schémas sans Matrice

Modification du "cut-off" bas-Mach
visqueux

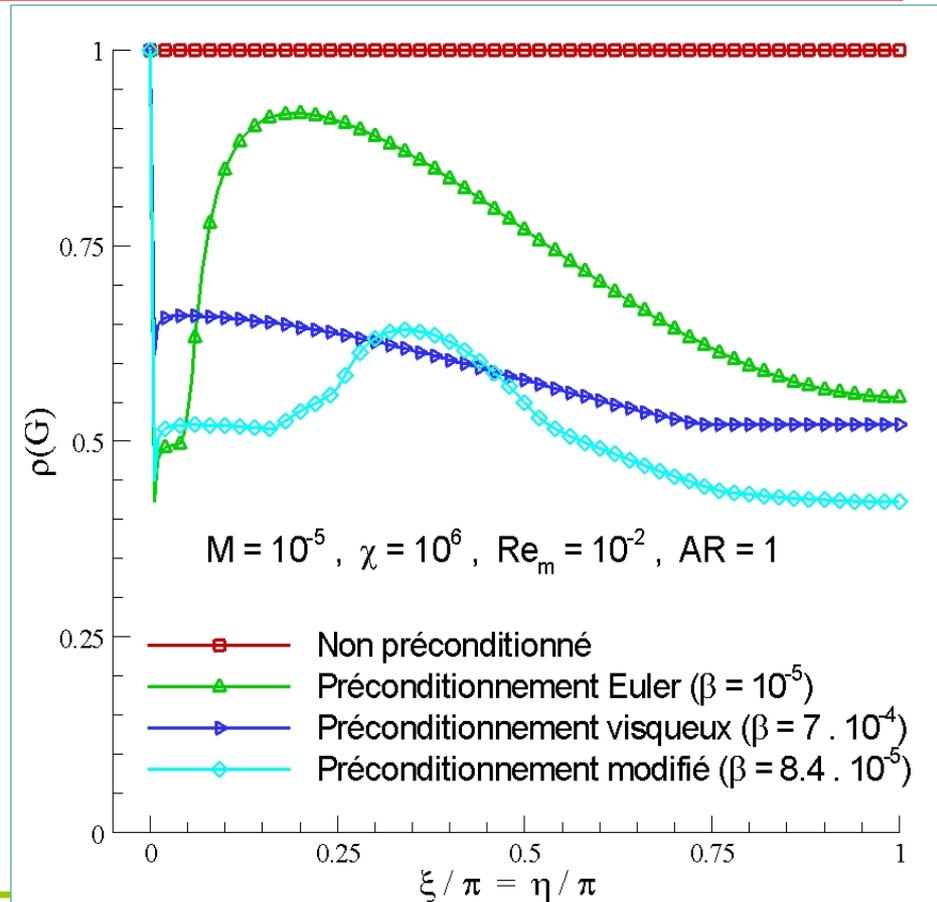
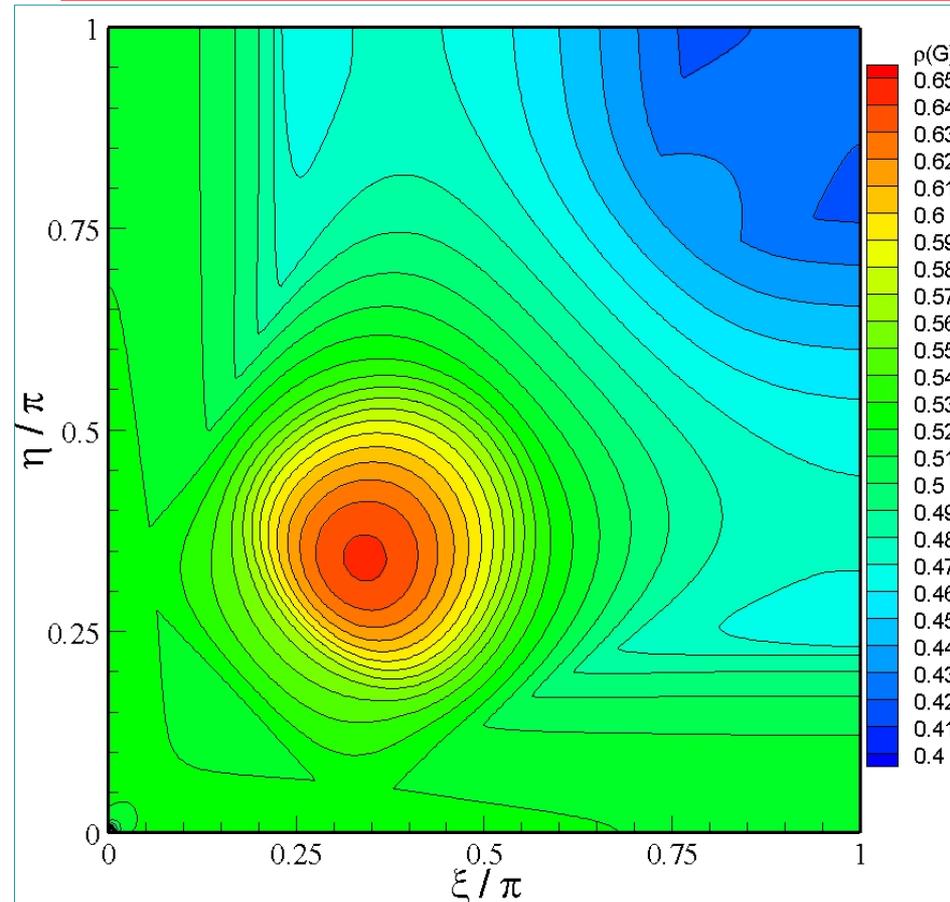
$$\Rightarrow \beta_V^{MF} = \sqrt{\beta_V \times M}$$

issue de l'étude paramétrique

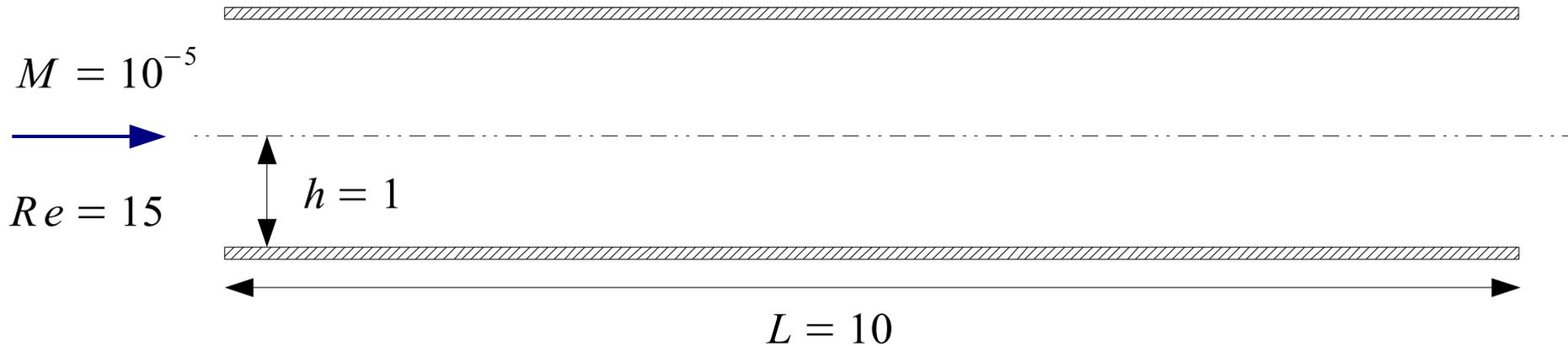
II-6. Influence du "cut-off" bas-Mach pour le cas visqueux

Paramètres de l'étude :

- "Cut-off" Euler, Visqueux et Modifié pour le sans Matrice
- Phase implicite **sans Matrice** résolue exactement (MF-DS)
- Écoulement bas-Mach visqueux



II-7. Écoulement de Poiseuille



Maillage fin : $300 \times 60 \Rightarrow Re_m = 0.25 \quad AR = 1$

Schéma numérique : schéma de Roe-Turkel avec extrapolation MUSCL

Résolutions implicites :

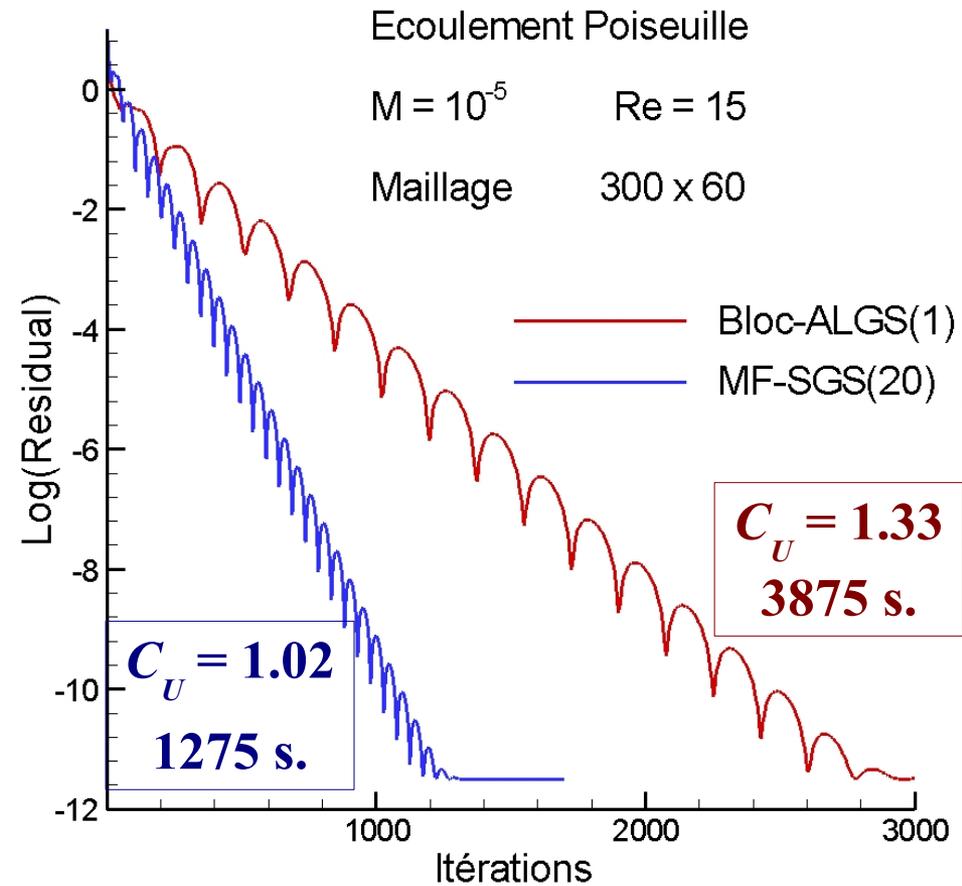
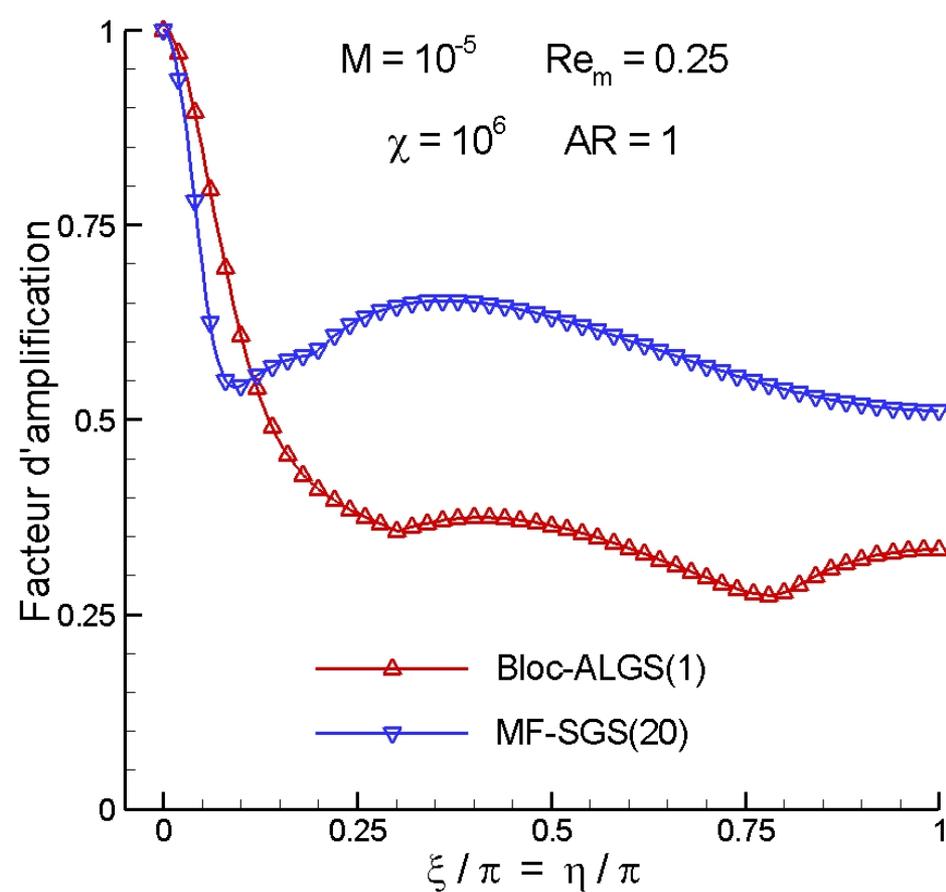
- Phase implicite Bloc résolue par *ALGS(1)*
- Phase implicite sans Matrice résolue par *SGS(20)*

