

Approche Bayésienne pour l’Estimation des Paramètres de la Dynamique Latérale d’un Véhicule

Fabien Lionti

Université de Côte d’Azur - INRIA
2004 Rte des Lucioles, 06902 Valbonne
Email : fabien.lionti@inria.fr

Nicolas Gutowski

Université d’Angers - LERIA
2 Bd de Lavoisier, 49000 Angers, France
Email : nicolas.gutowski@univ-angers.fr

Sébastien Aubin

Direction Générale de l’Armement - Techniques Terrestres
Rue de la Chédditière, 49460 Montreuil-Juigné
Email : sebastien.aubin@intradef.gouv.fr

Philippe Martinet

Université de Côte d’Azur - INRIA
2004 Rte des Lucioles, 06902 Valbonne
Email : philippe.martinet@inria.fr

Résumé—L’estimation des paramètres d’un système dynamique non linéaire constitue un défi majeur dans de nombreux domaines de recherche et d’application. Dans ce contexte, ce papier présente une nouvelle méthode en deux étapes pour estimer les paramètres qui régissent la dynamique latérale d’un véhicule, en tenant compte de la rareté et du bruit des données. La méthode combine le lissage par spline des observations du système avec une approche bayésienne pour estimer les paramètres.

La première étape de cette méthode consiste à appliquer un lissage par spline aux observations des variables d’état du système. Cette étape permet de filtrer le bruit présent dans les données et d’obtenir des estimations précises des dérivées des variables d’état du système. Ainsi, la méthode proposée permet d’estimer les paramètres directement à partir des équations différentielles décrivant la dynamique du système, sans recourir à des méthodes d’intégration chronophages.

La deuxième étape repose sur l’estimation des paramètres à partir des résidus des équations différentielles, en utilisant une approche bayésienne appelée *likelihood-free ABC-SMC*. Cette approche bayésienne présente plusieurs avantages. Tout d’abord, elle permet de pallier la rareté des données en incorporant des connaissances a priori sur les caractéristiques physiques du véhicule. De plus, elle offre un niveau élevé d’interprétabilité en fournissant une distribution a posteriori sur les paramètres susceptibles d’avoir généré les données observées. L’utilisation de cette nouvelle méthode présente l’avantage de permettre une estimation robuste des paramètres de la dynamique latérale du véhicule, même lorsque les données sont limitées et bruitées.

I. INTRODUCTION

L’estimation des paramètres de systèmes dynamiques non linéaires est un problème de recherche largement exploré [1]. Une approche classique pour résoudre ce problème repose sur la minimisation d’une fonction objectif qui mesure l’écart entre les prédictions du modèle et les données observées, en utilisant des méthodes de descente de gradient [2]. Cependant, cette approche présente certaines limitations, notamment la possibilité de converger vers des minimums locaux plutôt que le minimum global, ainsi que la sensibilité du système aux conditions initiales.

Afin de surmonter ces limitations, diverses techniques ont été proposées. Par exemple, l’utilisation d’algorithmes d’op-

timisation globale tels que les algorithmes génétiques [3], le recuit simulé [4] ou encore l’optimisation par essaim de particules [5] permet de rechercher plus efficacement l’espace des paramètres à la recherche du minimum global. Les approches mentionnées sont limitées par le nombre de paramètres à estimer. En effet, lorsque le nombre de paramètres augmente, les temps de calcul augmentent eux aussi et de manière exponentielle. De plus, l’utilisation de méthodes d’intégration, comme la méthode de *Runge-Kutta* [6], pour comparer les prédictions aux observations entraîne des temps de calcul significatifs, car il est nécessaire d’intégrer le système pour chaque condition initiale étudiée.

Dans le cas d’observations bruitées, il peut être difficile de déterminer avec précision les conditions initiales d’intégration, ce qui peut entraîner des estimations biaisées lorsque le système est sensible à celles-ci. Afin de réduire cette sensibilité et éliminer l’étape d’intégration, une approche consiste en le lissage des observations par un spline [6] à partir duquel une estimation des dérivées des observations du système est obtenue. Il devient alors possible d’estimer les paramètres à partir du résidu de l’équation différentielle. Ce principe a été récemment étendu aux réseaux de neurones. Les *Physics-Informed Neural Networks* (PINN) [7] permettent d’interpoler des observations correspondant à un processus décrit par des équations aux dérivées partielles (EDP), tout en estimant les paramètres de ces équations. Cela est réalisé en s’appuyant sur le mécanisme de différenciation automatique afin d’optimiser les paramètres par descente de gradient à partir de l’erreur quadratique du résidu de l’EDP.

Dans le domaine de l’estimation robuste, les approches mentionnées précédemment sont limitées par leur incapacité à fournir une interprétation probabiliste des paramètres estimés. Cependant, des travaux récents ont cherché à combler cette lacune en incorporant des connaissances sur les distributions a priori des paramètres. Ces travaux s’inscrivent dans le cadre bayésien, offrant ainsi deux avantages : restreindre l’espace de recherche des paramètres grâce aux a priori spécifiés, tout en permettant une meilleure interprétabilité grâce à l’obtention

d'une distribution a posteriori sur les paramètres. L'approche décrite par [8] et [9] consiste à utiliser un processus gaussien pour interpoler et modéliser l'incertitude liée au bruit des observations d'un système dynamique. Étant donné que la dérivée d'un processus gaussien reste un processus gaussien [10], il est possible de définir une fonction de vraisemblance en combinant ce processus avec un schéma d'échantillonnage tel que l'algorithme de Metropolis-Hastings [11] ou de Gibbs [12]. Ce schéma permet d'évaluer une distribution a posteriori sur les paramètres en supposant une erreur normale entre les dérivées observées et celles prédites par le processus gaussien.

La difficulté de ces méthodes réside dans le paramétrage exigeant des méthodes d'échantillonnage, tel que le choix du nombre d'échantillons afin d'approximer la distribution a posteriori, ou le choix de la proposition de transition. Le choix des propositions de transition peut avoir un impact important sur l'efficacité et la performance des méthodes. Des propositions de transition mal spécifiées peuvent entraîner un taux d'acceptation faible ou une exploration inefficace de l'espace des échantillons. Il est souvent nécessaire de tester et d'ajuster différentes propositions de transition pour optimiser les performances des méthodes. De plus, la convergence des méthodes d'échantillonnage est une préoccupation majeure. Il est essentiel que les échantillons générés convergent vers la distribution cible. Cependant, dans certains cas, les méthodes peuvent converger lentement, en particulier lorsque la distribution cible présente des propriétés complexes telles que des modes multiples ou des régions de faible probabilité.

En parallèle des méthodes *likelihood-free* ont été mises au point afin de directement approximer la distribution a posteriori sans à avoir la nécessité de définir une fonction de vraisemblance qui est souvent difficile à établir ou coûteuse à évaluer. Dans ce contexte, la méthode *Approximate Bayes Computation (ABC)* [13] permet de fournir une approximation de la distribution a posteriori des paramètres en utilisant un échantillonnage basé sur la simulation. Cette approche repose sur un filtrage des paramètres qui auraient pu générer les données observées par l'utilisation d'une mesure de similarité entre les données simulées et les données observées. L'avantage de cette méthode réside dans sa simplicité d'utilisation car elle ne requiert pas de paramétrages complexes. Afin d'améliorer l'efficacité de *ABC*, l'approche *ABC-SMC* [14] pour *Sequential Monte Carlo*, permet d'augmenter l'efficacité de l'échantillonnage en minimisant le nombre de rejets grâce à un échantillonnage préférentiel qui se concentre sur les zones de l'espace des paramètres les plus probables par rapport aux données observées.

