Polytech'Nice
Département MAM
Option MAM5 INUM

Examen de Lois de conservation et modèles de trafic

Paola Goatin
18 février 2013

Notes du cours et documents autorisés. 3 pages d'énoncé.
Durée de l'épreuve : 2h.

On considère le système de Aw et Rascle pour la modélisation macroscopique du trafic routier :

$$\begin{aligned} &\rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ &(\rho(v + p(\rho)))_t + (\rho v(v + p(\rho)))_x = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

où $\rho > 0$ est la densité des véhicules, v leur vitesse moyenne et p joue le rôle d'un facteur d'anticipation (on assume $p'(\rho) > 0$ et $p''(\rho) \geq 0$, par exemple on pourra prendre $p(\rho) = \rho$).

1. **(3 points)** Ecrire le système sous la forme d'un système de lois de conservation
$$\mathbf{u}_t + f(\mathbf{u})_x = 0$$
(expliciter le vecteur des quantités conservées $\mathbf{u}$ et la fonction flux). En se plaçant dans les variables $\mathbf{v} = (\rho, v)$, montrer que le système (1) est équivalent au système
$$\begin{pmatrix} \rho_t \\ v_t \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \rho_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} v & \rho \\ 0 & v - \rho p'(\rho) \end{pmatrix}.$$
Calculer les valeurs propres de la matrice A et montrer que le système est strictement hyperbolique pour $\rho > 0$. Vérifier que les valeurs propres sont naturellement ordonnées ($\lambda_1(\mathbf{v}) < \lambda_2(\mathbf{v})$), ce qui permet de définir sans ambiguïté les 1- et 2-champs caractéristiques.
Que se passe-t-il quand $\rho = 0$ (dans le vide) ?
2. **(3 points)** Calculer les vecteurs propres de la matrice A et montrer que le premier champ caractéristique est vraiment non-linéaire, tandis que le deuxième est linéairement dégénéré.
3. **(2 points)** Calculer les invariants de Riemann du système (les chercher sous la forme $W_i(\rho, v) = v + \phi_i(\rho)$, $i = 1, 2$).
4. **(4 points)** Soit une détente de la première famille reliant un état gauche (ρ_L, v_L) à un état droit (ρ, v) :.
$$W_1(\rho, v) = W_1(\rho_L, v_L).$$

Montrer que les états (ρ_L, v_L) et (ρ, v) vérifient la condition de Rankine-Hugoniot (pour une certaine vitesse σ à expliciter). Vérifier que les ondes de la deuxième famille on la même propriété (ils s'agit de discontinuités de contact). Cela signifie que les courbes des détentes coïncident avec les courbes des chocs et le système est dit "de Temple".
Tracer ces courbes dans le demi-plan $\{(\rho, v) \in \mathbb{R}^2 \colon \rho > 0\}$.

5. **(4 points)** On considère $p(\rho) = \rho$ et les données de Riemann $\mathbf{v}_L = (\rho_L, v_L) = (3, 1)$ et $\mathbf{v}_R = (\rho_R, v_R) = (5, 3)$. Calculer la solution du problème
$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + f(\mathbf{u})_x = 0, \\ \mathbf{u}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{v}_L) & x < 0, \\ \mathbf{u}(\mathbf{v}_R) & x > 0, \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$
pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. En particulier, donner la valeur du flux de Godunov $F_G(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ en $x = 0$.

6. **(4 points)** Comme au point précédant, avec $\mathbf{v}_L = (\rho_L, v_L) = (1, 3)$ et $\mathbf{v}_R = (\rho_R, v_R) = (5, 5)$.