

**Exo 1** La réponse est  $1/2$ . On le prouve par récurrence. Supposons donc qu'il y ait  $n+1$  passagers. Soit  $S_i$  le siège du passager  $i$  et  $P_i$  le siège choisi par le passager  $i$ . On cherche  $p_{n+1} = P(P_{n+1} = S_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(P_{n+1} = S_{n+1} \text{ et } P_1 = S_i)$   
 $= \sum_{i=1}^{n+1} P(P_{n+1} = S_{n+1} \mid P_1 = S_i) P(P_1 = S_i) \xrightarrow{1/n+1}$   
 $= \frac{1}{n+1} \left( 1 + \sum_{i=2}^n P(P_{n+1} = S_{n+1} \mid P_1 = S_i) \right)$

Dans l'événement  $\{P_{n+1} = S_{n+1} \mid P_1 = S_i\}$  les passagers  $P_2 \dots P_{i-1}$  se mettent à leurs places  $S_k$ . Seul  $S_i$  choisit un siège au hasard parmi  $\{i+1, \dots, n+1\}$  de sorte que  $P(P_{n+1} = S_{n+1} \mid P_1 = S_i) = p_{n-i+1} = 1/2$  par récurrence. Alors,

$$p_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{2} n \right) = \frac{1}{2}$$

la récurrence est bouclée.

**Exo 3** (Inégalité de Doob) Soit l'événement  $B = \{ \exists k \leq n \mid X_k \geq e \}$

On a  $B = \bigcup_{k \leq n} B_k$  avec  $B_k = \bigcap_{j \leq k} (X_j < e) \cap (X_k \geq e)$

On remarque  $B_k \in \mathcal{F}_k$ .  $X^+$  est aussi une sous martingale.

$$\begin{aligned} E(X_n^+) &\geq E(X_n^+ \mathbb{1}(\tau \leq n)) \\ &= \sum_{k=1}^n E(X_n^+ \mathbb{1}(\tau = k)) \\ &= \sum_{k=1}^n E(\mathbb{1}(\tau = k) E(X_n^+ \mid \mathcal{F}_k)) \\ &\geq \sum_{k=1}^n E(\mathbb{1}(\tau = k) X_k^+) \geq e \sum_{k=1}^n P(\tau = k) \end{aligned}$$

$$\sum_{n \geq 0} P(A_n) < \infty \Rightarrow P\left(\sum_{n \geq 0} 1_{\{A_n\}} = \infty\right) = 0$$

$$\Rightarrow P_s \exists N(\omega) / \forall k \geq N(\omega) \Rightarrow \omega \notin A_k$$

Or  $P(\max_{k \leq n} X_k \geq \ell) = P(\tau \leq n) = \sum_{k=1}^n P(\tau = k)$

On a

$$P(\max_k X_k \geq \ell) \leq \ell^{-1} E(X_n^+)$$

Exo 4 ①  $X_t = -B_t$

On doit vérifier que  $X_t$  est un processus gaussien  $C^0$ , centré, de covariance  $E(X_t X_s) = s \wedge t$ ,

$X_t$  est bien gaussien centré  $C^0$ .

$$E(X_t X_s) = E(B_t B_s) \bullet$$

②  $X_t = t B_{1/t}, X_0 = 0$  Gaussien, centré,  $C^0$ :  $X_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$  LFGN (ic  $\frac{EX_n(\omega)}{n} \rightarrow E(X)$ )

$$E(X_t X_s) = ts E(B_{1/t}, B_{1/s}) = ts \frac{1}{t} \wedge \frac{1}{s} = \frac{ts}{\max(t,s)}$$

③  $X_t = \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}$  Gaussien centré

$$E(X_t X_s) = \frac{1}{a} (at) \wedge (as) = t \wedge s$$

④  $X_t = B_T - B_{T-t}$  Gaussien centré.

$$\begin{aligned} E(X_t X_s) &= E(B_T^2 - B_T B_{T-s} - B_T B_{T-t} + B_{T-t} B_{T-s}) \\ &= T - (T-s) - (T-t) - (T-t) \wedge (T-s) \\ &= T - 2T + t + s + T - \max(s, t) \\ &= t + s - \max(s, t) = \min(s, t) \bullet \end{aligned}$$

⑤  $(B_t^1, \dots, B_t^n)$  est un PB si les  $B_t^i$  sont indépendants,  $B_t^i$  PB par rapport à une filtration commune  $\mathcal{F}_t$

$X_t^i$  est gaussien centré  $C^0$ ,

$$E(X_t^i X_s^i) = E((UB_s^i)^i (UB_t^i)^i) = \sum_{j,p} U_{ij} U_{ip} E(B_s^j B_t^p)$$

$$= s \wedge t \sum_j U_{ij} U_{ij} = s \wedge t (U^t U)_{ii} = s \wedge t$$

donc  $X_t^i$  PB.