L'état de l'art effectué n'a pas permis d'identifier une application en lien avec l'estimation de paramètres dans le cadre d'un système dynamique non-linéaire de véhicule. Cependant, ces méthodes ont démontré leur efficacité dans l'estimation de paramètres de systèmes dynamiques liés à des processus biologiques [15] [16] [17]. L'approche proposée est évaluée sur des données de simulation et s'appuie sur un modèle bicyclette intégrant un modèle de pneumatiques de Pacejka [18]. La problématique questionnée dans cet article

concerne l'estimation des coefficients de Pacejka, ainsi que certains paramètres physiques du modèle tels que la position du centre de gravité et le moment d'inertie du véhicule. La méthode repose sur un lissage des observations par spline et l'application de l'approche *ABC-SMC* afin d'estimer la distribution a posteriori des paramètres. Ces travaux s'inscrivent plus globalement dans une volonté d'obtenir une modélisation de véhicules militaires terrestres, permettant ainsi d'étudier leur stabilité et de garantir un comportement sécuritaire. L'utilisation d'un modèle numérique permettrait de réduire les coûts associés aux campagnes d'essais, nécessitant aujourd'hui de tester le véhicule dans de nombreux environnements et sous différentes configurations.

Cet article est organisé comme suit : la section II décrit de manière générale le cadre bayésien appliqué à l'estimation de paramètres. La section III expose le principe de l'approche *ABC* ainsi que les différents paramètres associés. La section IV formalise le modèle dynamique utilisé. La section V décrit notre méthode. La section VI analyse les résultats d'expérimentations effectuées. Enfin, la dernière section VII conclut et expose les futurs travaux envisagés.

II. CADRE BAYÉSIEN

Le cadre bayésien offre une approche idéale pour l'inférence des paramètres des systèmes dynamiques lorsque plusieurs modèles peuvent potentiellement correspondre aux données observées. Dans cette approche, l'ensemble de données $\mathcal{D}$ est défini comme étant la représentation des observations d'un système dynamique tandis que $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ correspond à l'ensemble des paramètres candidats pour un système d'équations différentielles (ED).

L'équation de Bayes permet de calculer la probabilité a posteriori des paramètres θ étant données les données $\mathcal{D}$, comme suit :

$$P(\theta|\mathcal{D}) = \frac{P(\mathcal{D}|\theta) \cdot P(\theta)}{P(\mathcal{D})} \quad (1)$$

où :

- $P(\theta|\mathcal{D})$ représente la probabilité a posteriori des paramètres θ étant données les données $\mathcal{D}$.
- $P(\mathcal{D}|\theta)$ est la vraisemblance des données $\mathcal{D}$ étant données les paramètres θ .
- $P(\theta)$ est la probabilité a priori des paramètres θ .
- $P(\mathcal{D})$ est la probabilité marginale des données $\mathcal{D}$.

L'équation de Bayes permet de mettre à jour nos connaissances sur les paramètres du modèle en fonction des données observées et offre un cadre systématique pour incorporer des connaissances a priori dans le processus d'inférence.

Le cadre bayésien, dans sa forme initiale, nécessite d'établir la fonction de vraisemblance $P(\mathcal{D}|\theta)$, ce qui pose plusieurs défis. Les systèmes dynamiques non linéaires sont modélisés par des ED complexes. Établir une fonction de vraisemblance analytique peut être difficile, voire impossible. Cela peut nécessiter l'utilisation de techniques d'approximation ou de méthodes numériques pour estimer la vraisemblance. La

probabilité marginale $P(\mathcal{D})$ est calculée en intégrant la vraisemblance $P(\mathcal{D}|\theta)$ sur l'ensemble de l'espace des paramètres θ , pondéré par la probabilité a priori $P(\theta)$:

$$P(\mathcal{D}) = \int P(\mathcal{D}|\theta) \cdot P(\theta) d\theta \quad (2)$$

Dans de nombreux cas, cette intégrale n'a pas de forme analytique connue et ne peut pas être calculée directement. Cela est particulièrement vrai lorsque le modèle est non-linéaire et que la dimension des paramètres est élevée.

III. APPROXIMATE BAYES COMPUTATION

La méthode *ABC* (Algorithme 1) permet d'estimer la distribution a posteriori $P(\theta|\mathcal{D})$ sans avoir à spécifier la fonction de vraisemblance et sans avoir à calculer la probabilité marginale des données. Le seul pré-requis est de pouvoir simuler des données $\mathcal{D}^*$ à partir d'un modèle correspondant à différentes paramétrisations de θ .

Algorithm 1: Algorithme ABC

Data: Données observées $\mathcal{D}$, taille de l'échantillon N , seuil d'acceptation ϵ

Result: Approximation de la distribution a posteriori

while $i \leq N$ **do**

 Génération d'un échantillon $\tilde{\theta}$ à partir de la distribution a priori;

 Génération de données simulées $\mathcal{D}^*$ à partir de $\tilde{\theta}$;

 Calcul de la distance $\rho(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$;

if $\rho < \epsilon$ **then**

$\theta^i \leftarrow \tilde{\theta}$;

$i = i + 1$;

end

end

Cette approche reste inefficace dans le choix des échantillons θ au cours des itérations, car elle explore l'espace des paramètres sans favoriser les régions de l'espace les plus susceptibles d'engendrer une acceptation de l'échantillon. L'approche *ABC-SMC* (Algorithme 2) permet d'améliorer l'efficacité de l'échantillonnage en s'appuyant sur le principe d'utiliser efficacement les informations antérieures. Dans l'*ABC-SMC*, les échantillons de l'itération précédente sont utilisés pour générer de nouveaux échantillons. Cela permet de tirer parti des informations déjà acquises sur la distribution a posteriori et de concentrer les efforts de calcul sur les régions les plus prometteuses de l'espace des paramètres. Ainsi, en améliorant la qualité de l'échantillonnage, il est possible d'obtenir une amélioration progressive de l'approximation de la distribution a posteriori en utilisant une séquence de seuils décroissants de plus en plus stricts. La génération de nouveaux échantillons repose sur un mécanisme d'échantillonnage par importance des précédents échantillons en pondérant les chances de tirage. Chaque échantillon tiré est alors perturbé

Algorithm 2: Algorithme ABC-SMC

Data: Données observées $\mathcal{D}$, nombre d'itérations T , taille de l'échantillon N , seuils

$\epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_T$

Result: Approximation de la distribution a posteriori
Initialisation de l'échantillon $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^N$;

for $t \leftarrow 1$ **to** T **do**

while $i \leq N$ **do**

if $t = 1$ **then**

$\tilde{\theta} \leftarrow P(\theta)$;

end

else

 Tirer un échantillon $\tilde{\theta}_{t-1}$ à partir de l'ensemble des échantillons de l'itération précédente θ_{t-1} pondéré par w ;

