Méthodes Mathématiques pour les neurosciences TD 4

Jonathan Touboul Olivier Faugeras

November 4, 2008

Les slides, exos et corrections sont toujours sur:
http://www-sop.inria.fr/odyssee/team/Jonathan.Touboul/WebPages/MMN.html
Vous pouvez me poser vos questions par mail: jonathan.touboul@sophia.inria.fr

Exercice 1 : Temps de sjour On considre le modle

$$\dot{V} = c(b - b_{sn}) + a(V - V_{sn})^2$$

avec $a, c > 0$ et $b > b_{sn}$. Montrer que le temps de sjour dans un voisinage born du point $V = V_{sn}$ varie comme

$$T \approx \frac{\pi}{\sqrt{ac(b - b_{sn})}}$$

lorsque $b \approx b_{sn}$.
Exercice 2 : Dterminer quand le systme

$$\dot{z} = (a + i\omega)z + z|z|^2 - z|z|^4, \quad z \in \mathbb{C}$$

exhibe une bifurcation pli de cycle limite.
$\star$ **Exercice 3 : Modele formel de neurone non-lineaire** Le but de cet exercice est de trouver le diagramme de bifurcation d'une classe de systemes dynamiques qui peuvent servir a modeliser des neurones. Ces modeles s'appellent les modeles integre-et-tire non lineaires. On considere le systeme dynamique suivant dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = F(v) - w + I \\ \frac{dw}{dt} = a(bv - w) \end{cases}$$

Dans ce modele, F est une fonction non-lineaire verifiant les proprietes suivantes:

- F est strictement convexe,
- F est au moins C^3,
- La derivee de F verifie les proprietes:

$$\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} F'(x) \leq 0 \\ \lim_{x \to +\infty} F'(x) = +\infty \end{cases}$$

On considere des fonctions F telles que $F(x) = R(x)x^{1+\alpha}$ avec $\alpha > 0$ et $\lim_{x \to \infty} R(x) \in (0, \infty]$. Dans ce cas, le potentiel de membrane explose en temps fini. Le temps d'explosion est considere comme le temps d'emission d'un potentiel d'action. Quand le neurone spike, disons au temps t^*, le potentiel de membrane est reinitialise a une valeur v_r et la variable d'apdatation est augmentee instantanement, i.e. si $v(t^{*-}) = \infty$, alors:

$$\begin{cases} v(t^*) = v_r \\ w(t^*) = w(t^{*-}) + d \end{cases}$$

ou $d > 0$ est une constante.

On s'interesse dans cet exercice a la dynamique sous le seuil, s'est a dire entre deux spikes.

1. Montrer que la jacobienne du systeme s'ecrit:

$$L := v \mapsto \begin{pmatrix} F'(v) & -1 \\ ab & -a \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. Ecrire le systeme d'equations satisfait par les points fixes du systeme.

3. A partir de maintenant nous considerons que $F(v) = v^2$. On note $G_b(v) := F(v) - bv$. Montrer qu'elle est strictement convexe et qu'elle admet un unique minimum qui est atteint. On note $m(b)$ ce minimum et $v^*(b)$ le point ou le minimum est atteint.

4. Montrer que $m(b)$ et $v^*(b)$ varient de facon reguliere avec b.

5. Trouver en fonction de I et b le nombre de points fixes du systeme et leur stabilite. Plus precisement, on montrera que:
   - Pour $I > -m(b)$ le systeme n'a pas de point fixe
   - Pour $I = -m(b)$ le systeme a un unique point fixe, $(v^*(b), w^*(b))$, non hyperbolique. Il est instable si $b > a$.
   - si $I < -m(b)$ le systeme a deux points fixes $(v_-(I, b), v_+(I, b))$ tels que
   $$v_-(I, b) < v^*(b) < v_+(I, b).$$
   Le point fixe $v_+(I, b)$ est un noeud-col, et la stabilite de $v_-(I, b)$ depend de I et du signe de $(b - a)$:
     (a) Si $b < a$ le point fixe $v_-(I, b)$ est attractif.
     (b) Si $b > a$, il existe une unique courbe reguliere $I^*(a, b)$ definie implicitement par l'equation $F'(v_-(I^*(a, b), b)) = a$ telle que:
       i. Si $I < I^*(a, b)$ le point fixe est attractif.
       ii. Si $I > I^*(a, b)$ le point fixe est repulsif.

6. Montrer que la courbe
$$\{(b,\, I);\ I = -m(b)\}$$
est une courbe de bifurcations noeud-col.

7. Supposons $a > b$, et soit v_a l'unique solution de $F'(v_a) = a$. Si $F''(v_a) \neq 0$, montrer que le systeme admet une bifurcation d'Andronov-Hopf au point v_a, le long de la courbe (dans l'espace des parametres):
$$(AH) := \Big\{(b, I)\ ;\ b > a \ \text{ and } \ I = bv_a - F(v_a)\Big\} \tag{2}$$

On peut montrer que si un systeme admet une bifurcation de Hopf, alors dans la base de vecteur propres de la jacobienne, le systeme s'crit:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y + f(x,y) \\ \dot{y} = \omega x + g(x,y) \end{cases} \tag{3}$$

ou $f(x,y) = O(\|(x,y)\|^2)$ et $g(x,y) = O(\|(x,y)\|^2)$. Dans ce cas, le coefficient de Lyapunov $l_1(0)$ est du meme signe que le grandeur:

$$\frac{1}{16}[f_{xxx}+f_{xyy}+g_{xxy}+g_{yyy}]+\frac{1}{16\omega}[f_{xy}(f_{xx}+f_{yy})-g_{xy}(g_{xx}+g_{yy})-f_{xx}g_{xx}+f_{yy}g_{yy}]$$

8. Montrer que le type de la bifurcation de Hopf est donne par le signe de:

$$A(a,b) := F'''(v_a) + \frac{1}{b-a}\left(F''(v_a)\right)^2 \tag{4}$$

Si $A(a,b) > 0$ alors la bifurcation est sous-critique. Si $A(a,b) < 0$, alors la bifurcation est sur-critique.

9. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*,\ b = a$. Supposons que $F''(v_a) \neq 0$.

On peut montrer qu'en ce point, le systeme dynamique a une bifurcation de Bogdanov-Takens et que sa forme normale s'ecrit:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = \left(\frac{8F''(v_a)\,a\,I_1}{(a+b_1)^3}\right) - \left(\frac{2(2\,b_1\,a+I_1\,F''(v_a))}{(a+b_1)^2}\right)\eta_1 + \eta_1^2 + \eta_1\eta_2 + \mathcal{O}(\|\eta\|^3) \end{cases} \tag{5}$$

10. Supposons que $F'''(v_a) < 0$. Montrer que le type de la bifurcation de Hopf va changer. On peut montrer que le systeme admet une bifurcation de Bautin au point $b = a - \frac{(F''(v_a))^2}{F'''(v_a)}$ et $I = bv_a - F(v_a)$.

11. Ce systeme presente-t-il de l'excitabilite de type 1?

12. Ce systeme presente-t-il de l'excitabilite de type 2?

13. Ce systeme presente-t-il de l'excitabilite de type 3?

14. Peut-il se comporter comme un integrateur?

15. Peut-il se comporter comme un resonnateur?

16. Presente-t-il une bistabilite?

17. Peut-on definir un seuil?

18. Peut-il presenter une latence de spike?

19. Peut-il emettre un spike suite a un courant hyperpolarisant?