Pour  $t$  fixé  $(X_t^1, \dots, X_t^n)$  est un vecteur gaussien. Ses coordonnées sont indépendantes ssi

sa matrice de variance-covariance  $\Gamma_t$  est diagonale.  $\text{Cov}(X_t^i, X_t^j) = \text{Cov}(\sum_p U_{ip} B_t^p, \sum_k U_{jk} B_t^k)$

$$= \sum_{p,k} U_{ip} U_{jk} \underset{\substack{\parallel \\ \delta_{pk} t}}{\text{Cov}(B_t^p, B_t^k)} = \delta_{ij} t$$

TDS

Famille 2

Exo 2

①

$$P(v_1 < V < v_2) = \sum_{m=0}^{\infty} P(v_1 < V < v_2 \mid N=m) P(N=m)$$

alors  $V = V_1 + \dots + V_m$ , chaque terme iidalors  $V$  gaussien  $E(V \mid N=m) = m\mu$ 

$$\text{Var}(V \mid N=m) = m\sigma^2$$

Dans le cas  $m=0 \rightarrow V$  a pour densité  $\delta_0$   $P(N=0)$   
d'où

$$p_V(v) = e^{-\lambda} \left\{ \delta_v + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m! \sqrt{m}} \exp\left[-\frac{(v-\mu)^2}{2m\sigma^2}\right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad E(V) &= \sum_m E(V \mathbf{1}(N=m)) = \sum_m E(\mathbf{1}(N=m) E(V \mid N=m)) \\ &= \mu \sum_m E(m \mathbf{1}(N=m)) = \mu \lambda. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(V^2) &= \sum_m E(V^2 \mathbf{1}(N=m)) = \sum_m (m\sigma^2 + (m\mu)^2) \mathbf{1}(N=m) \\ &= \lambda(\mu^2 + \sigma^2) \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad T_k = \min(t > s, N_t - N_s = k)$$

$$\begin{aligned} P(T_{k+1} > t) &= \sum_{p=0}^{\infty} P(N_{t+s} - N_s \leq k+1) \frac{(\lambda t)^p e^{-\lambda t}}{p!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} P(N_t - N_s = p) \frac{(\lambda t)^p e^{-\lambda t}}{p!} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \int_t^{\infty} e^{-u} u^p du e^{\lambda t} \\ &= \frac{1}{k!} \int_t^{\infty} e^{-\lambda v} \lambda^k v^k \lambda dv = \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_t^{\infty} e^{-\lambda v} v^k dv \end{aligned}$$

donc  $P_{T_k}(t) = \lambda \frac{(t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad t > 0$   
 $E(T_k) = k/\lambda$   
 $V(T_k) = k/\lambda^2$

(5)  $V$  atteint  $\theta$  quand  $N$  atteint  $\theta/a_E$   
 $1 + E(\theta/a_E)$  entrées sont nécessaires pour  
 spiker :  $P_T \sim \Gamma(1 + E(\theta/a_E), \lambda)$

$E(2,5) = 2$

(6)

Supposons  $V(t) = m$   
 $N(t) = n \geq m$  on écrit  $\begin{cases} n = n_+ + n_- \\ m = n_+ - n_- \end{cases}$

avec  $\begin{cases} n_+ \text{ le nb de sauts de } N_E \\ n_- \text{ } \end{cases}$   $N_I$

Alors  $\begin{cases} n_+ = (n+m)/2 \\ n_- = m + 2n_- \end{cases}$

$P(V(t+s) - V(t) = 1 \mid N(t+s) - N(t) = 1) = \frac{\lambda e^{-\lambda s} e^{-\lambda s}}{\lambda s e^{-\lambda s}}$   
 $= \frac{\lambda e^{-\lambda s}}{\lambda} e^{\lambda s} \underset{s \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{ds}{ds} = p$

la probabilité que  $V(t) = m$  si  $n$  sauts ont eu lieu dans  $[0, t]$  est la probabilité qu'une variable binomiale de paramètres  $n, p$  prenne la valeur  $n_+$  ie :

$P(V(t) = m \mid N(t) = n) = \binom{n}{n_+} p^{n_+} q^{n-n_+}$   
 $= \binom{n}{(n+m)/2} p^{(n+m)/2} q^{(n-m)/2}$

(7)  $P(V(t) = m) = \sum_{n \geq m} P(V(t) = m \mid N(t) = n) P(N(t) = n)$

# TDS Feuille 3

$$p_m(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n \geq m} \binom{n}{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} q^{\frac{n-m}{2}} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