$\tilde{\theta} \leftarrow P(\theta|\tilde{\theta}_{t-1})$;

end

if $P(\tilde{\theta}) \neq 0$ **then**

 Génération de données simulées $\mathcal{D}^*$ à partir de $\tilde{\theta}$;

 Calcul de la distance $\rho(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$;

if $\rho < \epsilon_t$ **then**

$\theta_t^i \leftarrow \tilde{\theta}$;

if $t \neq 1$ **then**

$w_t^i = \frac{P(\theta_t^i)}{\sum_{j=1}^N w_{t-1}^j K(\theta_t^i, \theta_{t-1}^j)}$

end

else

$w^i = 1$

end

$i = i + 1$;

end

end

end

for $j \leftarrow 1$ **to** N **do**

$w_t^j = \frac{w_t^j}{\sum_{i=1}^N w_t^i}$

end

end

par une fonction de perturbation K , souvent uniforme ou gaussienne, qui permet de modéliser la probabilité de transition $P(\theta|\theta_{t-1})$. Elle peut être paramétrisée pour contrôler l'amplitude des perturbations et ainsi influencer la diversité et l'exploration de l'espace des paramètres. Après génération de nouveaux échantillons, ils sont évalués à l'aide de la mesure d'adéquation ρ et les échantillons générant les données $\mathcal{D}^*$ les plus proches des observations $\mathcal{D}$ sont sélectionnés selon le seuil ϵ_t pour la prochaine itération du processus d'échantillonnage. Cette étape itérative est répétée jusqu'à ce que la convergence de la distribution a posteriori soit atteinte ou que d'autres critères de convergence soient satisfaits.

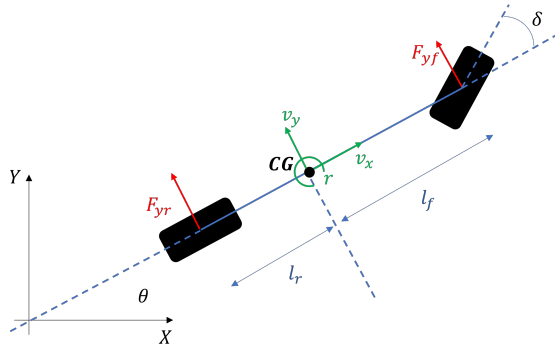


FIGURE 1 – Modèle bicyclette.

IV. MODÉLISATION DE LA DYNAMIQUE LATÉRALE D'UN VÉHICULE

A. Modèle bicyclette à deux degrés de liberté

Le modèle de bicyclette à deux degrés de liberté est une représentation simplifiée de la dynamique latérale d'un véhicule. Il est largement utilisé dans le domaine de la dynamique des véhicules pour analyser le comportement de conduite, la stabilité et la maniabilité des véhicules. En appliquant le principe fondamental de dynamique au modèle des forces décrit Figure 1 on obtient le système d'ED suivant :

$$\begin{cases} \dot{V}_y = \frac{F_{yf}}{m} \cos \delta_f + \frac{F_{yr}}{m} - v_x r \\ \dot{r} = \frac{L_f}{I_z} F_{yf} \cos \delta_f - \frac{L_r}{I_z} F_{yr} \end{cases} \quad (3)$$

La vitesse de lacet du véhicule est représentée par r , la distance des essieux avant par rapport au centre de gravité (CG) est représentée par l_f , la distance des essieux arrière par rapport au CG est représentée par l_r , et l'inertie en lacet du véhicule est représentée par I_z . Les forces latérales exercées par les pneus avant et arrière du véhicule sont modélisées à l'aide du modèle non-linéaire de Pacejka [18].

B. Modèle de Pacejka

Le modèle de Pacejka est un modèle dit hybride dans la mesure où il a été établi à partir de lois physiques en supposant une répartition parabolique des forces sur la zone de contact pneu/sol mais en se fondant également sur des observations phénoménologiques obtenues à partir de résultats d'essais. Ainsi, il s'agit d'un compromis entre un temps de calcul assez rapide et une précision acceptable. Le modèle de Pacejka, consiste à modéliser les forces exercées par la route sur les pneus.

$$F_{yf} = D \cdot \sin \left(C \cdot \arctan \left(B \cdot \left(\alpha_f - E \cdot \left(\alpha_f - \arctan (B \cdot \alpha_f - \arctan (B \alpha_f)) \right) \right) \right) \right) \quad (4)$$

$$F_{yr} = D \cdot \sin \left(C \cdot \arctan \left(B \cdot \left(\alpha_r - E \cdot \left(\alpha_r - \arctan (B \cdot \alpha_r - \arctan (B \alpha_r)) \right) \right) \right) \right) \quad (5)$$

B est appelé le coefficient de rigidité, C le coefficient de forme, D est la valeur maximale atteinte par F_y , E est le facteur de courbure.

Le modèle de Pacejka prend en entrée la dérive des pneumatiques avant α_f et arrière α_r , correspondant à la différence entre le vecteur vitesse réel v des pneumatiques et v_y (Figure 2). Cet angle de dérive est influencé par des facteurs tels que la vitesse latérale du véhicule, la vitesse de rotation, la distance entre l'essieu avant/arrière et le centre de gravité du véhicule, ainsi que l'angle de braquage des roues avant.

$$\begin{cases} \alpha_f = \frac{v_y + L_f r}{v_x} - \delta_f \\ \alpha_r = \frac{v_y - L_r r}{v_x} \end{cases} \quad (6)$$

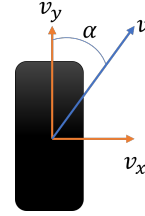


FIGURE 2 – Dérive latérale

V. MÉTHODE EMPLOYÉE

A. Génération des données

À partir du modèle décrit précédemment les données sont utilisées pour l'estimation des paramètres $\theta = \{B, C, D, E, l_f, l_r, I_z\}$. Le système d'ED est intégré par méthode de Runge-Kutta avec une période d'échantillonnage de 0.01 secondes pour une durée de 60 secondes. Un bruit gaussien est additionné aux trajectoires obtenues de moyenne nulle et de variance $\sigma_{v_y}^2 = 2.5e^{-3}$ à v_y et $\sigma_r^2 = 6.25e^{-6}$ à r . les paramètres d'intégrations utilisés sont les suivants :

Paramètre	B	C	D	E	l_f	l_r	I_z	m	v_x
Valeur	3	2	1	1	1.5	3	1.9	1500	30

B. Paramétrages de la méthode

La méthode développée (Figure 3) se déroule en deux étapes. Dans un premier temps, les observations obtenues sont lissées pour les variables d'état du système v_y et r à l'aide d'un spline cubique. Afin de filtrer le bruit des observations, le spline est régularisé en pénalisant sa courbure de manière à ne pas interpoler le bruit des observations. Deux fonctions $S_{v_y}(x)$ et $S_r(x)$ sont obtenues permettant d'approximer les dérivées des deux variables d'état du système $\dot{S}_{v_y}(x)$ et $\dot{S}_r(x)$ malgré le bruit initialement présent dans les observations. $x \in X$ correspond à la position des observations au cours du temps, $X = \{0.01, 0.02, \dots, 60.0\}$.

