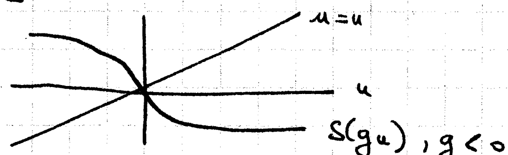
Correction TD 3

1) $\dot{u} = -u + S(gu)$. Points fixes : $u = S(gu)$.

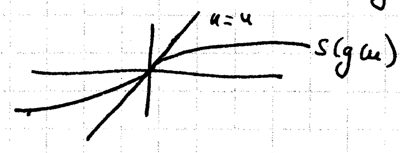
* 0 est toujours un point fixe. Stabilité : on étudie le signe de la jacobienne en 0 : $-1 + g\,S'(0) = g - 1$.

- si $g > 1 \Rightarrow$ le point fixe 0 est instable.
- si $g < 1 \Rightarrow$ le point fixe est stable

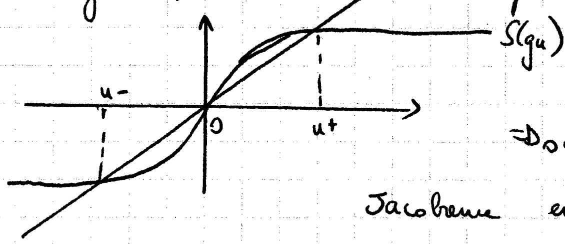
* si $g < 0$: un seul point fixe 0.



* si $0 < g < 1$, un seul point fixe 0 : par convexité de $u \mapsto S(gu)$ pour $u > 0$.



* si $g > 1$, alors on a 3 points fixes : 0, u^+ et $u^- = -u^+$.



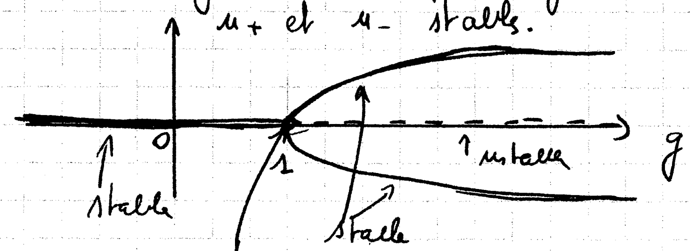
On a $S(g(u^+ + \varepsilon)) < u_+ + \varepsilon$ et $S(gu^+) = u^+$

$$\Rightarrow 0 < \frac{S(g(u_+ + \varepsilon)) - S(gu_+)}{\varepsilon} < 1$$

Jacobienne en u_+ : $-1 + \frac{d}{du} S(gu)\Big|_{u = u_+} < 0$

$\Rightarrow$ stable. Idem pour u_-.

<u>Conclusion</u> :
- $g < 1$: un seul point fixe 0 qui est stable
- $g > 1$: 3 points fixes $u_- < 0 < u_+$, 0 est instable, u_+ et u_- stables.



bifurcation fourche.

2) $(0,0)$ est un équilibre. Jacobienne : $\begin{pmatrix} -1+g & g \\ -g & -1+g \end{pmatrix}$

Partie réelle des valeurs propres : $+\frac{\text{Trace}}{2} = -1 + g$.

- Pour $g < 1$, le point $(0,0)$ est stable
- Pour $g > 1$, le point $(0,0)$ est instable,

en $g = 1$, le ~~fort~~ système a une bifurcation de Hopf.

Partie imaginaire $= g$, ~~...~~ $\dfrac{\partial \cdot \text{Partie réelle}}{\partial g} = 1 \neq 0$

Premier coeff de Lyapunov :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = (g-1)\,u_1 + g u_2 + \big(S(gu_1) - gu_1 + S(gu_2) - gu_2\big) \\ \dot{u}_2 = (g-1)\,u_2 - g u_1 + \big(S(gu_2) - gu_2 - S(gu_1) + gu_1\big) \end{cases}$$

Formule de l'exo 5 $\Rightarrow$

$$l_1(0) = \frac{g^3}{16}\Big(\underset{gx}{S^{(3)}(0)} + \underset{gy}{S^{(3)}(0)} + \underset{gx^2}{S''(0)^2} + \underset{gy}{S''(0)^2}\Big)$$

$$= -\frac{g^3}{4} \neq 0$$

$\Rightarrow$ Le système à une bifurcation de Hopf sur-critique $\Rightarrow$ un cycle stable. (oscillations stables).