Préconditionnement

bas-Mach :

- Préconditionnement visqueux *original* pour *BL-ALGS*
- Préconditionnement visqueux *modifié* pour *MF-SGS*

II-8. Démonstration de l'efficacité globale



Faible nombre d'opérations \Rightarrow Possibilité d'augmenter les sous-itérations à moindre coût

\Rightarrow Efficacité intrinsèque supérieure au traitement bloc

+ Coût unitaire plus faible \Rightarrow **Coût global extrêmement réduit**

I- Construction d'une phase implicite sans Matrice à **faible coût unitaire** pour tout régime d'écoulement

II- Analyse de **l'efficacité intrinsèque** de cette méthode pour tout régime d'écoulement

- × Étude de l'influence du "cut-off" bas-Mach
- × Démonstration de **l'efficacité globale**

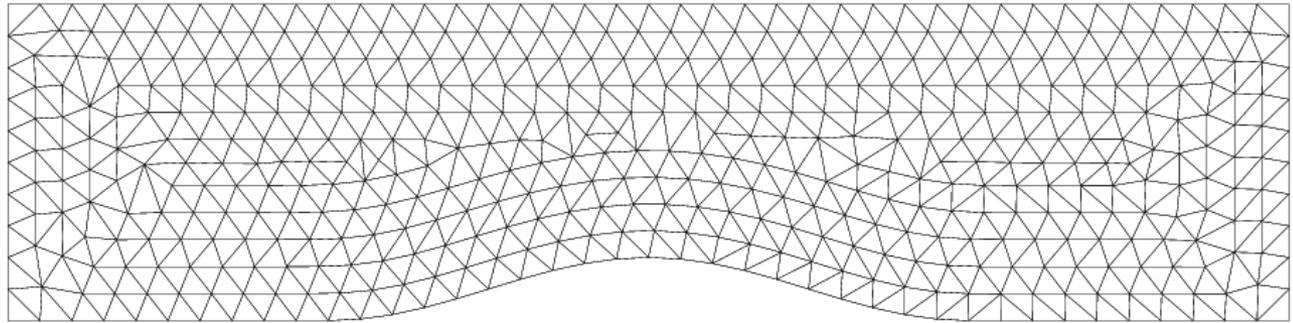
III- Implémentation de la méthode sans Matrice dans CAST3M

- × **Comparaisons avec les techniques existantes**

IV-1. Comparaison Newton-Krylov / Sans Matrice

$$\xrightarrow{M_\infty = 10^{-1}}$$

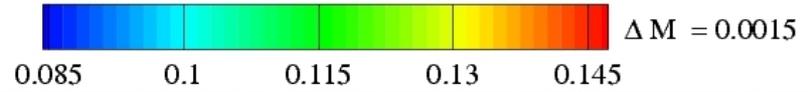
Schéma AUSM+(P)
maillage : 14104 éléments



Conditions du calcul :

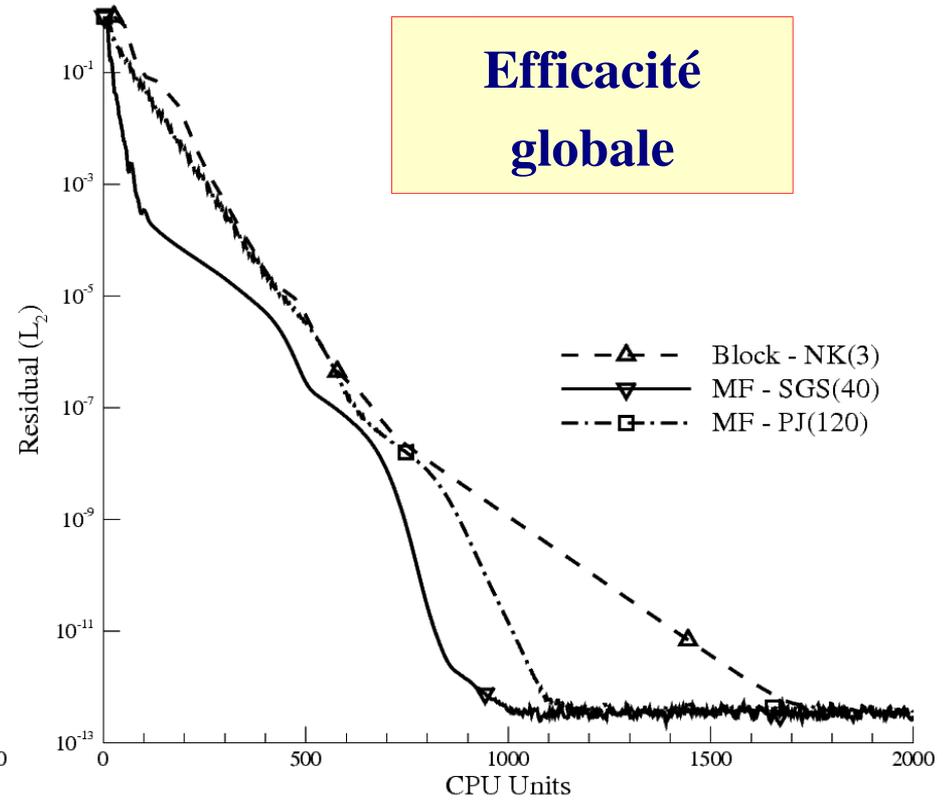
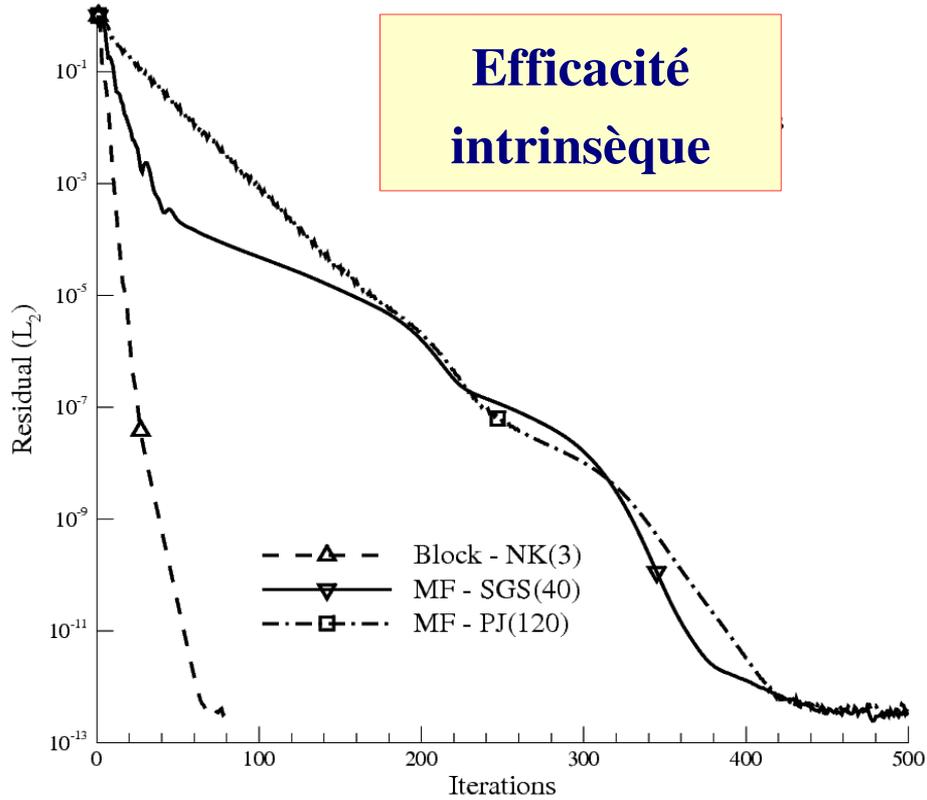
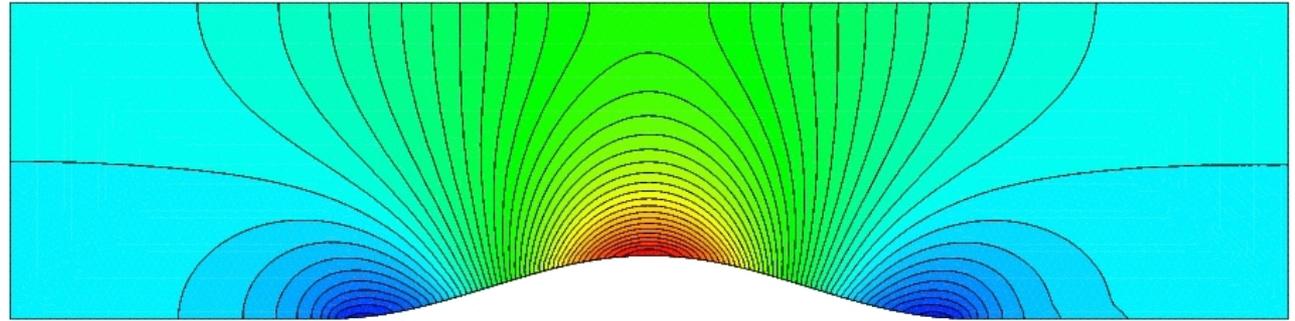
- $M_\infty = 10^{-1}$
- Schéma AUSM+(P) avec reconstruction Barth-Jespersen
- Algorithme **Newton-Krylov** résolu par la méthode **GMRES**
 - × espace de Krylov de dimension 50
 - × préconditionneur **ILUT**
 - × Convergence sur le résidu linéaire inférieure à $10^{-\alpha}$ ($NK(\alpha)$)
- Méthode **sans Matrice**
 - × Algorithmes **PJ** et **SGS**
 - × Nombre α de sous-itérations ($MF - PJ(\alpha)$ et $MF - SGS(\alpha)$)

IV-1. Comparaison N



$$M_{\infty} = 10^{-1}$$

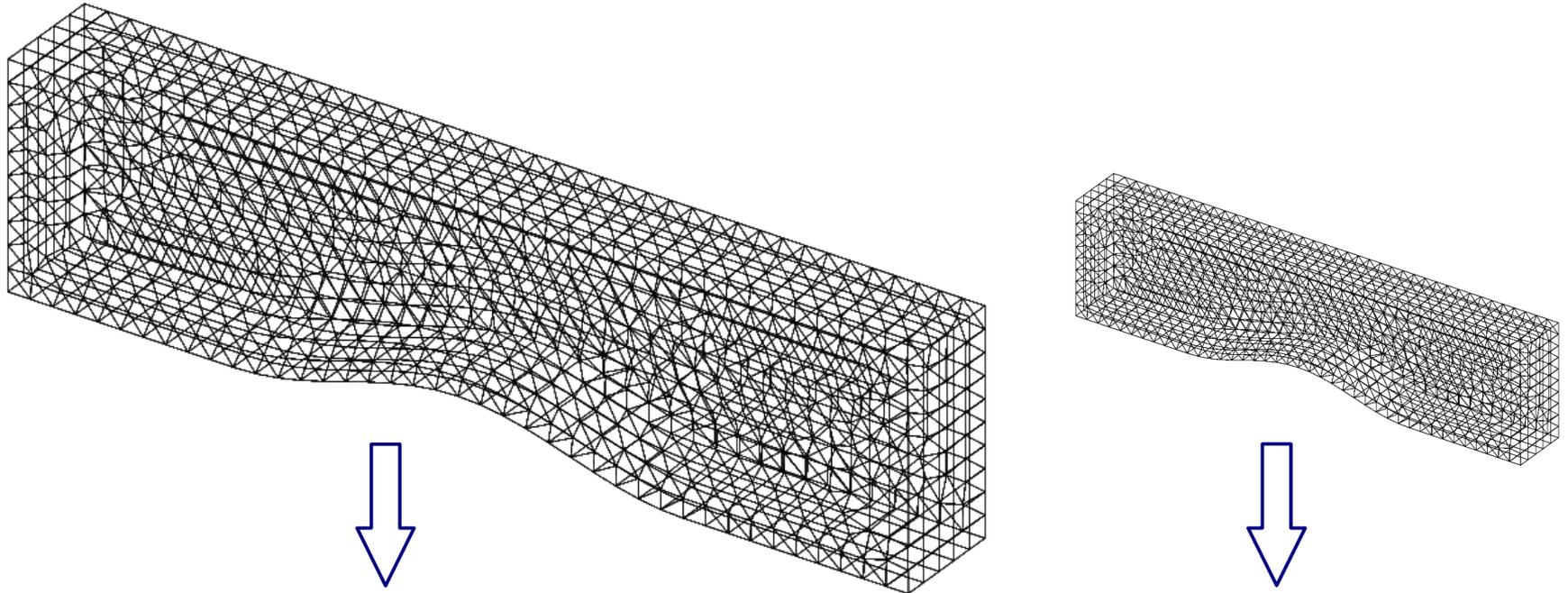
Schéma AUSM+(P)
maillage : 14104 éléments