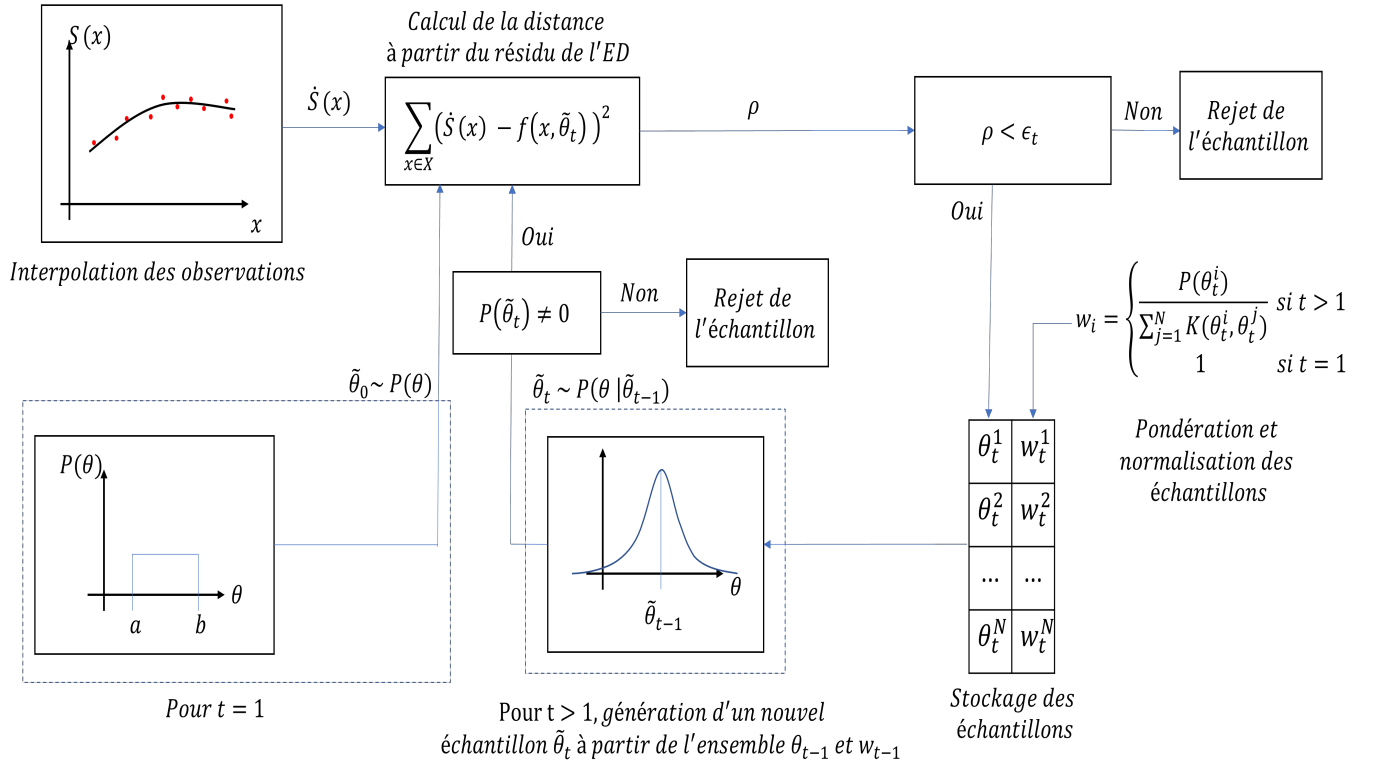


FIGURE 3 – Description générale de la méthode : La fonction $S(x)$ correspond à une interpolation réalisée par spline cubique sur les observations d'une variable d'état. Les différentes étapes au cours des itérations t de l'algorithme ABC-SMC y sont représentées. $f(x, \theta_t)$ représente une équation différentielle paramétrée par θ_t .

Le résidu de l'ED décrivant la dynamique du système est défini de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{S}_{vy}(x) - \frac{F_{yf}}{m} \cos \delta_f + \frac{F_{yr}}{m} - v_x S_r(x) = 0 \\ \dot{S}_r(x) - \frac{L_f}{I_z} F_{yf} \cos \delta_f - \frac{L_r}{I_z} F_{yr} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Une approximation de la solution de ce système d'ED est donnée pour :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \rho(\theta) \quad (8)$$

avec :

$$\rho(\theta) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} \left(\left(\dot{S}_{vy}(x) - \frac{F_{yf}}{m} \cos \delta_f + \frac{F_{yr}}{m} - v_x S_r(x) \right)^2 + \left(\dot{S}_r(x) - \frac{L_f}{I_z} F_{yf} \cos \delta_f - \frac{L_r}{I_z} F_{yr} \right)^2 \right) \quad (9)$$

La valeur de $\rho(\theta)$ correspond à une métrique d'adéquation entre les paramètres θ et la solution de l'ED. $\rho(\theta)$ est utilisée en tant que distance au sein de l'algorithme ABC-SMC de manière à rejeter les paramètres qui ont peu de chances de correspondre à une solution du système d'ED.

Afin de contraindre la recherche des solutions de l'ED, un a priori uniforme $P(\theta) = \text{unif}(a, b)$ est positionné sur chacun des 7 paramètres à estimer :

Paramètre	B	C	D	E	l_f	l_r	I_z
a	2.4	1.4	0.4	0.4	0.9	2.4	1.3
b	4	3	2	2	2.5	4	2.9

Un nombre d'itérations $T = 8$ est spécifié, pour chacune des itérations $N = 2000$ échantillons sont générés. Afin de filtrer les échantillons au cours de chacune des itérations, les seuils utilisés sont les suivants $\epsilon_t = \{0.5, 0.3, 0.15, 0.05, 0.025, 0.02, 0.015, 0.0125\}$

La fonction de perturbation $P(\theta | \tilde{\theta}_{t-1}) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ utilisée est une Gaussienne de variance $\sigma^2 = 0.01$ et $\mu = \tilde{\theta}_{t-1}$

VI. RÉSULTATS OBTENUS

La Figure 4 permet d'observer la convergence des échantillons au cours des itérations de l'algorithme ABC-SMC. Ces échantillons explorent l'espace des paramètres contraint par la distribution a priori $P(\theta)$ et convergent progressivement vers une estimation de la densité de probabilité a posteriori $P(\theta | \mathcal{D})$, qui est approximée par les échantillons de la septième population.