$\boxed{\Rightarrow \text{Le réseau crée une activité oscillatoire}}$

Corrections TD 3

Exercice 2 :

1) $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$. $\Rightarrow \frac{\partial F_\mu}{\partial x} = \mu - 2\mu x$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2\mu$, $\frac{\partial F}{\partial x \partial \mu} = 1 - 2x$

Points fixes : $F_\mu(x) = x$, ie : $x(\mu - 1 - \mu x) = 0$

$\Rightarrow$ ⊛ 0 est point fixe de multiplicateur μ.

<u>stable</u> pour $\mu \in (-1, 1)$, instable si $|\mu| > 1$

$\Rightarrow$ bifurcations possibles en 1 et -1.

- En $\mu = 1$, $\frac{\partial f}{\partial \mu} = 0$ $\Rightarrow$ pas de condition de généricité (non générique) = "TRANSCRITIQUE" (échange de stabilité)
- En $\mu = -1$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \mu = -1$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \mu} = 1$; $\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0$ condition de transversalité. $\Rightarrow$ "CLAPET"

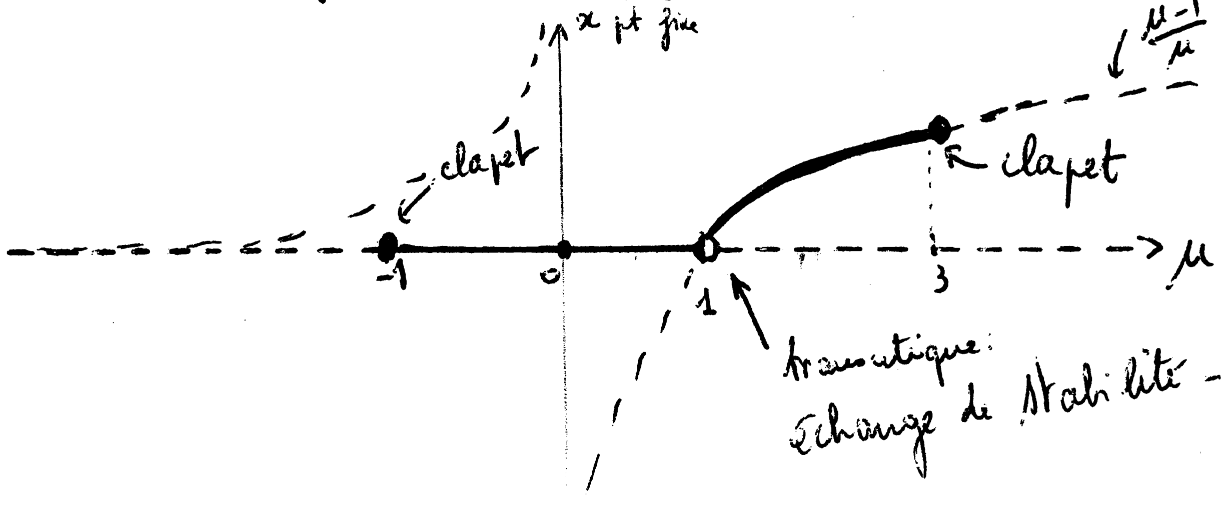
⊛ $\frac{\mu - 1}{\mu}$ pt fixe, multiplicateur $\boxed{2 - \mu.}$

stable pour $\mu \in (1, 3)$. Bifurcations possibles en 1 et 3.