IV-2. Cast-test tridimensionnel : étude de l'encombrement mémoire

Extension à un écoulement non-visqueux dans un canal à bosse 3D

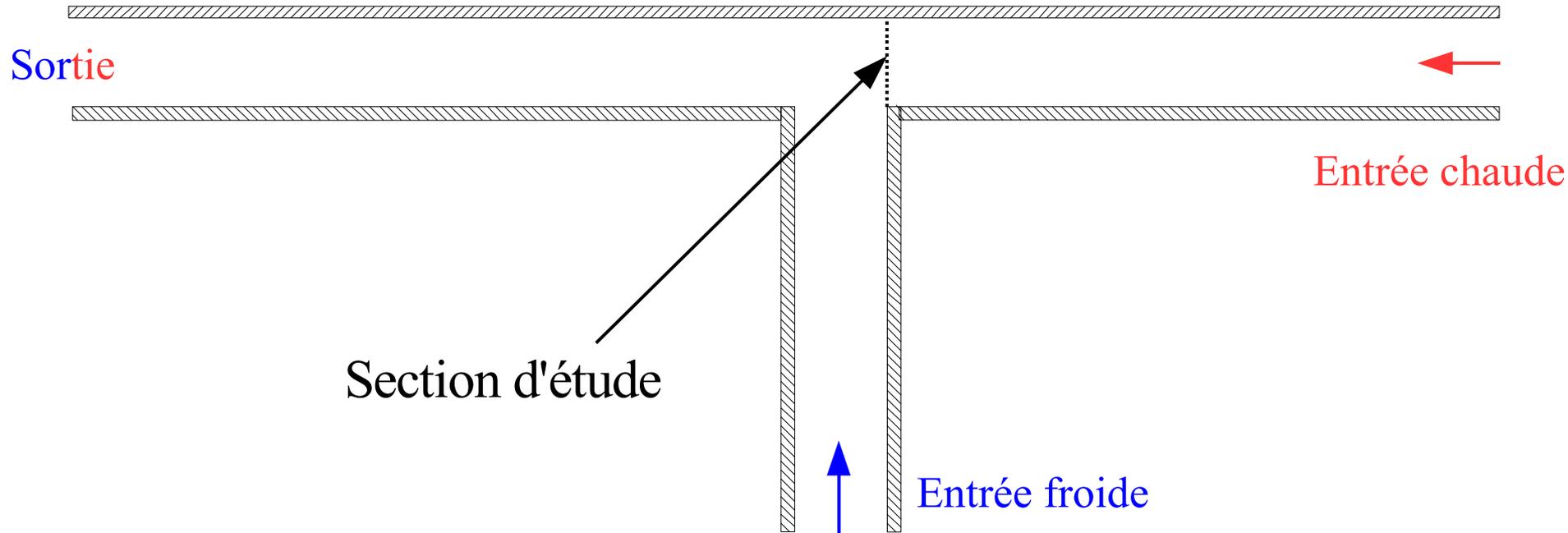
- Intel Xeon 3 Ghz avec 2 Go de mémoire vive



*Simulation jusqu'à **600,000**
éléments avec la méthode
Sans Matrice*

*Seulement **10,000** éléments avec
l'algorithme Newton-Krylov*

IV-4. Modélisation d'un Té de mélange



Conditions du calcul :

- Gaz caloriquement parfait (air $\gamma = 1.4$)
- Débits volumiques moyens : $\bar{m}_H = 0.8, \bar{m}_C = 0.2$
- $Pr = 0.7, Re = 100, M = 1/300, Fr = 1/9, \epsilon = \frac{T_H - T_C}{2\bar{T}} = 0.2$

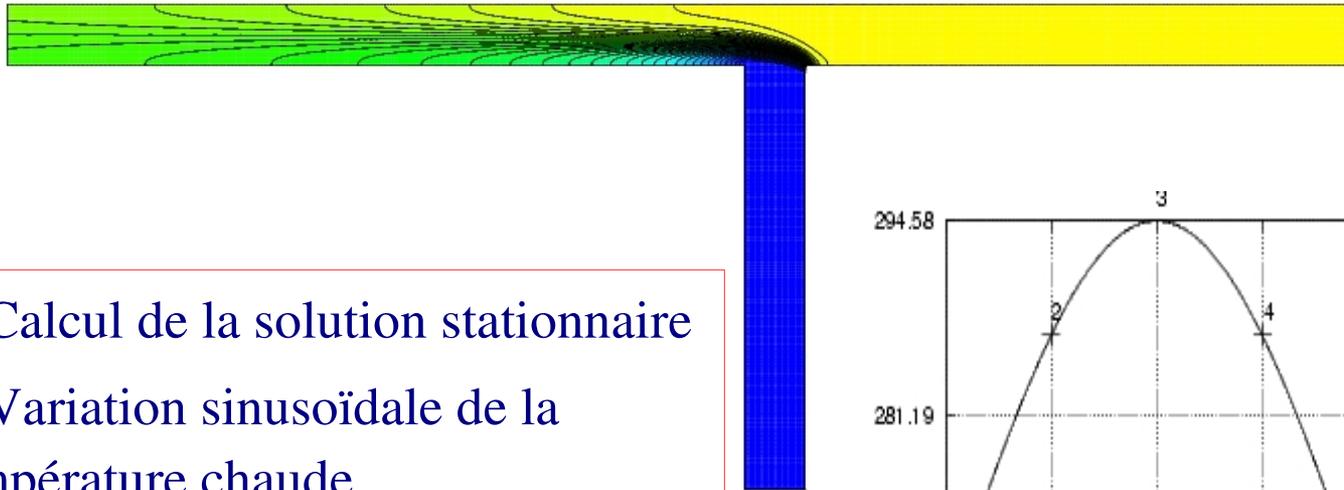
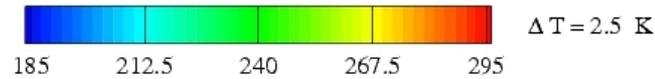
Solveur compressible préconditionné (density-based)

- ✓ Schéma AUSM+(P) avec reconstruction Barth-Jespersen
- ✓ Préconditionnement de Turkel **avec "cut-off" sans Matrice**
- ✓ Méthode diamant pour la discrétisation des flux visqueux
- ✓ Discrétisation temporelle BDF2
- ✓ **Algorithme implicite sans Matrice** avec pas-de-temps dual

Solveur compressible asymptotique (pressure-based)

- ✓ Modèle asymptotique bas-Mach à une échelle de temps et d'espace
- ✓ Approche EF de type Galerkin
- ✓ Schéma BDF2
- ✓ Résolution par une méthode de point fixe

IV-6. Problème instationnaire

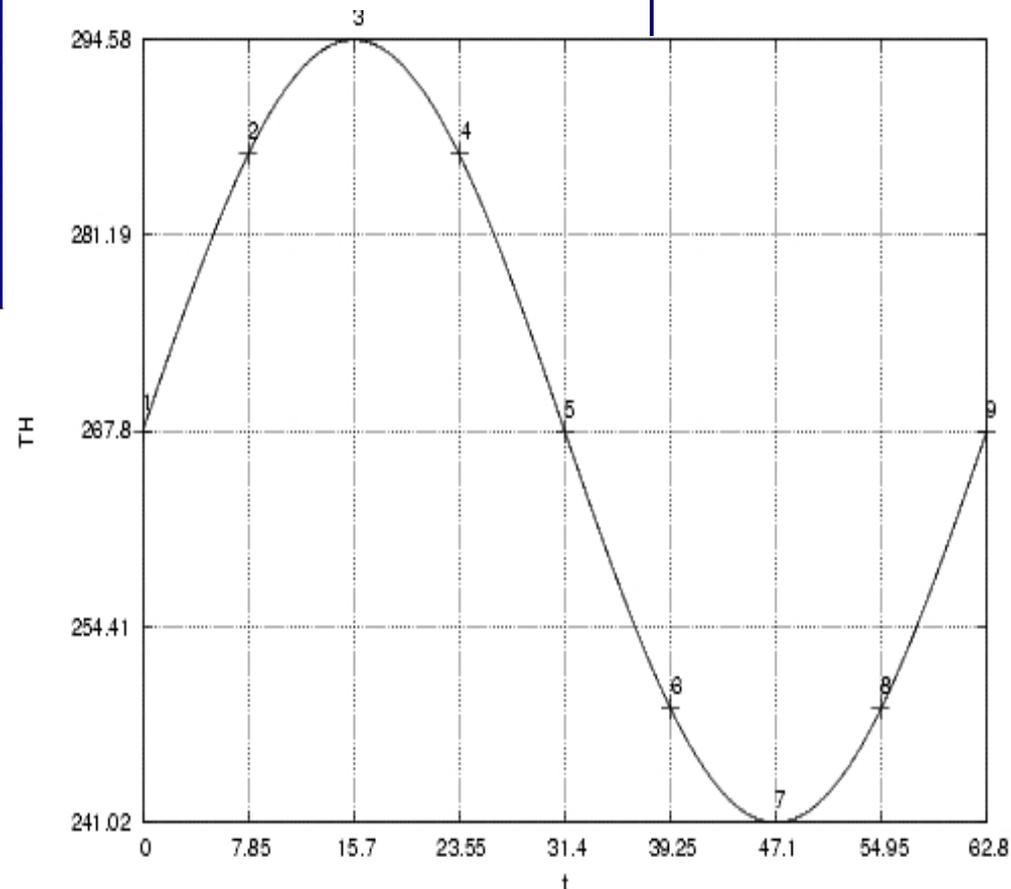


1. Calcul de la solution stationnaire

2. Variation sinusoïdale de la température chaude

$$T_H(t) = T_H(0) \times (1 + A \cos(\omega t))$$

3. Choix du pas-de-temps en fonction de la vitesse de l'onde matérielle $CFL_u = \frac{\Delta t \cdot u}{\delta x} \approx 1$



Impact du préconditionnement instationnaire

$$\beta^2 = \min \left[\max(\beta_S^2, \beta_U^2), 1 \right]$$
$$\beta_U = \frac{l_x}{\pi \cdot \Delta t \cdot c} \quad l_x = \delta x \cdot \sqrt{CFL_{u+c}}$$

Action simultanée sur

Précision (phase explicite)



**Ajustement de la dissipation
numérique préconditionnée**

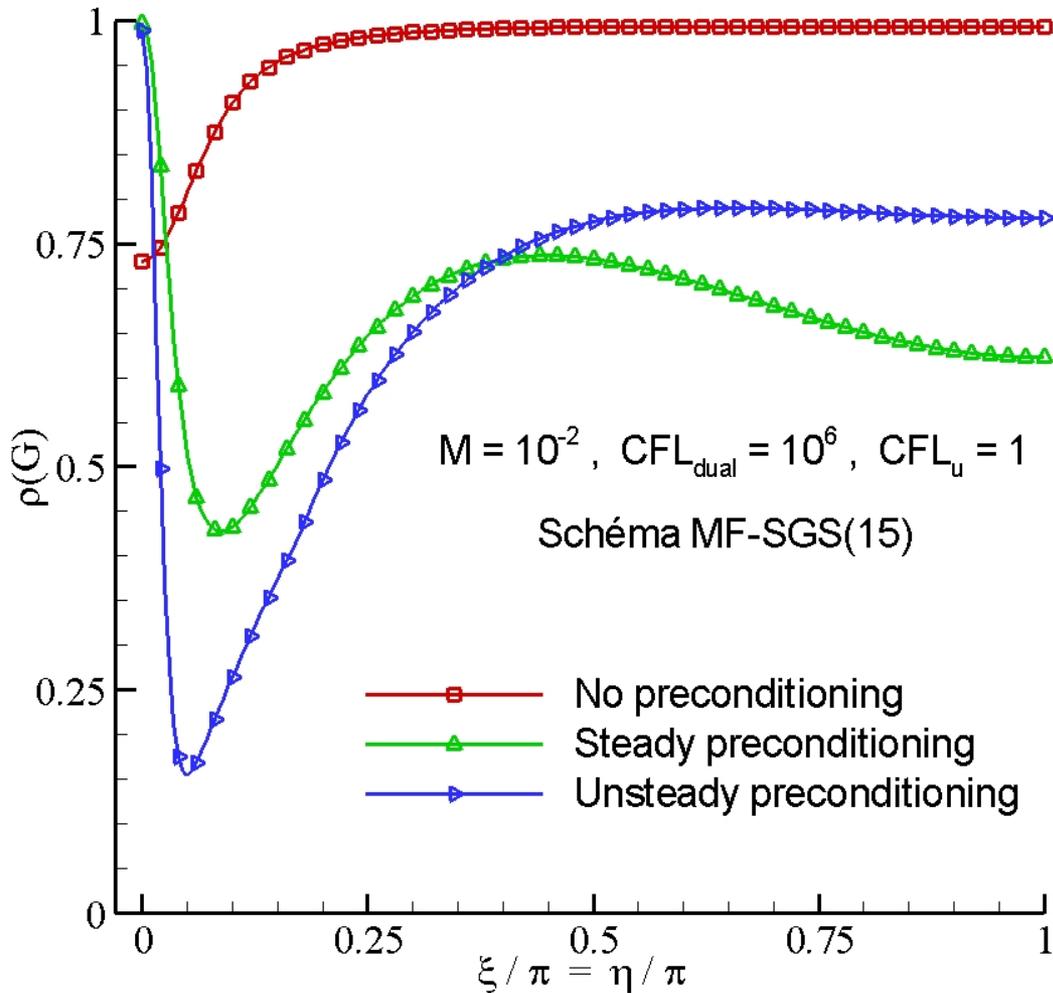
Efficacité (phase implicite)



