Polytech'Nice
Département MAM
Option MAM5 INUM

Examen de Lois de conservation et modèles de trafic du 18 février 2013

Corrigé

1. **(3 points)** On a

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho(v + p(\rho)) \end{pmatrix}, \qquad f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v(v + p(\rho)) \end{pmatrix}.$$

La deuxième équation se réécrit

$$\begin{aligned} 0 &= (v + p(\rho))\left(\rho_t + (\rho v)_x\right) + \rho\left((v + p(\rho))_t + v(v + p(\rho))_x\right) \\ &= v_t + v v_x + p'(\rho)\left(\rho_t + v\rho_x\right) \\ &= v_t + v v_x - p'(\rho)\rho v_x \\ &= v_t + \big(v - \rho p'(\rho)\big) v_x \end{aligned}$$

Les valeur propres sont $\lambda_1 = v - \rho p'(\rho)$ et $\lambda_2 = v$. Puisque $\rho p'(\rho) > 0$ pour $\rho > 0$, on a $\lambda_1 < \lambda_2$. Le système est donc strictement hyperbolique pour $\rho > 0$. Pour $\rho = 0$, les valeurs propres coïncident : $\lambda_1 = \lambda_2$.

2. **(3 points)** Les vecteurs propres sont

$$r_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ p'(\rho) \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et on a

$$\begin{aligned} \nabla\lambda_1 \cdot r_1 &= \begin{pmatrix} -p'(\rho) - \rho p''(\rho) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ p'(\rho) \end{pmatrix} = 2p'(\rho) + \rho p''(\rho) > 0, \\ \nabla\lambda_2 \cdot r_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

3. **(2 points)** La condition

$$\nabla W_1 \cdot r_1 = \begin{pmatrix} \phi'(\rho) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ p'(\rho) \end{pmatrix} = p'(\rho) - \phi'(\rho) = 0$$

donne $W_1 = v + p(\rho)$. La condition

$$\nabla W_2 \cdot r_2 = \begin{pmatrix} \phi'(\rho) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi'(\rho) = 0$$

donne $W_2 = v$.

4. **(4 points)** La condition sur les invariants de Riemann donne la relations suivante

$$W_1(\rho, v) = W_1(\rho_L, v_L) \Longrightarrow v + p(\rho) = v_L + p(\rho_l),$$

qui caractérise les détentes de la première famille. Les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaite avec

$$\sigma = \frac{\rho v - \rho_L v_L}{\rho - \rho_L}.$$

Pour le deuxième champ on a

$$W_2(\rho, v) = W_2(\rho_L, v_L) \Longrightarrow v = v_L,$$

qui caractérise les ondes de la deuxième famille. Les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaite avec $\sigma = v = v_L$.

5. **(4 points)** On a $W_1(\mathbf{v}_L) = 4$. La solution du système

$$\begin{cases} v + \rho = 4 \\ v = 3 \end{cases}$$

donne $\mathbf{v}_M = (1, 3)$. Puisque

$$-2 = \lambda_1(\mathbf{v}_L) < 0 < \lambda_1(\mathbf{v}_M) = 2,$$

la solution consiste en une détente transonique entre $\mathbf{v}_L$ et $\mathbf{v}_M$, suivie per une discontinuité de contact de vitesse $\lambda_2 = 3$ entre $\mathbf{v}_M$ et $\mathbf{v}_R$. En particulier,

$$F_G(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix},$$

correspondant à la valeur du flux $f(\mathbf{u}^*)$, avec $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}(2, 2)$.

6. **(4 points)** On a $W_1(\mathbf{v}_L) = 4$. Le système

$$\begin{cases} v + \rho = 4 \\ v = 5 \end{cases}$$

n'a pas de solution dans le demi-plan $\rho \geq 0$. L'état intermédiaire $\mathbf{v}_M$ est donc dans le vide, $\rho_M = 0$, où la vitesse n'est pas définie. La solution consiste en une détente de vitesses positives entre $\mathbf{v}_L$ et $\mathbf{v}_M$, suivie per une discontinuité de contact de vitesse $\lambda_2 = 5$ entre $\mathbf{v}_M$ et $\mathbf{v}_R$. En particulier,

$$F_G(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = f(\mathbf{u}_L) = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$