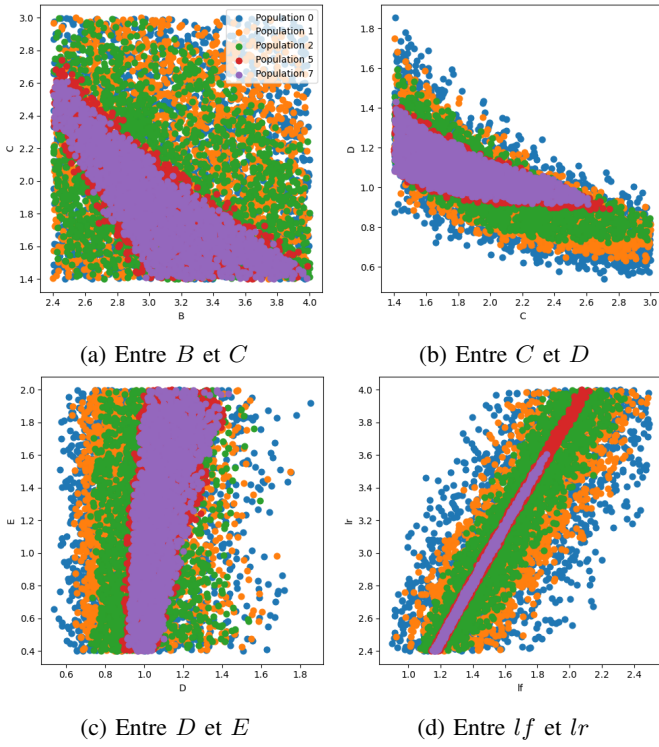


FIGURE 4 – Diagrammes de paires montrant la convergence des échantillons vers la distribution a posteriori.

L'approche *ABC-SMC*, s'inscrit dans une démarche globale grâce à la distribution de probabilité a posteriori obtenue. Cette distribution fournit un support pour analyser d'un point de vue statistique la sensibilité des différents paramètres du système vis-à-vis des observations utilisées. Afin d'illustrer cette démarche, les résultats présentés dans cette section s'intéressent dans un premier temps à l'analyse de la sensibilité des paramètres du modèle de la dynamique latérale d'un véhicule. Afin de visualiser la distribution finale obtenue, la Figure 6 et la Figure 10 (présente en annexe) montrent une estimation de la densité de probabilité a posteriori par densité de noyaux basée sur les échantillons finaux obtenus. Les paramètres présentant une variance élevée indiquent une faible sensibilité du système à leur égard, ce qui signifie que ces dimensions de l'espace de recherche ont une influence limitée sur les chances qu'un échantillon soit accepté ou rejeté. La Figure 5 se focalise sur les paires de paramètres faisant apparaître des corrélations indiquant une sensibilité du système à ceux-ci. Ces graphiques exposent des corrélations entre l_f et l_r , faisant référence à la longueur du véhicule et à la position du centre de gravité. Ils montrent également des corrélations entre les paramètres C et D , ainsi qu'entre C et B . En complément de ces corrélations, le paramètre D présente un faible écart-type, ce qui correspond, dans le modèle de Pacejka, à la force maximale pouvant être générée par les pneumatiques sur le sol. Cette sensibilité est cohérente avec les données simulées, qui représentent des trajectoires en courbe avec une vitesse élevée. L'estimation de E se révèle éloignée de celui utilisé pour simuler les données. La Figure 6 montre

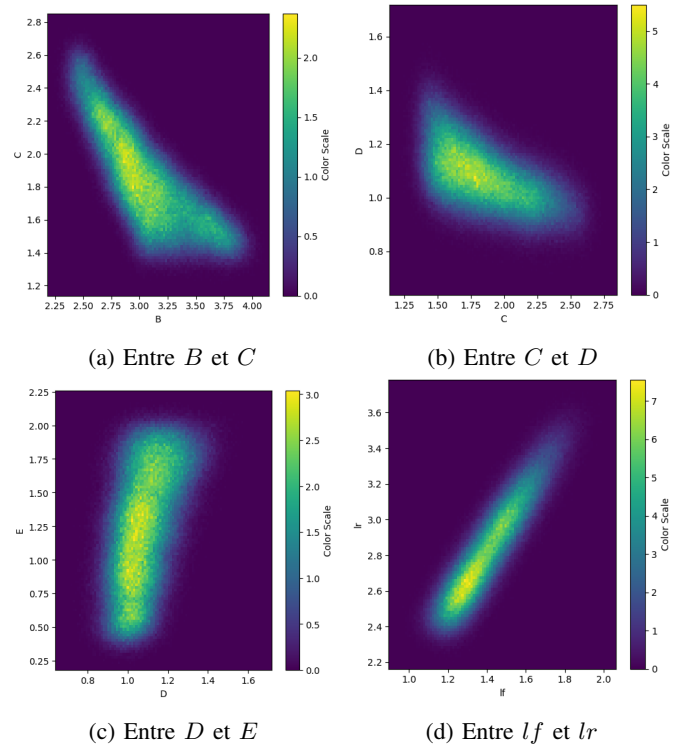


FIGURE 5 – Diagramme de paires issu d'une estimation par densité à noyaux sur les échantillons obtenus

une dispersion importante dans la distribution de ce paramètre. Cette dispersion s'explique par le fait que le paramètre E représente le facteur de courbure atteint au pic d'adhérence. Une estimation précise de ce facteur de courbure nécessiterait de soumettre le véhicule à des dynamiques plus poussées, engendrant des situations de glissement potentiellement à risque. L'analyse des distributions de probabilité obtenues offre une interprétation sur l'observabilité des paramètres du système.

Parmi tous les échantillons obtenus lors de la dernière itération de l'algorithme *ABC-SMC*, l'échantillon $\hat{\theta}$ ayant généré une mesure $\rho(\hat{\theta})$ minimale est retenu :

Paramètre θ	B	C	D	E	l_f	l_r	I_z
$\hat{\theta}$	2.961	1.723	1.176	1.685	1.507	3.009	1.798
$Ecart - type$	0.348	0.291	0.095	0.427	0.153	0.269	0.327

Les Figures 7 et 8 permettent de visualiser l'interpolation des observations réalisées avec le spline cubique. L'intégration du système avec pour valeur de paramètres $\hat{\theta}$ permet d'obtenir une solution très proche de la trajectoire modélisée par le spline. L'erreur RMSE est calculé entre les trajectoires obtenues par intégration du système avec $\hat{\theta}$ et les observations :