**préconditionnement des
termes en temps fictif**

Exigences antagonistes

IV-8. Action du cut-off instationnaire



Le préconditionnement instationnaire assure une très bonne efficacité

MAIS

il génère une

surdissipation numérique

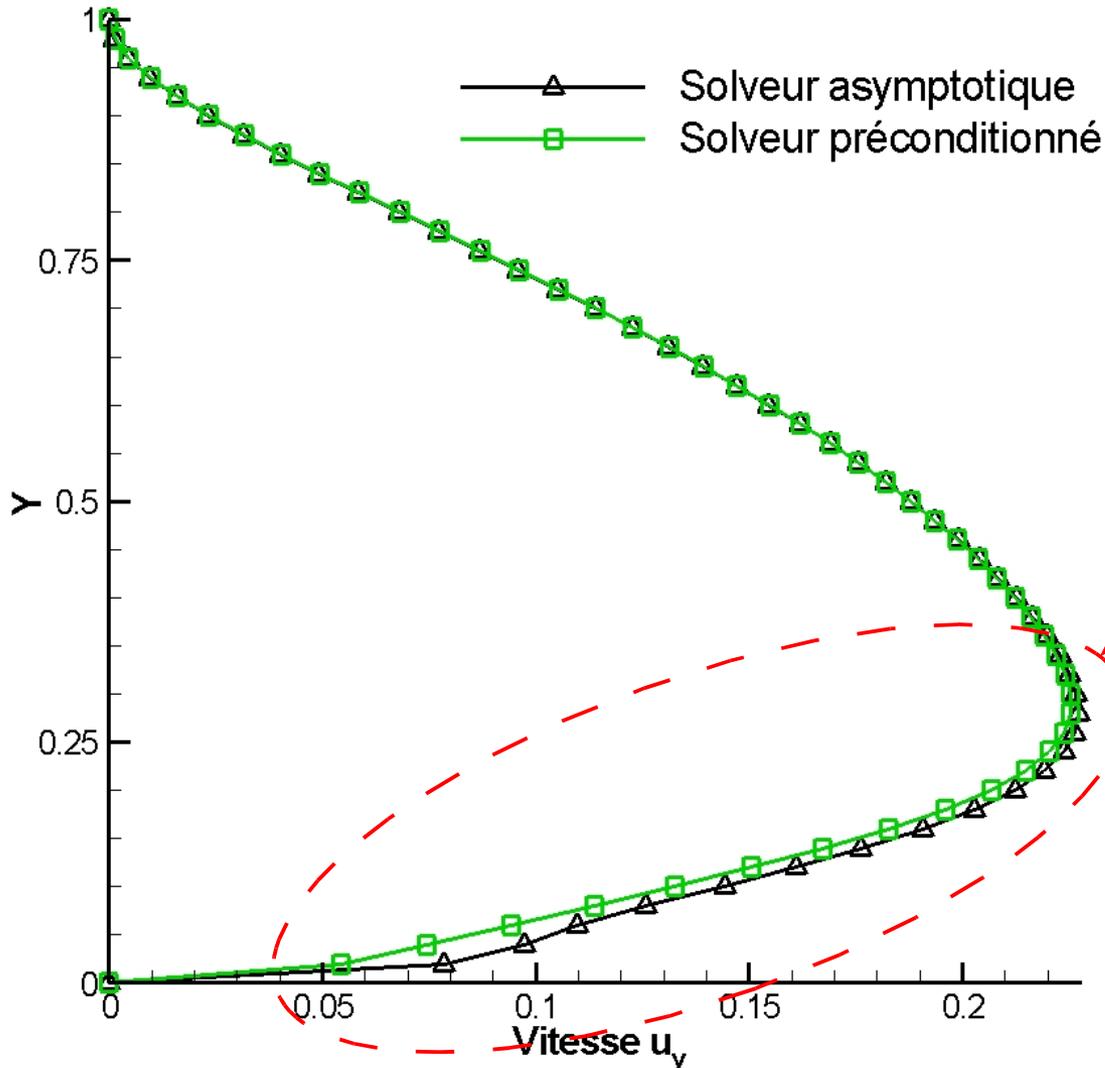
qui peut nuire à la précision

$$M = 10^{-2} \quad CFL_u = 1$$

$$\beta_U = \frac{\sqrt{M}}{\pi} \gg \beta_S = M$$

IV-9. 1^{ère} Stratégie : "cut-off" instationnaire constant

Vitesse u_y en sortie de tube chaud à mi-période



$$\beta_U = \frac{\sqrt{M}}{\pi}$$



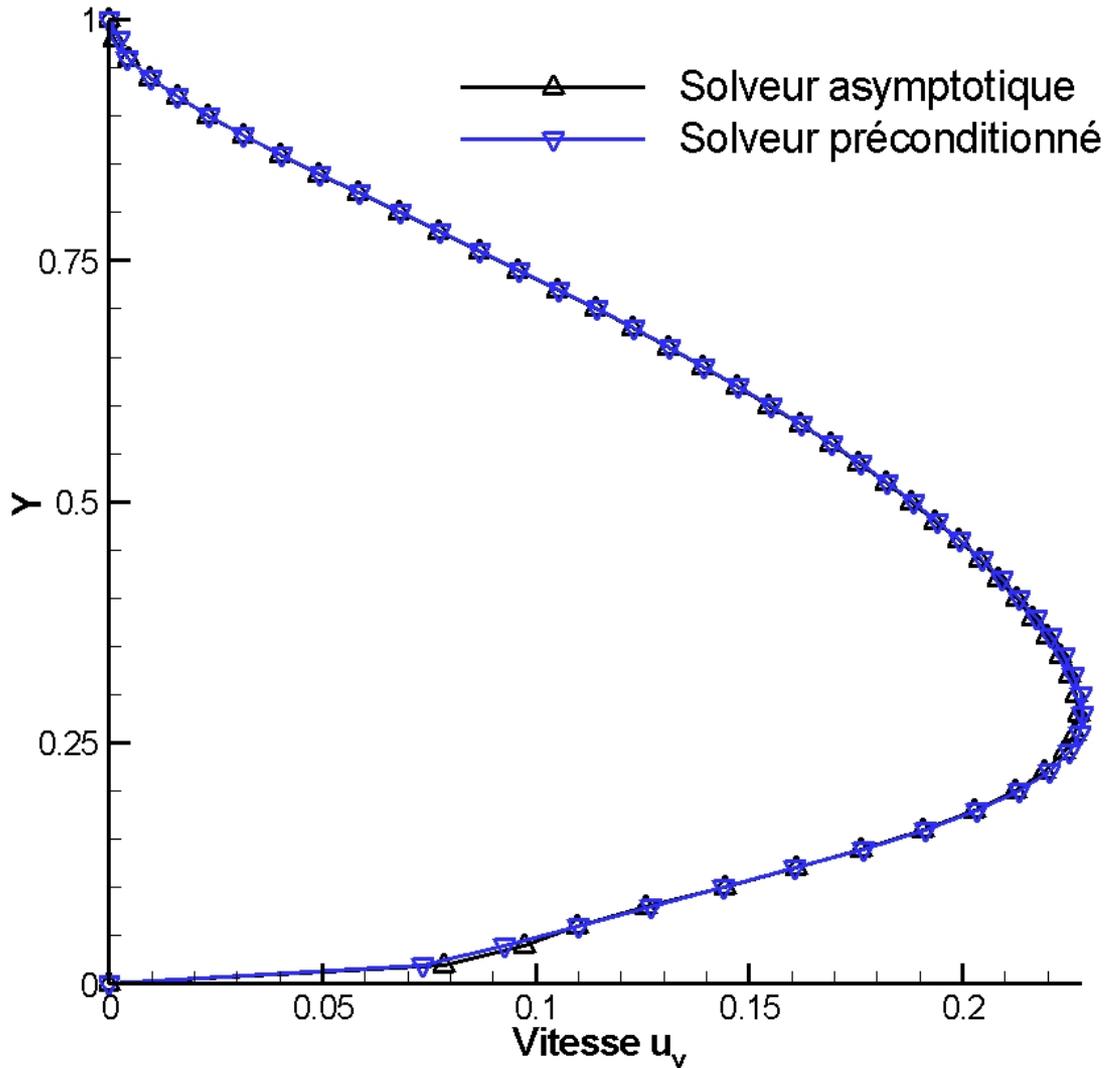
Perte de précision
par rapport à la solution
de référence obtenue
avec le solveur pression



Nécessité d'adopter une
stratégie alternative

IV-10. 2nde Stratégie : "cut-off" instationnaire décroissant

Vitesse u_y en sortie de tube chaud à mi-période



$$\beta_U = \frac{\sqrt{M}}{\pi} \rightarrow M$$

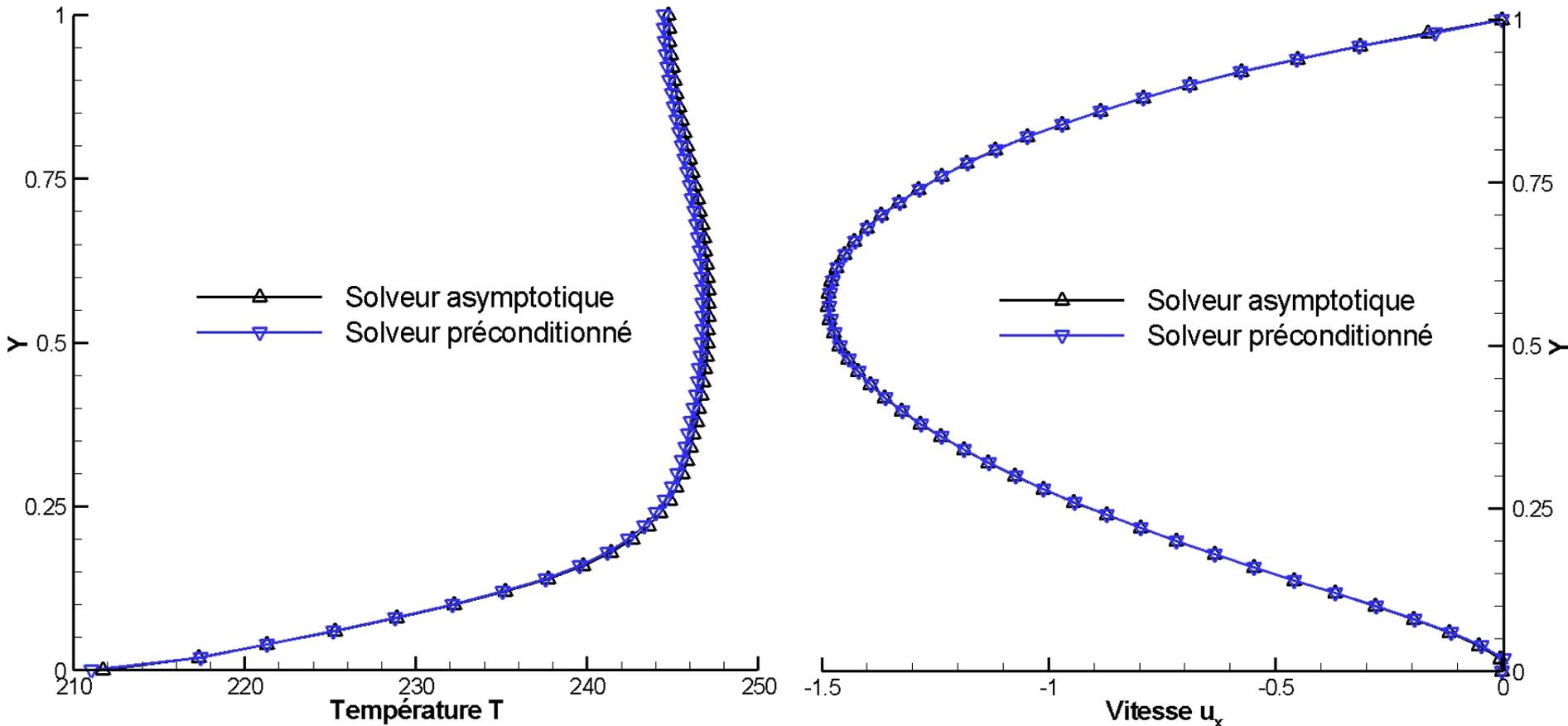


**Conservation
de la précision**

et

**maintien
d'une bonne efficacité**

IV-11. Résultats après une période



Obtention d'une précision similaire à celle du solveur asymptotique à maillage équivalent