- Pour $\mu = 1$, $\frac{\mu - 1}{\mu} = 0$ $\Rightarrow$ 1 seul point fixe 0 et les conditions de transversalité en ce pt ne sont pas vérifiées.
- Pour $\mu = 3$, $\frac{\mu - 1}{\mu} = 2/3$, le multiplicateur vaut -1

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - 2 \times 3 \times 2/3 = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6 \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial \mu \partial x} = -1/3 \neq 0$, $\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0$

$\Rightarrow$ Bifurcation "<u>clapet</u>".



(2) $F_\mu(x) = x^2 + \mu$.

<u>Equilibrs</u> : ∘ $\mu < 1/4 \Rightarrow$ 2 points fixes : $1/2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}$

∘ $\mu = 1/4 \Rightarrow$ 1 point fixe : $1/2$

∘ $\mu > 1/4 \Rightarrow$ pas de point fixe

<u>stabilité</u> : $F'_\mu(x) = 2x \Rightarrow$ pour $\mu < 1/4$, $1/2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}$ est <u>instable</u>

et $1/2 - \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}$ est stable pour $1/4 > \mu > -3/4$

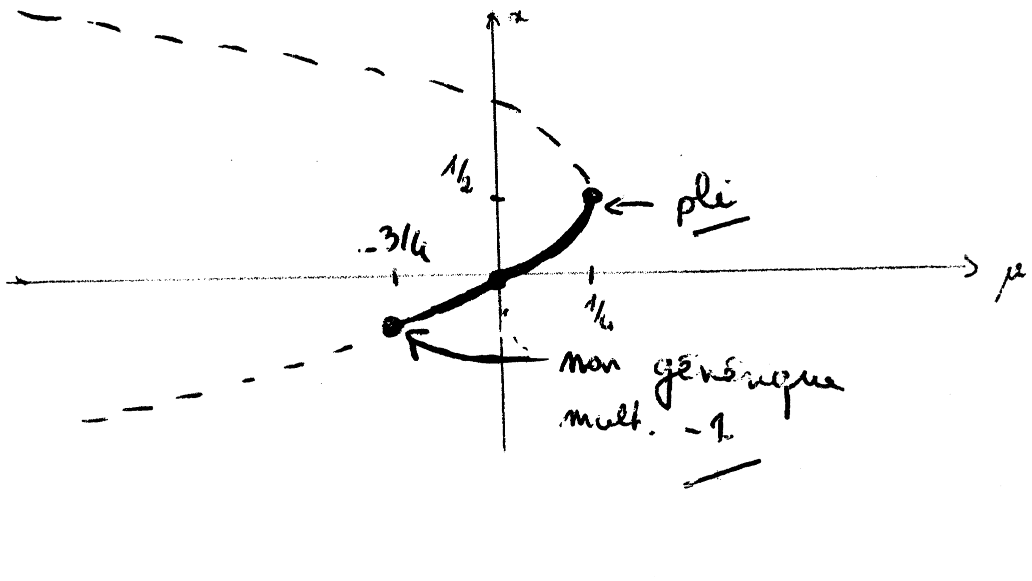
∘ en $\underline{\mu = 1/4} \Rightarrow$ on passe de 0 à 2 pts fixes ⇒ "ressemble" à un "pli"

conditions du théorème :

$\underline{F'_\mu = 1}$ $\quad \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x^2} = 2 \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial \mu} \neq 0 \Rightarrow$ <u>bifurcation pli</u>

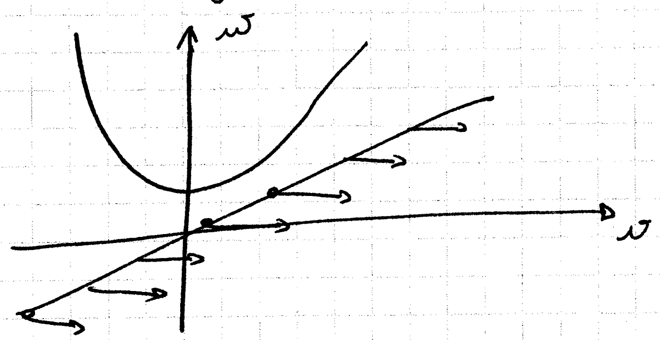
• en $\mu = -3/4$: $F'_\mu\left(1/2 - \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}\right) = -1$, mais $\frac{\partial^2 F}{\partial \mu \partial x} = 0 \Rightarrow$

ce n'est <u>pas</u> un <u>clapet</u>.