Paramètre	v_y	r
$\hat{\theta}$	0.0398	0.0020
θ^*	0.0397	0.0020

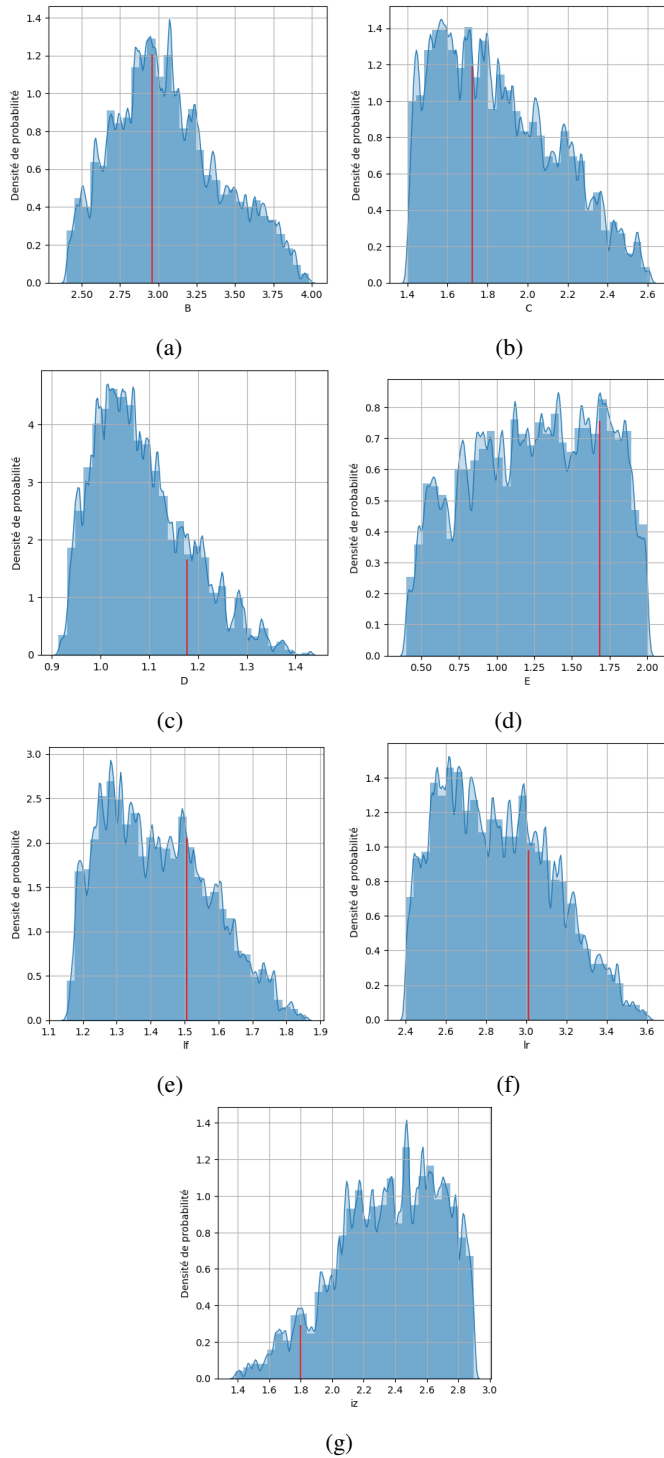


FIGURE 6 – Distributions de probabilités obtenues pour chacun des 7 paramètres estimés. La courbe représente l’approximation de la distribution réalisée avec une estimation par densité de noyaux. En rouge est tracée la valeur de $\hat{\theta}$ pour chacun des paramètres

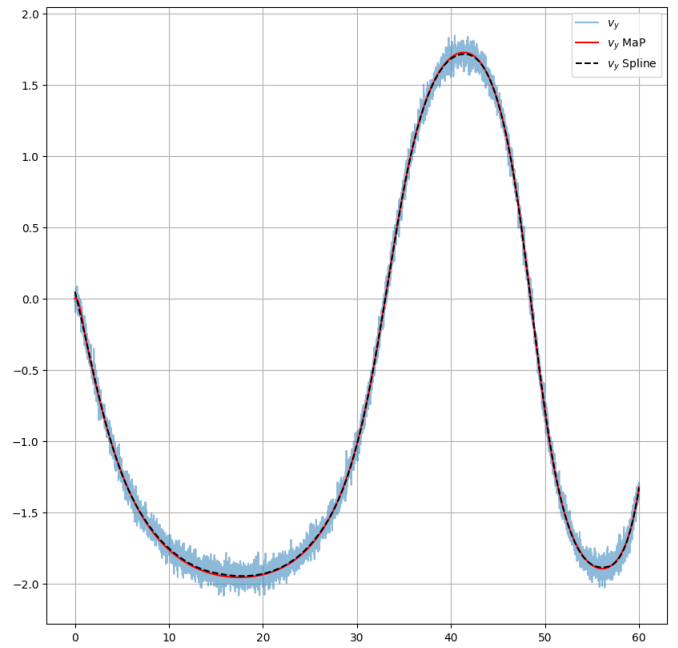


FIGURE 7 – Évolution de $v_y(x)$. En rouge la trajectoire suivie pour la paramétrisation $\hat{\theta}$, bleu par θ^* , en pointillé l’interpolation $S_{v_y}(x)$

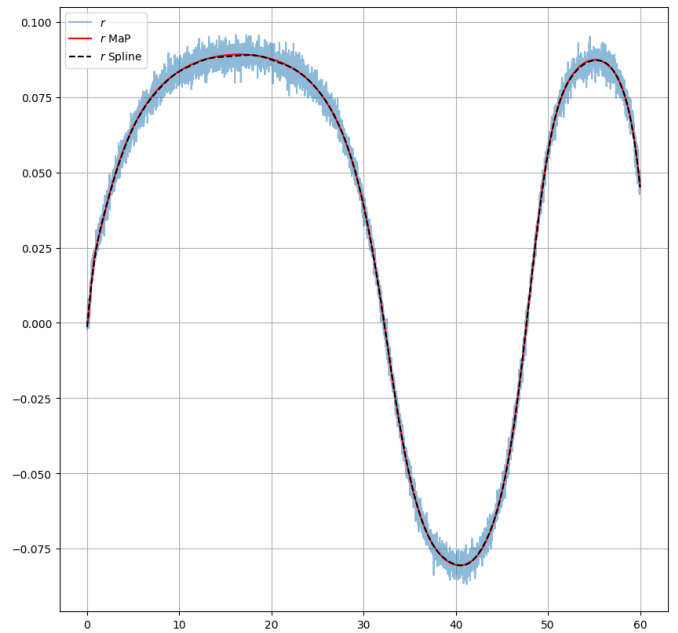


FIGURE 8 – Évolution de $r(x)$. En rouge la trajectoire suivie pour la paramétrisation $\hat{\theta}$, bleu par θ^* , en pointillé l’interpolation $S_r(x)$

L'erreur RMSE obtenue à la suite de l'intégration générée par les paramètres θ^* représente notre référence de base. Cette erreur correspond au bruit additionnel ajouté à chacune des variables d'état. En comparant l'erreur RMSE entre les paramètres $\hat{\theta}$ et celle obtenue avec θ^* , nous constatons que les paramètres estimés par notre méthode génèrent une erreur RMSE similaire à celle de θ^* pour chacune des deux variables d'état. Cela démontre que notre méthode a été capable de filtrer le bruit des observations et d'identifier un ensemble de paramètres qui auraient pu être à l'origine des données observées.

En raison de la faible quantité de données et de la faible sensibilité du système à certains des paramètres, les densités de probabilité a posteriori pour certains des paramètres sont relativement plates et présentent de nombreux modes (Figure 6). Ces modes correspondent à des minima locaux par rapport à la métrique ρ établie. Les positions marquées en rouge au sein de chacune de ces distributions correspondent à la valeur de chacune des composantes de $\hat{\theta}$. Ces valeurs prises indépendamment ne permettent pas d'évaluer visuellement le pic correspondant au maximum de la distribution a posteriori, ce qui explique pourquoi certaines valeurs semblent éloignées du pic d'amplitude maximale.