Le solveur compressible préconditionné **sans Matrice**
applicable à *tout régime d'écoulement*

reste **compétitif** par rapport à

une méthode spécialement conçue pour ce type d'écoulement

NBEL	Méthode	Temps CPU
34900	Asymptotique	27000 s.
35000	MF-SGS(30)	36500 s.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Phase Implicite Sans Matrice

Schéma de Rusanov

+

Rayon spectral visqueux

+

Technique du pas-de-temps dual

+

Préconditionnement bas-Mach
adapté à ces simplifications



Etude de la perte d'efficacité
intrinsèque liée à ces
simplifications par analyse de
Von Neumann



Méthode de résolution

coût unitaire réduit
pour toutes les
gammes de nombre
de Mach

+

facile à mettre en
oeuvre en maillages
non-structurés

Résolution de la Phase Implicite Sans Matrice

Méthodes Newton-Krylov GMRES

Ingrédients :

- ✓ Préconditionneur LU-SGS
- ✓ Simplifications Sans Matrice

Espoirs :

- ✓ Maintien du coût mémoire faible
- ✓ Augmentation de l'efficacité
 - × Maillages étirés
 - × Écoulements confinés

Méthodes de relaxation PJ et SGS

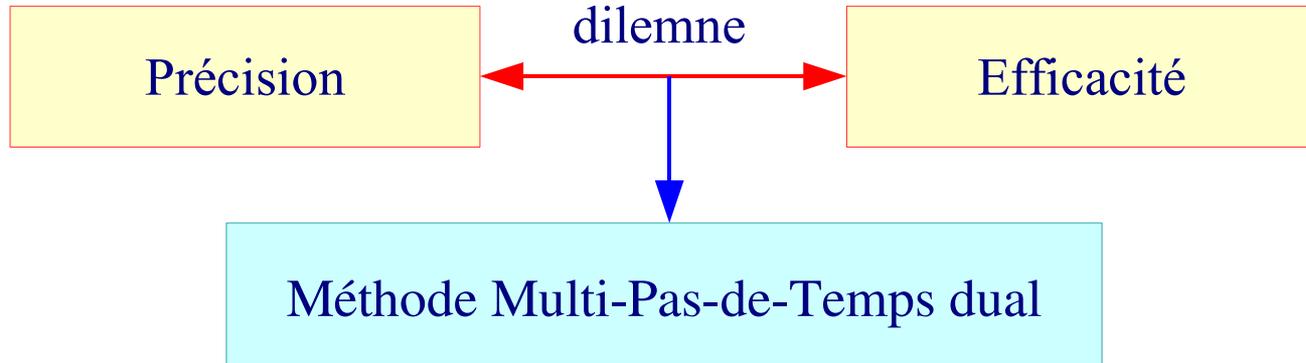
Avantages :

- ✓ Adaptées aux maillages non-structurés
- ✓ Faible coût par itération
- ✓ Réduction du stockage mémoire

Inconvénients :

- ✓ Faible efficacité intrinsèque
- ✓ Inefficace en maillages étirés
- ✓ Inefficace pour les écoulements confinés

Préconditionnement bas-Mach instationnaire



$$P_1^{-1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \tau_1} + P_2^{-1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \tau_2} + \frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{p=1}^d \frac{\partial f_p}{\partial x_p} = 0$$

Découplage du cut-off gérant la précision de celui qui contrôle l'efficacité:

- ✓ $\beta_2 = M$ pour la précision (ajustement de la dissipation numérique)
- ✓ $\beta_1 = \beta_U$ pour l'efficacité

Extension de la méthode implicite Sans Matrice aux écoulements multi-espèces

- ✓ Sujet de la thèse à suivre ...

Thank you for your attention

Merci de votre attention

λ. Organisation des travaux de thèse

Analyse de Von Neumann

- Evaluation de la perte d'efficacité intrinsèque
- Etude des performances intrinsèques de plusieurs traitements implicites
 - procédure Point Jacobi (PJ)
 - procédure Symmetric Gauss-Seidel (SGS)
- Choix d'un cut-off bas-Mach adapté

Maquette numérique

- Estimation de l'efficacité globale des stratégies sélectionnées sur des cas-tests bien calibrés
- Comparaisons entre phase implicite Bloc et phase implicite sans Matrice
- Validation des choix de cut-off

Méthode sans Matrice

Code CAST3M

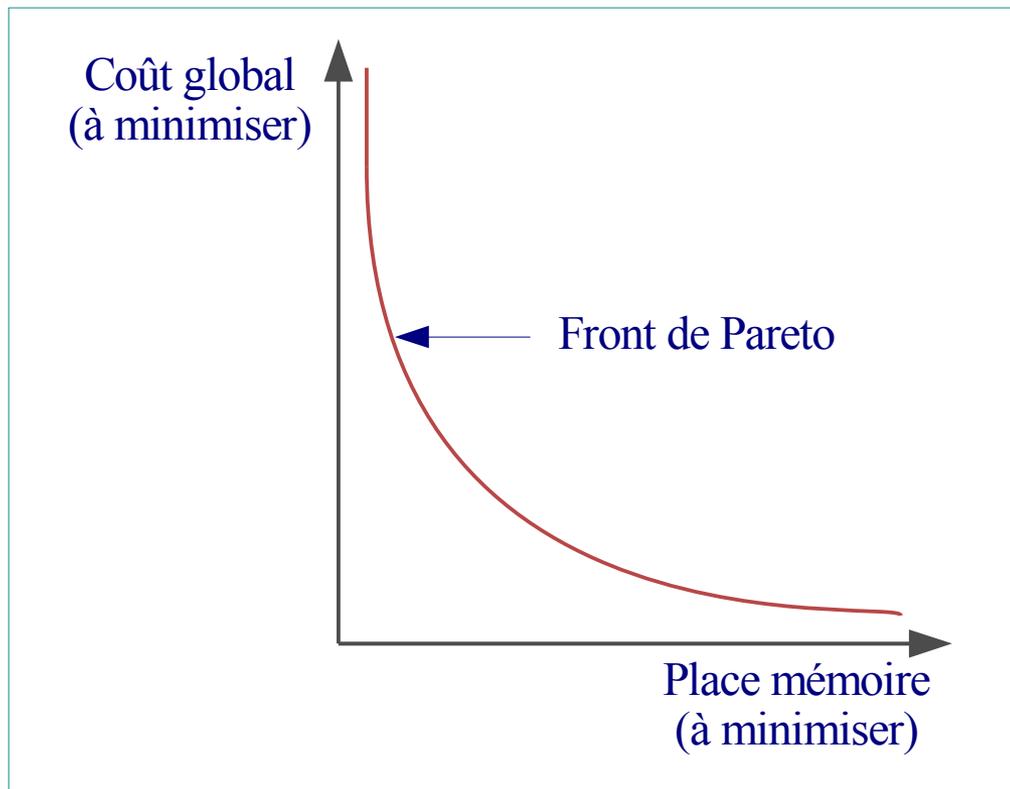
- Formulation VF non-structuré de la méthode sans Matrice
- Algorithmes PJ et SGS
- Comparaisons avec le schéma implicite Newton-Krylov
- Comparaison avec un solveur pression sur un cas bas-Mach instationnaire

κ. Définition de l'efficacité

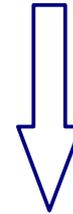
Pour le calcul d'écoulements stationnaires

- Minimisation du coût global, *i.e.* du temps de calcul pour atteindre l'état stationnaire
- Minimisation de l'encombrement en place mémoire

→ Résolution d'un problème d'optimisation multi-objectifs



Pas de solution unique
Ensemble de compromis
(Front de Pareto)



Choix d'un compromis
satisfaisant par rapport
aux objectifs fixés

i. Efficacité intrinsèque et efficacité globale

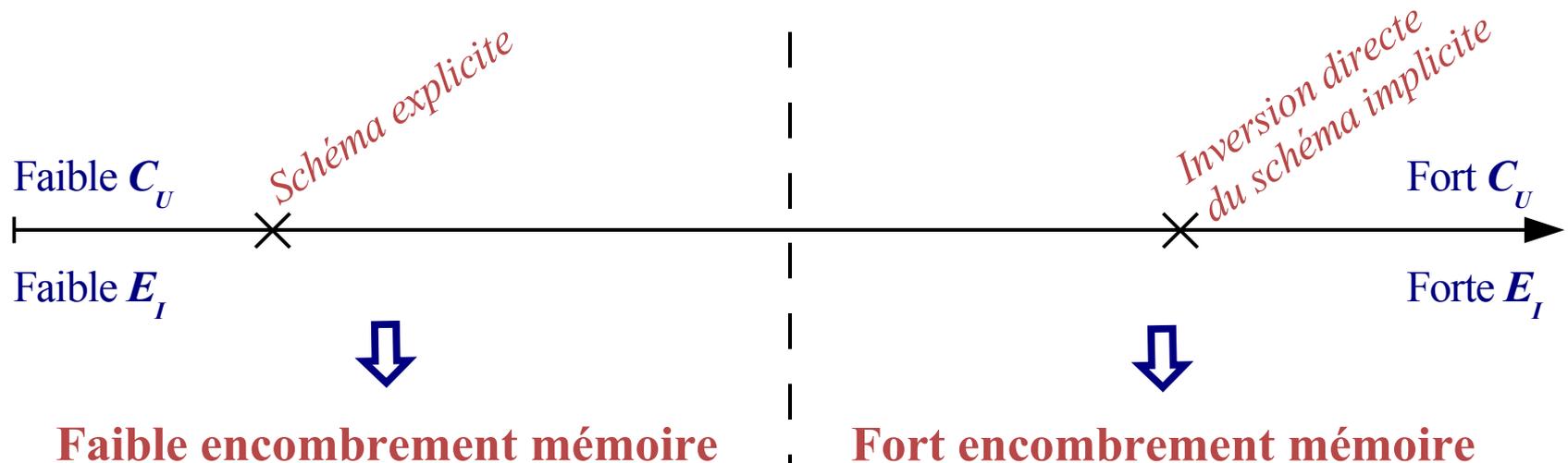
Efficacité intrinsèque (E_I)

→ Nombre d'itérations pour converger à l'état stationnaire (N_I)

Coût global (C_G)

→ Combinaison de l'efficacité intrinsèque et du coût unitaire (C_U)

$$C_G = C_U \times N_I$$



P1. Difficultés liées au préconditionnement bas-Mach

Forme de la matrice : $D^{-1} = (a P_j^{-1} + b I_d)^{-1}$

Sans préconditionnement : $P^{-1} = I_d \Rightarrow D^{-1} = 1/(a+b)$

- ✓ le traitement est purement sans matrice (Löhner *et al*, 1998, 2001)
- ✓ extrêmement peu coûteux (surtout en terme de place mémoire)
- ✓ globalement efficace même si intrinséquement déficient

Avec préconditionnement : $P^{-1} \neq I_d$

- ✓ D est une matrice bloc
- ✓ accroissement de l'encombrement mémoire et du nombre d'opérations
- ✓ nécessité d'optimiser le traitement implicite afin que le coût unitaire demeure faible

➤ Nécessité d'inverser le coefficient matriciel D

P2. Détail de la phase d'optimisation du traitement implicite sans Matrice

1^{ère} approximation : évaluation des matrices P au centre des cellules

$$\Delta w_j^{(l+1)} = D^{-1} \left(-\Delta \tau \cdot R_j^{n,m} - \sigma \delta \mu \Delta (f^E)_j^{(l)} + \sigma \rho_{j+1/2}^V \Delta w_{j+1}^{(l)} + \sigma \rho_{j-1/2}^V \Delta w_{j-1}^{(l)} \right) \\ + D^{-1} \cdot P_j^{-1} \left(\frac{\sigma}{2} \rho_{j+1/2}^E \Delta w_{j+1}^{(l)} + \frac{\sigma}{2} \rho_{j-1/2}^E \Delta w_{j-1}^{(l)} \right)$$

$$D^{-1} = \left(a P^{-1} + b I_d \right)^{-1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = 1 + \dot{\rho}_{i-1/2}^E + \dot{\rho}_{i+1/2}^E \\ b = \frac{3}{2} \lambda + \dot{\rho}_{i-1/2}^V + \dot{\rho}_{i+1/2}^V \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \dot{\rho}^E = \sigma \tilde{\rho}^E \\ \dot{\rho}^V = \sigma \rho^V \end{cases}$$