Exo 3 : Modèle d'Izhikevich.

1)



Nullclines : $w = v^2 + I$
$w = bv$

Pt fixe : $v^2 - bv + I = 0$

$\Delta = b^2 - 4I$. Pas de solution pour $\Delta < 0$
$\Rightarrow$ quand I assez grand ($I > b^2/4$).

I grand

Sur la zone $\{w \leq bv\}$, le champ de vecteur est rentrant, donc les orbites ne traversent jamais la frontière et le système partant d'une condition initiale dans cette zone y reste.

2) $w_0 < b v_0 \Rightarrow \forall t \geq t_0,\ w(t) \leq b v(t)$

$$\frac{dv}{dt} = v^2 - w + I \geq v^2 - bv + I.$$

On s'intéresse à l'équation $\dot{z} = z^2 - bz + I$.
Elle s'intègre et on peut montrer facilement que la solution explose en temps fini. Par Gronwall, on a :

$$v(t) \geq z(t) \quad \text{où } z(t) \text{ sol. de } \begin{cases} \dot{z} = z^2 - bz + I \\ z(0) = v_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow v$ explose en temps fini aussi.

3) $\delta(t) = w(t) - W(v(t))$. $\frac{d\delta}{dt} = \dot{w} - \frac{dW}{dv}\dot{v} = 0$, et $\delta(t_0) = 0$

Donc $\forall t \geq t_0$, $\delta(t) = 0$.

(Ceci fonctionne car W est bien définie car $v^2 - w + I$ ne s'annule jamais la la zone $w \leq bv$).

4) Dans la zone $w \leq bv$, on a $\dot{w} \geq 0 \Rightarrow w(t) \geq w(t_0)$

$$\frac{dW}{dv} = \frac{a(bv - W)}{F(v) - W + I} \geq \frac{a(bv - W)}{F(v) - W(t_0) + I}$$

qui est une équation linéaire en W, à coefficients variables.

On s'intéresse à l'éq :

$$\frac{dz}{dv} = \frac{a(bv - z)}{F(v) - w_0 + I}$$

$$z(v) = \left(\int_{v_0}^{v} \frac{abu}{u^2 - w_0 + I} e^{-g(u)} du + w_0 \right) e^{g(v)}$$

avec $g(v) = -\int_{v_0}^{v} \frac{a}{u^2 - w_0 + I} du$. Cette fonction est intégrable,

$g(v) \xrightarrow[v \to \infty]{} g_\infty$ - L'intégrande $\frac{abu}{u^2 - w_0 + I} e^{-g(u)} \underset{u \to \infty}{\sim} \frac{ab}{u} e^{-g_\infty}$

qui n'est pas intégrable.

$\Rightarrow z(v) \xrightarrow[v \to \infty]{} \infty$

Par Gronwall, $w(v) \geq z(v)$ donc $w(v) \xrightarrow[v \to \infty]{} \infty$ $\square$

Exercice 4

$F_\alpha(x) = \alpha x e^{-x}$, $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \alpha(e^{-x} - x e^{-x}) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \alpha(-2e^{-x} + x e^{-x}) \\ \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 3(3e^{-x} - x e^{-x}) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \alpha} = e^{-x} - x e^{-x} \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} x > 0 \\ \alpha > 0 \end{matrix}}$

1) Points fixes : $\begin{cases} x = 0 & \forall \alpha. \\ x = \log(\alpha) & \forall \alpha > 0 \end{cases}$