(par def de  $n_+, n_-$ )

8) On donne  $n = m, n = m+2, n = m+4, \dots$

$$p_m(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-m}}{(n-m)!} \binom{m+2n-m}{m+n-m} p^{\frac{m+n}{2}} q^{\frac{n-m}{2}}$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^{m/2} e^{-\lambda t} I_m(2t\sqrt{\lambda pq})$$

9) Un chemin  $V$  commençant à 0 atteint  $m > 0$  à la date  $t$ . Comme  $0 < m$ , le chemin a passé le niveau 0 à une date  $t' < t$  pour la première fois. En intégrant sur toutes les possibilités pour  $t'$ .

$$p_m(t) = \int_0^t f_0(t') p_{m-\theta}(t-t') dt'$$

10)  $\mathcal{L}f(s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-ps} f(p) dp$

convolution :  $\hat{p}_m(s) = \hat{f}_0(s) \hat{p}_{m-\theta}(s)$

$$\hat{f}_0(s) = \left(\frac{\lambda q}{\lambda I}\right)^{m/2 - (m-\theta)/2} (2\sqrt{\lambda pq})^m \frac{(\lambda + s - \sqrt{(s+\lambda)^2 - a^2})^m}{\sqrt{(s+\lambda)^2 - a^2}}$$

$$= \left(\frac{\lambda q}{\lambda I}\right)^{\theta/2} a^{\theta} \frac{(\lambda + s - \sqrt{(s+\lambda)^2 - a^2})^{\theta}}{\sqrt{(s+\lambda)^2 - a^2}} \quad \theta > 0$$

$2\sqrt{\lambda pq} \equiv a$

$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^{\infty} \mathcal{L}f(u) du$

$$\mathcal{L}(I_m(at)) = \frac{(s - \sqrt{s^2 - a^2})^m}{a^m \sqrt{s^2 - a^2}}$$

$$\mathcal{L} I_m(at) / \mathcal{L}(I_{m-\theta}(at)) = a^{-\theta} (s - \sqrt{s^2 - a^2})^{\theta}$$

or  $\downarrow d/ds$

$$= \frac{-\theta}{\sqrt{s^2 - a^2}} a^{-\theta} (s - \sqrt{s^2 - a^2})^{\theta} = -\theta \mathcal{L}(I_{\theta}(at))$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^{\infty} \mathcal{L}f$$

ie,  $\mathcal{L}^{-1} \left( \mathcal{L} I_m / \mathcal{L}_{m-\theta} \right) = \theta \frac{I_{\theta}(at)}{t}$

d'ac  $f_{\theta} = \theta \left( \frac{\lambda_E}{\lambda_I} \right)^{\theta/2} \frac{e^{-\lambda_E t}}{t} I_{\theta}(2t\sqrt{\lambda_E \lambda_I})$

(ii)  $\mu_0 = P(T_0 < \infty) = \int_0^{\infty} f_{\theta} = \mathcal{L} \left[ \frac{I_{\theta}(at)}{t} \right] (\lambda) \theta \left( \frac{\lambda_E}{\lambda_I} \right)^{\theta/2}$

$$= \theta \left( \frac{\lambda_E}{\lambda_I} \right)^{\theta/2} \frac{(s - \sqrt{s^2 - a^2})^{\theta}}{a^{\theta}}$$

$$\lambda^2 - a^2 = (\lambda_E - \lambda_I)^2$$

Case  $\lambda_E \geq \lambda_I$  :

$$\left[ \lambda_E + \lambda_I - (\lambda_E - \lambda_I) \right]^{\theta} \left( \frac{\lambda_E}{\lambda_I} \right)^{\theta/2} \frac{1}{2^{\theta} (\lambda_E \lambda_I)^{\theta/2}}$$

$$= \frac{2^{\theta} \lambda_E^{\theta}}{2^{\theta} \lambda_E^{\theta/2} (\lambda_I^{\theta/2} \lambda_I^{\theta/2})} = \left( \frac{\lambda_E}{\lambda_I} \right)^{\theta}$$

$\lambda_E < \lambda_I$  :

$$2^{\theta} \lambda_I^{\theta} \frac{\lambda_E^{\theta/2}}{\lambda_I^{\theta/2}} \frac{1}{2^{\theta} \lambda_E^{\theta/2} \lambda_I^{\theta/2}} = 1$$

$$E(T_{\theta}) = \int_0^{\infty} t f_{\theta}(t) dt = \theta \left( \frac{\lambda_E}{\lambda_I} \right)^{\theta/2} \mathcal{L}(I_{\theta}(at)) (\lambda)$$