Matrice Q idempotente pour le préconditionneur de Turkel: $Q^2 = Q$

\Rightarrow Calculs explicites de D^{-1} et $D^{-1}P^{-1}$

$$D^{-1} = \frac{1}{a+b} \left[I_d + \frac{a(\beta^2-1)}{a+b\beta^2} Q \right] \quad D^{-1} \cdot P^{-1} = \frac{1}{a+b} \left[I_d - \frac{b(\beta^2-1)}{a+b\beta^2} Q \right]$$

P3. Détail de la phase d'optimisation du traitement implicite sans Matrice

Si on pose :

$$\begin{cases} \Delta w_1^{(l)} = -\Delta \tau_j^{n,m} \cdot R_j^{n,m} - \sigma \delta \mu \Delta (f^E)_j^{(l)} + \dot{\rho}_{j+1/2}^V \Delta w_{j+1}^{(l)} + \dot{\rho}_{j-1/2}^V \Delta w_{j-1}^{(l)} \\ \Delta w_2^{(l)} = \frac{\ddot{\rho}_{j+1/2}^E}{2} \Delta w_{j+1}^{(l)} + \frac{\ddot{\rho}_{j-1/2}^E}{2} \Delta w_{j-1}^{(l)} \end{cases}$$

on trouve :

$$\Delta w_j^{(l+1)} = \frac{1}{a+b} (\Delta w_1^{(l)} + \Delta w_2^{(l)}) + \frac{\beta^2 - 1}{(a+b)(a+b\beta^2)} \boxed{Q(a \Delta w_1^{(l)} - b \Delta w_2^{(l)})}$$

produit matrice – vecteur
à optimiser

Optimisation du produit matrice-vecteur restant (Turkel, 1999):

$$Q \cdot X = Q \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \frac{\gamma - 1}{c^2} \left(\frac{q^2}{2} X_1 - u X_2 - v X_3 + X_4 \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ H \end{bmatrix}$$

P4. Traitement "purement" sans Matrice

Traitement MF-PJ pour tout régime d'écoulement :

$$\Delta w_j^{(l+1)} = \underbrace{\frac{1}{a+b} (\Delta w_1^{(l)} + \Delta w_2^{(l)})}_{\text{traitement sans matrice standard avec } \tilde{\rho}^E \text{ au lieu de } \dot{\rho}^E} + \chi_j \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ H \end{pmatrix}}_{\text{traitement bas-Mach spécifique (} = 0 \text{ si } \beta = 1 \text{)}}$$

$$\chi_j = \frac{(\beta^2 - 1)(\gamma - 1)}{c^2(a+b)(a+b\beta^2)} \left[a \left(\frac{q^2}{2} (\Delta w_1^{(1)})^{(l)} - u (\Delta w_1^{(2)})^{(l)} - v (\Delta w_1^{(3)})^{(l)} + (\Delta w_1^{(4)})^{(l)} \right) - b \left(\frac{q^2}{2} (\Delta w_2^{(1)})^{(l)} - u (\Delta w_2^{(2)})^{(l)} - v (\Delta w_2^{(3)})^{(l)} + (\Delta w_2^{(4)})^{(l)} \right) \right]$$

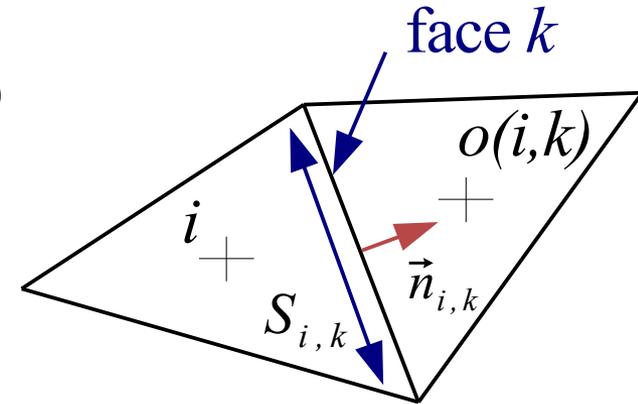
P5. Sans Matrice en maillages non-structurés

$$P^{-1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\Omega_i} \sum_k (f_{i,k}^E - f_{i,k}^V) \cdot \vec{n}_{i,k} S_{i,k} = 0$$

Schéma implicite :

$$P_i^{-1} \cdot \frac{\Delta w_i^{n,m}}{\Delta \tau_i^{n,m}} + \frac{3}{2} \frac{\Delta w_i^{n,m}}{\Delta t} + \frac{1}{\Omega_i} \sum_k \Delta F_{i,k}^{n,m} \cdot \vec{n}_{i,k} S_{i,k} = -R_i^{n,m}$$

avec $R_i^{n,m} = \frac{1}{\Omega_i} \sum_k F_{i,k}^{n,m} \cdot \vec{n}_{i,k} S_{i,k} + \frac{3w_i^{n,m} - 4w_i^n + w_i^{n-1}}{2\Delta t}$ et $F = F^E - F^V$



Simplification sans Matrice : $\Delta F^E \rightarrow \Delta F^{RUSANOV}$

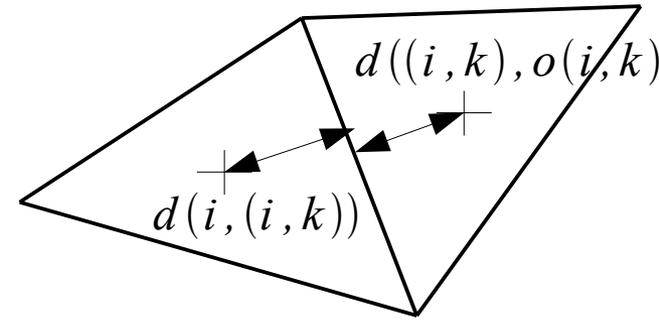
avec $\Delta F_{i,k}^{RUSANOV} \cdot \vec{n}_{i,k} = \frac{1}{2} \left((\Delta f_i^E)^{n,m} \cdot \vec{n}_{i,k} + (\Delta f_{o(i,k)}^E)^{n,m} \cdot \vec{n}_{i,k} \right) + \frac{1}{2} \rho_{i,k}^{\tilde{E}} P_i^{-1} \Delta (w_i - w_{o(i,k)})^{n,m}$

P6. Sans Matrice en maillages non-structurés (suite)

Implication visqueuse :

$$\Delta \mathbf{F}_{i,k}^V \cdot \vec{n}_{i,k} = A_{\vec{n},i,k} \cdot \Delta \left(\frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \right) + A_{\vec{t},i,k} \cdot \Delta \left(\frac{\partial w}{\partial \vec{t}} \right) \approx A_{\vec{n},i,k} \cdot \Delta \left(\frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \right)$$

avec
$$\left(\frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \right) \approx \frac{w_{o(i,k)} - w_i}{d(i, (i,k)) + d(o(i,k), (i,k))}$$



Simplification rayon spectral visqueux :

$$\frac{1}{d(i, (i,k)) + d(o(i,k), (i,k))} \cdot A_{\vec{n},i,k} \rightarrow \rho_{i,k}^V$$

d'où
$$\Delta \mathbf{F}_{i,k}^V \cdot \vec{n}_{i,k} \approx \rho_{i,k}^V \cdot \Delta (w_{o(i,k)} - w_i)^{n,m}$$

P7. Sans Matrice en maillages non-structurés (suite)

Phase implicite sans Matrice :

$$D_i^{n,m} \cdot \Delta w_i^{n,m} + \frac{1}{2\Omega_i} \sum_k \left(\Delta f_{i,k}^E \right)^{n,m} \cdot \vec{n}_{i,k} S_{i,k} - \frac{1}{\Omega_i} \sum_k C_{i,k}^{n,m} \cdot \Delta w_{o(i,k)}^{n,m} S_{i,k} = -R_i^{n,m}$$

avec

$$\begin{cases} D_i = a_i (P^{-1})_i + b_i I_d \\ C_{i,k} = \rho_{i,k}^V + \frac{1}{2} \tilde{\rho}_{i,k}^E \cdot P_{i,k}^{-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_i = \frac{1}{\Delta \tau_i^{n,m}} + \frac{1}{2\Omega_i} \sum_k (\tilde{\rho}_{i,k}^E)^{n,m} S_{i,k} \\ b_i = \frac{3}{2\Delta t} + \frac{1}{\Omega_i} \sum_k (\rho_{i,k}^V)^{n,m} S_{i,k} \end{cases}$$

Relaxation Point Jacobi :

$$D_i^{n,m} \cdot \Delta w_i^{(l+1)} = -R_i^{n,m} - \frac{1}{2\Omega_i} \sum_k \left(\Delta f_{i,k}^E \right)^{(l)} \cdot \vec{n}_{i,k} S_{i,k} + \frac{1}{\Omega_i} \sum_k C_{i,k}^{n,m} \cdot \Delta w_{o(i,k)}^{(l)} S_{i,k}$$

P8. Sans Matrice en maillages non-structurés (suite)

$$\Delta w_i^{(l+1)} = D_i^{-1} \cdot \Delta w_1^{(l)} + D_i^{-1} \cdot P_i^{-1} \cdot \Delta w_2^{(l)}$$

$$\begin{cases} \Delta w_1^{(l)} = -R_i^{n,m} - \frac{1}{\Omega_i} \sum_k \left(\frac{1}{2} \Delta (f^E)_i^{(l)} \cdot \vec{n}_{i,k} - (\rho_{i,k}^V)^{n,m} \cdot \Delta w_{o(i,k)}^{(l)} \right) S_{i,k} \\ \Delta w_2^{(l)} = \frac{1}{2\Omega_i} \sum_k (\tilde{\rho}_{i,k}^E)^{n,m} \cdot \Delta w_{o(i,k)}^{(l)} \cdot S_{i,k} \end{cases}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{a+b} \left[I_d + \frac{a(\beta^2-1)}{a+b\beta^2} Q \right] \quad D^{-1} \cdot P^{-1} = \frac{1}{a+b} \left[I_d - \frac{b(\beta^2-1)}{a+b\beta^2} Q \right]$$

$$Q \cdot X = Q \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \frac{\gamma-1}{c^2} \left(\frac{q^2}{2} X_1 - u X_2 - v X_3 + X_4 \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ H \end{bmatrix}$$

P9. Sans Matrice en maillages non-structurés (suite)

Traitement purement sans Matrice en non-structuré :

$$\Delta w_i^{(l+1)} = \underbrace{\frac{1}{a+b} (\Delta w_1^{(l)} + \Delta w_2^{(l)})}_{\text{traitement sans matrice standard}} + \chi_i \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ H \end{pmatrix}}_{\text{traitement bas-Mach spécifique}} \quad \left(= 0 \text{ si } \beta = 1 \right)$$

avec $\tilde{\rho}^E$ au lieu de $\dot{\rho}^E$

$$\chi_i = \frac{(\beta^2 - 1)(\gamma - 1)}{c^2(a+b)(a+b\beta^2)} \left[a \left(\frac{q^2}{2} (\Delta w_1^{(1)})^{(l)} - u (\Delta w_1^{(2)})^{(l)} - v (\Delta w_1^{(3)})^{(l)} + (\Delta w_1^{(4)})^{(l)} \right) - b \left(\frac{q^2}{2} (\Delta w_2^{(1)})^{(l)} - u (\Delta w_2^{(2)})^{(l)} - v (\Delta w_2^{(3)})^{(l)} + (\Delta w_2^{(4)})^{(l)} \right) \right]$$

M1. Point Jacobi en maillages non-structurés

$$D_i^{n,m} \cdot \Delta w_i^{(l+1)} = -R_i^{n,m} - \frac{1}{2\Omega_i} \sum_k \left(\Delta f_{i,k}^E \right)^{(l)} \cdot \vec{n}_{i,k} S_{i,k} + \frac{1}{\Omega_i} \sum_k C_{i,k}^{n,m} \cdot \Delta w_{o(i,k)}^{(l)} S_{i,k}$$

Soit L_i l'ensemble des faces de la cellule i appartenant à une cellule j voisine telle que : $j < i$

Soit U_i l'ensemble des faces de la cellule i appartenant à une cellule j voisine telle que : $j > i$

$$D_i^{n,m} \cdot \Delta w_i^{(l+1)} = -R_i^{n,m} - \frac{1}{\Omega_i} \sum_{k \in L_i} \left(\frac{1}{2} (\Delta f_{i,k}^E)^{(l)} \cdot \vec{n}_{i,k} + C_{i,k}^{n,m} \cdot \Delta w_{o(i,k)}^{(l)} \right) S_{i,k} \\ - \frac{1}{\Omega_i} \sum_{k \in U_i} \left(\frac{1}{2} (\Delta f_{i,k}^E)^{(l)} \cdot \vec{n}_{i,k} + C_{i,k}^{n,m} \cdot \Delta w_{o(i,k)}^{(l)} \right) S_{i,k}$$

M2. Point Jacobi Actualisé (ou Symmetric Gauss-Seidel)