On considère que des huits ~~π~~ $x > 0 \Rightarrow$ le 2e pts fixe existe pour $\boxed{\alpha > 1}$

stabilité : $x = 0$: $\frac{\partial F_\alpha}{\partial x}^1(x=0) = \alpha \Rightarrow$ change de stabilité pour $\boxed{\alpha = 1}$

• $x = \log(\alpha)$: $\frac{\partial F_\alpha}{\partial x}(\log \alpha) = 1 - \log(\alpha)$

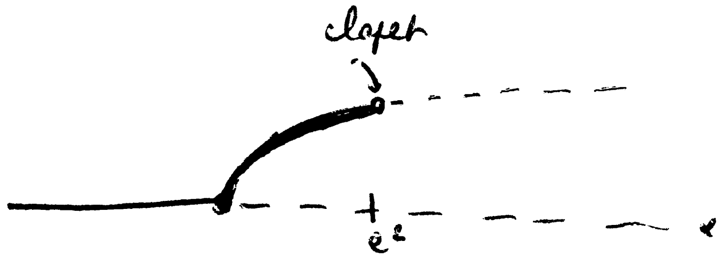
$\forall \alpha < e^2$, $x = \log(\alpha)$ est stable, $\forall \alpha > e^2$, il est instable

2) $\alpha = e^2$, $x = 2$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x} = -1$

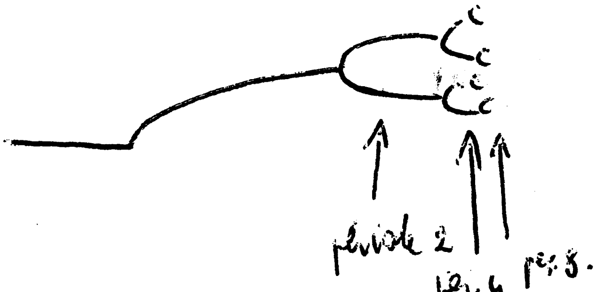
• $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial x^2}\right)^2 + 1/3\left(\frac{\partial^3 F_\alpha}{\partial x^3}\right) = 1/3 \neq 0$

• $\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial \alpha \partial x} = -e^{-2} \neq 0$

$\Rightarrow$ on a un clapet.



Pt périodiques :



TD3

Exo 5 :

1) (a) Candidat bifurc. de Hopf : $\binom{v^*}{g^*}$ tq :

* pt fixe ie : $F(v^*) - b v^* = 0$
* vp propres im. pures $\Leftrightarrow \begin{cases} \det(\mathrm{Jac}(f(v^*))) > 0 \\ \mathrm{Tr}(\mathrm{Jac}(f(v^*))) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'(v_0) = a \\ b > a. \end{cases}$

(b) Changement de variable. On vérifie bien que $f(x,y) = O(\|(x,y)\|^2)$, $g(x,y) = O(\|(x,y)\|^2)$

(c) Application de la formule donnée avec $f(x)$ et $g(x)$ du (1.b).

2) (a) idem.

→ bifur de Hopf si $\exists \binom{v^*}{z^*}$ tq : $\begin{cases} F(v^*) = G(v^*) \\ z^* = F(v^*) \end{cases}$

Jacobienne : $\begin{pmatrix} F'(v^*) & -1 \\ aG'(v^*) & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F'(v^*) = a \\ G'(v^*) > a. \end{cases}$

(b) changement de variable : $\dot{x} = F(x) +$ termes linéaires et constants
$\dot{y} = \frac{a}{\omega}(G(x) - F(x)) +$ ______ $\Bigg) \begin{cases} v - v^* = x \\ (z - z^*) = F'(v^*)x - wy \end{cases}$

(c) application de la formule ⇒

$$\left[F''' + \frac{F''(F'' - G'')}{G' - a}\right]$$ donne la stabilité.

3) Idem avec le changement de variable :

$$\begin{cases} v - v^* = x \\ (z - z^*)(v+1) = F'(v^*)x - wy. \end{cases}$$

→ $$\boxed{F''' + a - (F'' - a)\left(1 + \frac{a[G'' - F'' + 2a]}{w^2}\right)}$$