VII. CONCLUSION

La méthode proposée permet d'obtenir une approximation de la distribution a posteriori des paramètres liés à la dynamique latérale d'un véhicule. Le lissage par spline permet de filtrer le bruit présent dans les observations et de travailler directement sur une estimation des dérivées des variables d'état du système. Cela ouvre la voie à l'utilisation de l'approche bayésienne *ABC-SMC* en utilisant une métrique de distance basée sur le résidu de l'équation différentielle. En utilisant cette métrique, nous pouvons nous dispenser des temps de calcul liés à l'intégration du système, en favorisant la génération d'un plus grand nombre d'échantillons avec un seuil de rejet plus strict, ce qui permet d'obtenir une meilleure convergence vers la densité de probabilité a posteriori.

L'apport de connaissances a priori permet de compenser la faible quantité d'observations disponibles en restreignant l'espace d'exploration des paramètres à estimer. L'obtention d'une distribution de probabilité a posteriori permet d'étudier la sensibilité du système et la nature des relations entre ses différents paramètres, offrant ainsi une interprétabilité des solutions obtenues.

Nous partons de l'hypothèse que le modèle utilisé pour générer les observations est similaire au modèle pour lequel nous cherchons à estimer les paramètres. Pour renforcer la robustesse de notre approche, nous prévoyons d'estimer les paramètres d'un système d'équations différentielles tout en tenant compte simultanément des divergences entre le modèle choisi et les observations.

VIII. REMERCIEMENT

Ces recherches sont soutenues financièrement par le Ministère des Armées via l'Agence de l'Innovation de Défense (AID) et par l'Institut National de Recherche en Informatique et Automatique (INRIA).

RÉFÉRENCES

- [1] N. K. Sinha, "System identification - theory for the user : Lennart Ljung," *Autom.*, vol. 25, no. 3, pp. 475–476, 1989. [Online]. Available : <http://dblp.uni-trier.de/db/journals/automatica/automatica25.html#Sinha89>
- [2] L. T. Biegler, J. J. Damiano, and G. E. Blau, "Nonlinear parameter estimation : A case study comparison," *AIChE Journal*, vol. 32, no. 1, pp. 29–45, 1986. [Online]. Available : <https://aiche.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/aic.690320105>
- [3] S. Wang and X. Xu, "Parameter estimation of internal thermal mass of building dynamic models using genetic algorithm," *Energy Conversion and Management*, vol. 47, no. 13, pp. 1927–1941, 2006. [Online]. Available : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196890405002311>
- [4] A. Eftaxias, J. Font, A. Fortuny, A. Fabregat, and F. Stüber, "Nonlinear kinetic parameter estimation using simulated annealing," *Computers Chemical Engineering*, vol. 26, no. 12, pp. 1725–1733, 2002. [Online]. Available : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098135402001564>
- [5] M. Schwaab, E. C. Biscaia, Jr., J. L. Monteiro, and J. C. Pinto, "Nonlinear parameter estimation through particle swarm optimization," *Chemical Engineering Science*, vol. 63, no. 6, pp. 1542–1552, 2008. [Online]. Available : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0009250907008755>
- [6] U. M. Ascher and L. R. Petzold, *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, 1st ed. USA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [7] M. Raissi, P. Perdikaris, and G. Karniadakis, "Physics-informed neural networks : A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations," *Journal of Computational Physics*, vol. 378, pp. 686–707, 2019. [Online]. Available : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999118307125>
- [8] D. Barber and Y. Wang, "Gaussian processes for bayesian estimation in ordinary differential equations," in *International Conference on Machine Learning*, 2014.
- [9] B. Calderhead, M. Girolami, and N. Lawrence, "Accelerating bayesian inference over nonlinear differential equations with gaussian processes," in *Advances in Neural Information Processing Systems*, D. Koller, D. Schuurmans, Y. Bengio, and L. Bottou, Eds., vol. 21. Curran Associates, Inc., 2008. [Online]. Available : https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2008/file/07563a3fe3bbe7e3ba8431ad9d055af-Paper.pdf
- [10] C. E. Rasmussen and C. K. I. Williams, *Gaussian processes for machine learning.*, ser. Adaptive computation and machine learning. MIT Press, 2006.
- [11] S. Chib and E. Greenberg, "Understanding the metropolis-hastings algorithm," *The American Statistician*, vol. 49, no. 4, pp. 327–335, 1995. [Online]. Available : <http://www.jstor.org/stable/2684568>
- [12] G. Casella and E. I. George, "Explaining the gibbs sampler," *The American Statistician*, vol. 46, no. 3, pp. 167–174, 1992. [Online]. Available : <http://dx.doi.org/10.2307/2685208>
- [13] J.-M. Marin, P. Pudlo, C. P. Robert, and R. Ryder, "Approximate Bayesian computational methods," *Statistics and Computing*, vol. 22, no. 6, Nov. 2012. [Online]. Available : <https://hal.science/hal-00567240>
- [14] T. Toni, D. Welch, N. Strelkowa, A. Ipsen, and M. P. Stumpf, "Approximate bayesian computation scheme for parameter inference and model selection in dynamical systems," *Journal of the Royal Society Interface*, vol. 6, no. 31, pp. 187–202, 2009.
- [15] J. Liepe, P. Kirk, S. Filippi, T. Toni, C. P. Barnes, and M. P. H. Stumpf, "A framework for parameter estimation and model selection from experimental data in systems biology using approximate bayesian computation," *Nature Protocols*, vol. 9, no. 2, pp. 439–456, 2014. [Online]. Available : <https://doi.org/10.1038/nprot.2014.025>
- [16] M. Secrier, T. Toni, and M. P. H. Stumpf, "The abc of reverse engineering biological signalling systems," *Mol. BioSyst.*, vol. 5, pp. 1925–1935, 2009. [Online]. Available : <http://dx.doi.org/10.1039/B908951A>
- [17] G. Lillacci and M. Khammash, "Parameter estimation and model selection in computational biology," *PLOS Computational Biology*, vol. 6, no. 3, pp. 1–17, 03 2010. [Online]. Available : <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000696>
- [18] H. Pacejka, E. Bakker, W. Pacejka, B. Hans, and M. Afsar, *Tyre and Vehicle Dynamics*. Elsevier Science, 2006.