Balayage aller :

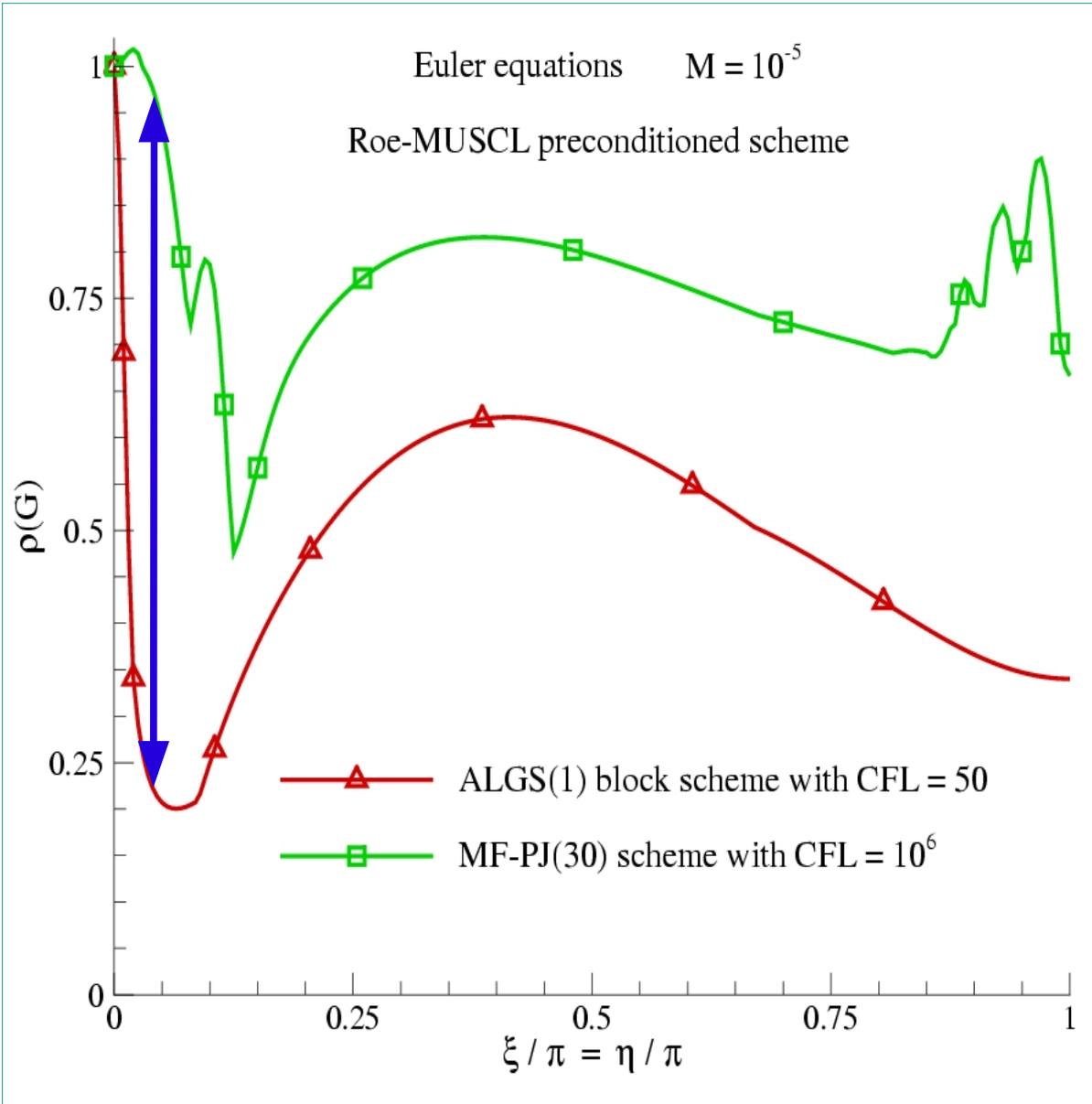
$$D_i^{n,m} \cdot \Delta w_i^{(l+\frac{1}{2})} = -R_i^{n,m} - \frac{1}{\Omega_i} \sum_{k \in L_i} \left(\frac{1}{2} (\Delta f_{i,k}^E)^{(l+\frac{1}{2})} \cdot \vec{n}_{i,k} + C_{i,k}^{n,m} \cdot \Delta w_{o(i,k)}^{(l+\frac{1}{2})} \right) S_{i,k} \\ - \frac{1}{\Omega_i} \sum_{k \in U_i} \left(\frac{1}{2} (\Delta f_{i,k}^E)^{(l)} \cdot \vec{n}_{i,k} + C_{i,k}^{n,m} \cdot \Delta w_{o(i,k)}^{(l)} \right) S_{i,k}$$

Balayage retour :

$$D_i^{n,m} \cdot \Delta w_i^{(l+1)} = -R_i^{n,m} - \frac{1}{\Omega_i} \sum_{k \in L_i} \left(\frac{1}{2} (\Delta f_{i,k}^E)^{(l+\frac{1}{2})} \cdot \vec{n}_{i,k} + C_{i,k}^{n,m} \cdot \Delta w_{o(i,k)}^{(l+\frac{1}{2})} \right) S_{i,k} \\ - \frac{1}{\Omega_i} \sum_{k \in U_i} \left(\frac{1}{2} (\Delta f_{i,k}^E)^{(l+1)} \cdot \vec{n}_{i,k} + C_{i,k}^{n,m} \cdot \Delta w_{o(i,k)}^{(l+1)} \right) S_{i,k}$$

➤ Pas de difficulté majeure

VN1. Analyse de stabilité pour les équations d'Euler



Faible amortissement
des modes d'erreur en
basses fréquences

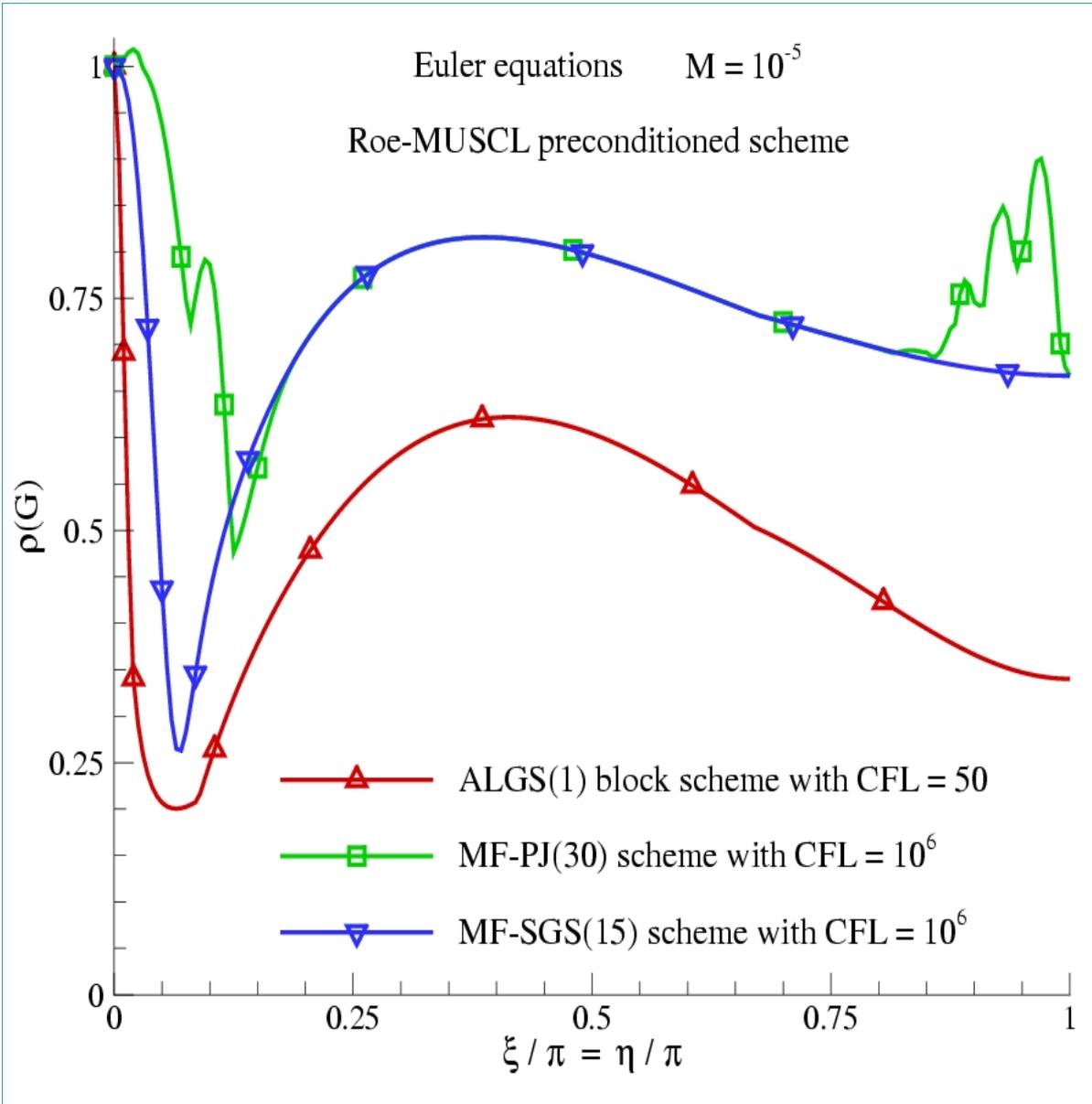


taux de convergence
médiocre en maillages
fins



Nécessité d'améliorer
l'algorithme MF

VN2. Comparaison des facteurs d'amplification



Nette amélioration de
l'amortissement des
modes d'erreur en
basses fréquences

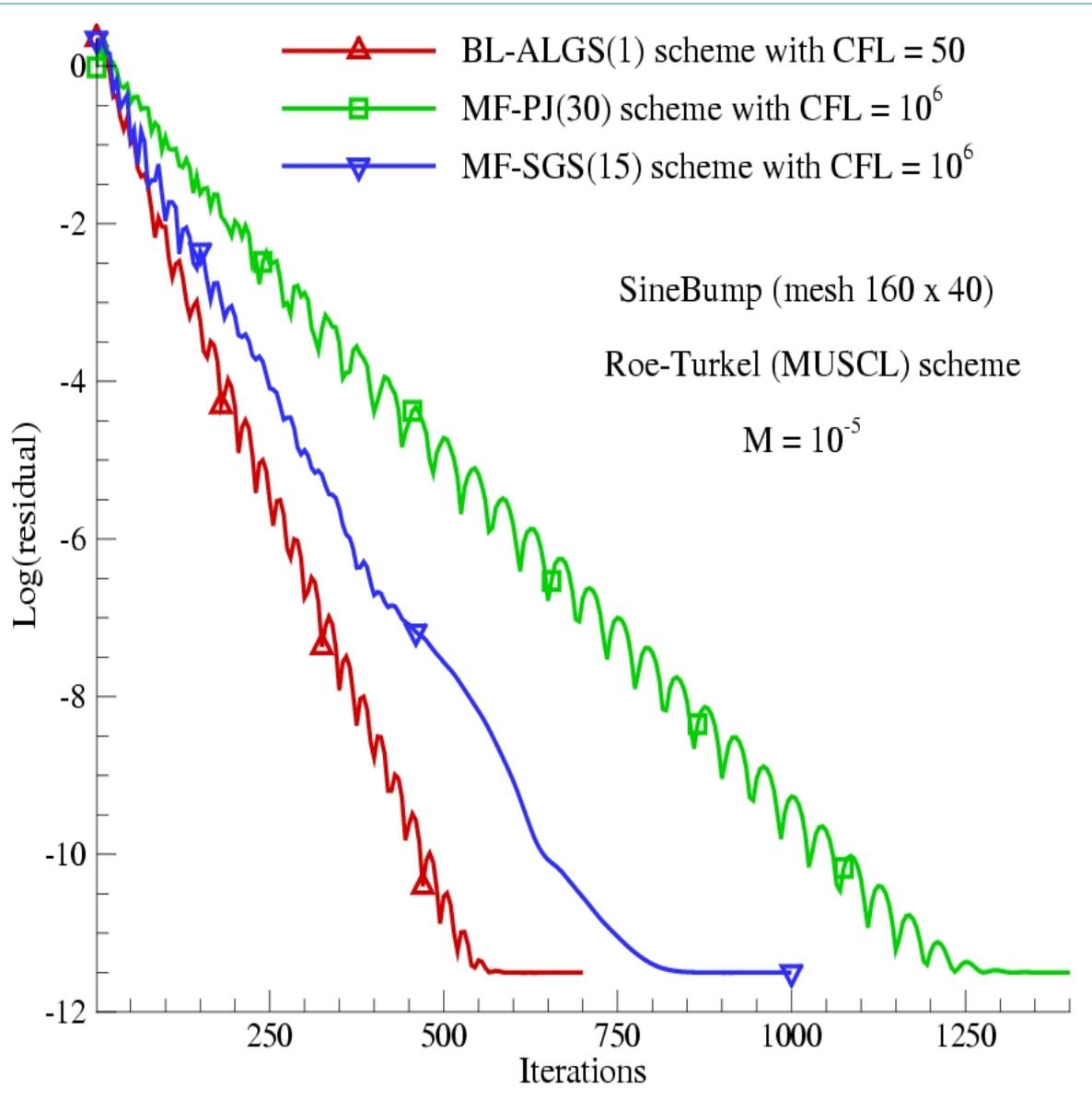


taux de convergence
garanti en maillages fins



Méthode MF-SGS
compétitive

VN3. Comparaison des taux de convergence sur le cas Sinebump



Hierarchie conforme à celle donnée par l'analyse Von Neumann

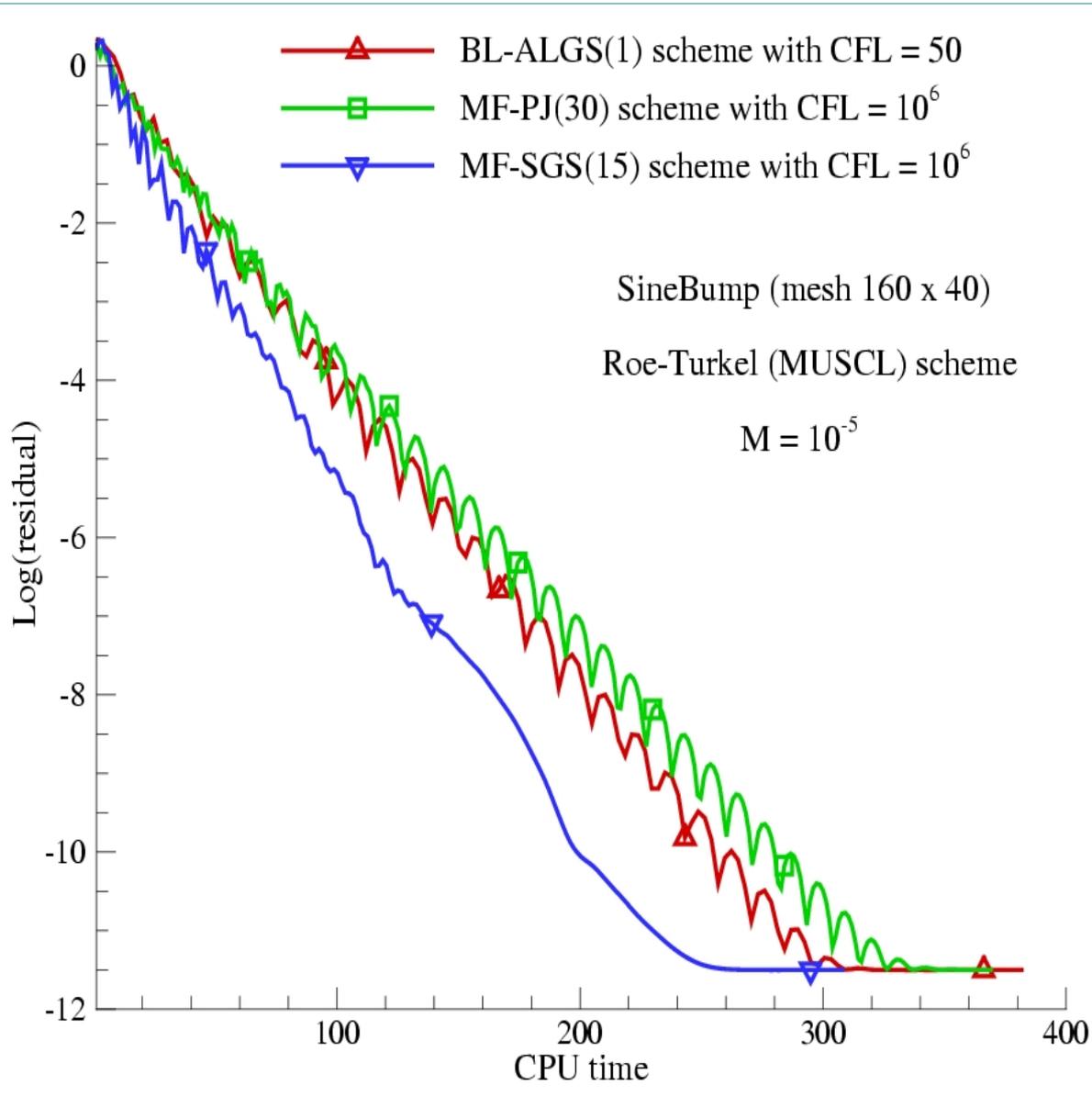


faible perte d'efficacité intrinsèque avec MF-SGS



Méthode MF-SGS compétitive

VN3. Comparaison des efficacité globale sur le cas Sinebump



Faible coût par itération



faible perte d'efficacité
intrinsèque avec
MF-SGS



Méthode MF-SGS
globalement plus
efficace

II-5. Optimisation du préconditionnement visqueux

Écoulement bas-Mach visqueux : $M \ll 1$ $Re_m = \frac{u \cdot \delta x}{\rho^V} \ll 1$ $AR = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} CFL_x = \frac{\lambda_1^+ \cdot \Delta t}{\delta x} \\ VNN_x = \frac{\rho^V \cdot \Delta t}{\delta x^2} \end{array} \right. \quad CFL_x(\text{optimum}) = VNN_x(\text{optimum})$$

Cut-off Euler : $\beta_E = M \Rightarrow \lambda_1^+ \approx u \Rightarrow CFL_x \approx \frac{u \cdot \Delta t}{\delta x} \ll \frac{\rho^V \cdot \Delta t}{\delta x^2} = VNN_x$

Cut-off visqueux : $\beta_V \approx \frac{\rho^V / \delta x}{c} \Rightarrow \lambda_1^+ \approx \rho^V / \delta x \Rightarrow CFL_x \approx \frac{\rho^V / \delta x \cdot \Delta t}{\delta x} = VNN_x$

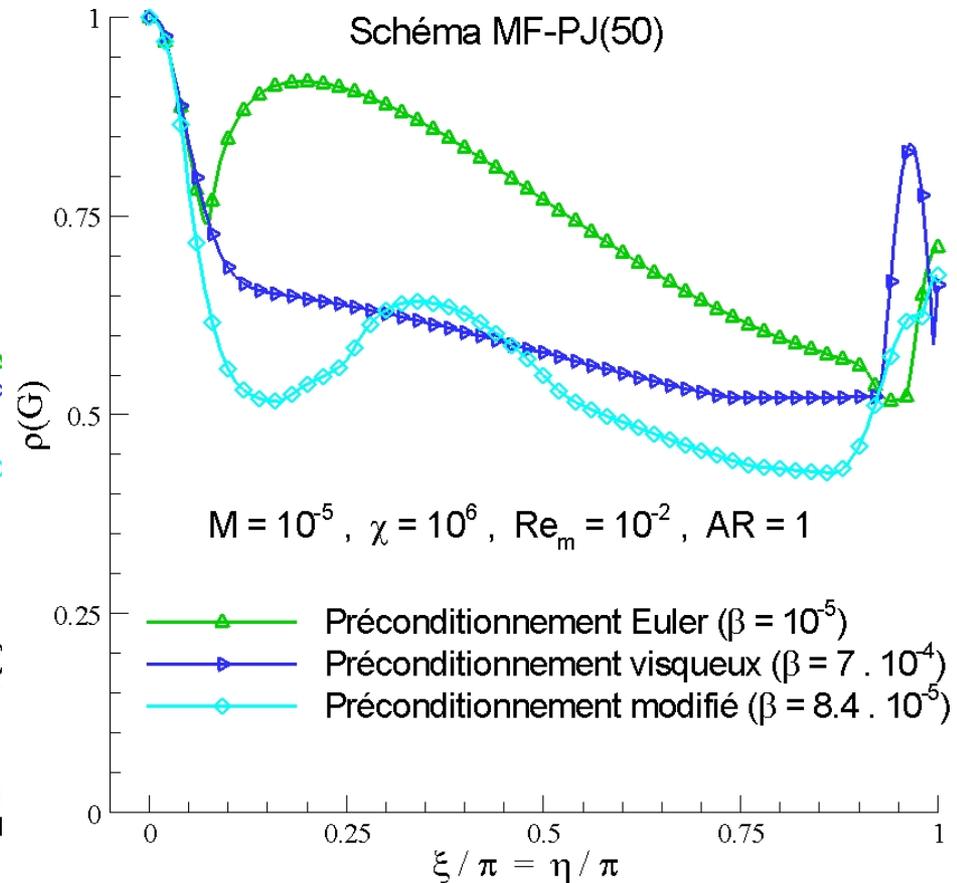
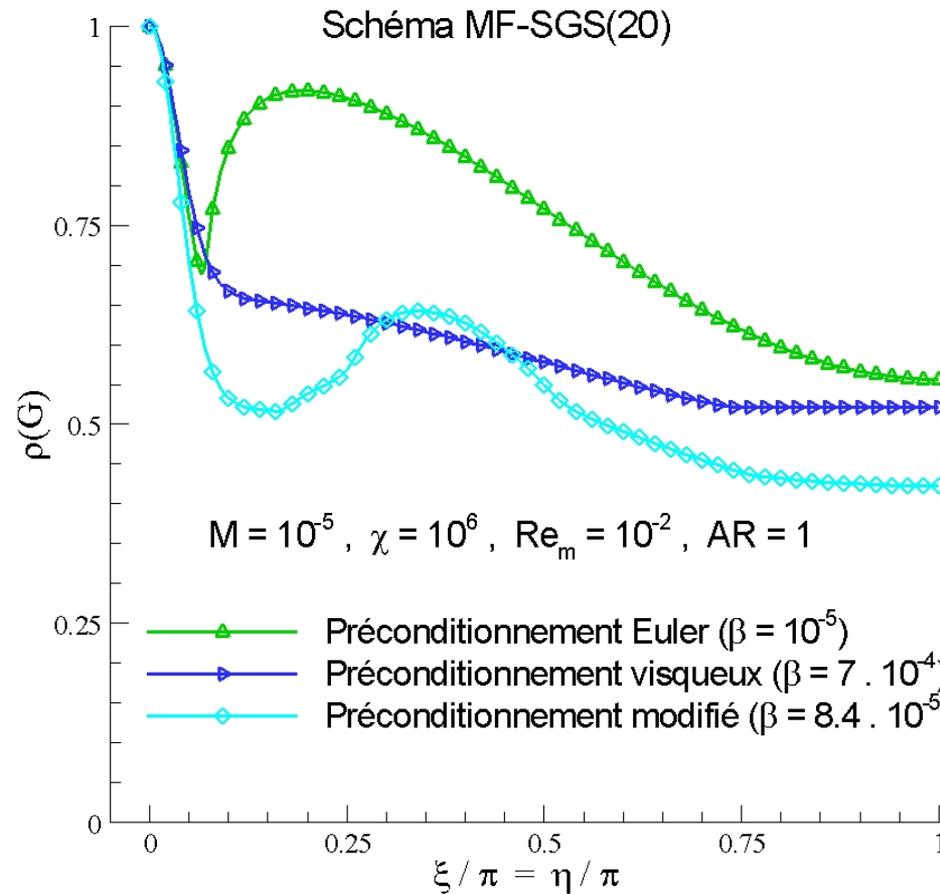
➤ Optimisation simultanée du CFL et du VNN

➤ Augmentation sensible de l'amortissement pour les schémas blocs

➤ Définition mal adaptée pour les schémas sans Matrice

Modification du "cut-off" bas-Mach visqueux $\Rightarrow \beta_V^{MF} = \sqrt{\beta_V \times M}$

PV. Efficacité avec le préconditionnement visqueux modifié



NK1. Méthode GMRES appliquée à une phase implicite sans Matrice

Système linéaire à résoudre : $M \cdot \Delta w^n = R$

avec $M = D + L + U$ où les matrices L, D, U sont constitués par les coefficients L_1, D, U_1 de la phase implicite sans Matrice

Préconditionneur LU-SGS : $P = (D + L) \cdot D^{-1} \cdot (D + U)$

$$\Rightarrow P^{-1} \cdot M \cdot \Delta w^n = P^{-1} \cdot R$$

L'algorithme GMRES fait usage des produits Matrice-Vecteur suivants :

$$\begin{cases} y_j = M \cdot v_j \\ w_j = P^{-1} \cdot y_j \end{cases}$$

NK2. Simplifications sans Matrice

$$y_j = M \cdot v_j \quad \Leftrightarrow \quad y_j = (L + D + U) \cdot v_j$$

$$w_j = P^{-1} \cdot y_j \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (D + L) \cdot w_j^* = y_j \\ (D + U) \cdot w_j = D \cdot w_j^* \end{cases}$$

**En procédant aux simplifications utilisées
au sein de la phase implicite sans Matrice,
on peut éviter le stockage des matrices L et U .**