ANNEXE

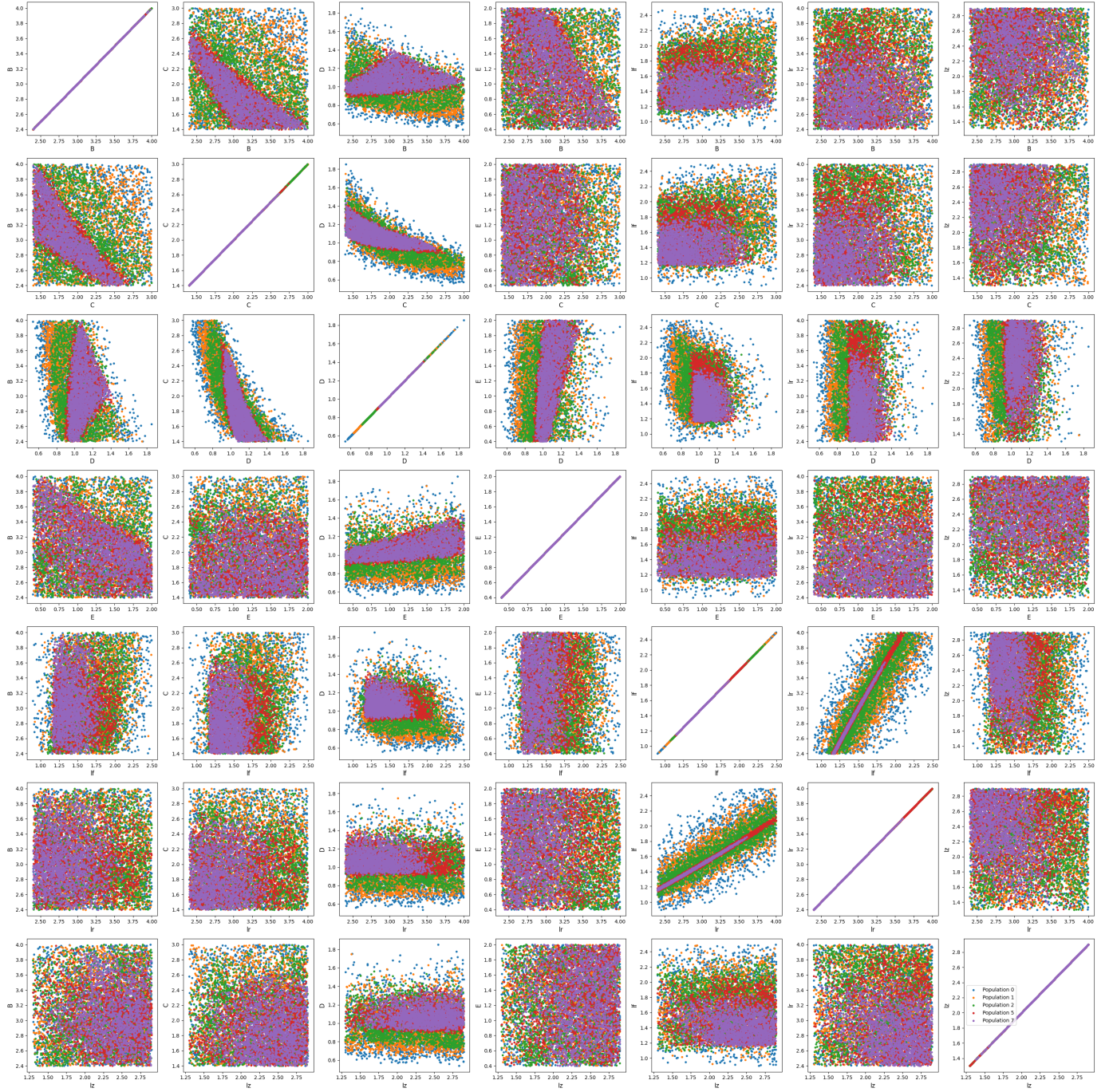


FIGURE 9 – Graphique de paires entre chacun des paramètres à estimer permettant de visualiser la convergence des échantillons vers la distribution de probabilité a posteriori au cours des itérations de l’algorithme *ABC-SMC*

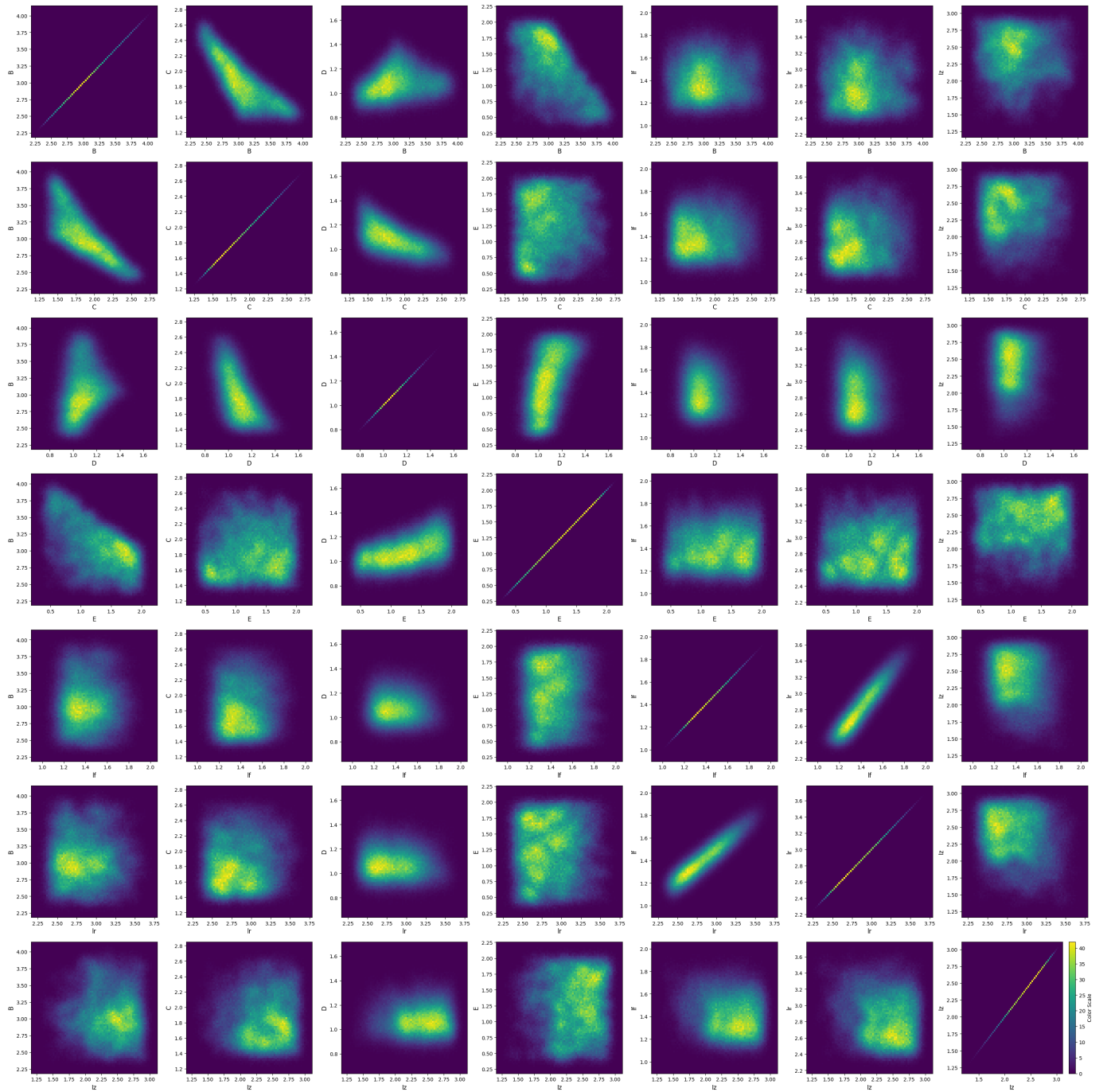


FIGURE 10 – Graphique de paires entre chacun des paramètres à estimer permettant de visualiser la densité de probabilité obtenue à partir de l’algorithme *ABC-SMC*. La densité est obtenue par estimation de densité par noyau appliqué aux échantillons correspondant à la dernière population de l’algorithme *ABC-SMC*