

# Méthodes Mathématiques pour les neurosciences

## TD 2

Jonathan Touboul      Olivier Faugeras

October 9, 2007

Les slides, exos et corrections sont toujours sur:

<http://www-sop.inria.fr/odyssee/team/Jonathan.Touboul/WebPages/MMN.html>

Vous pouvez me poser vos questions par mail: [jonathan.touboul@sophia.inria.fr](mailto:jonathan.touboul@sophia.inria.fr)

**Exercice 1 : Classification des équilibres en dimension 2** Le but de cet exercice est de caractériser la stabilité des équilibres et le comportement des solutions d'un système dynamique linéaire en dimension deux:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1)$$

en fonction de la trace et du déterminant de la matrice  $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On suppose que  $M$  est inversible.

1. Déterminer l'expression du polynôme caractéristique de la matrice  $M$ :

$$P(\lambda) := \det(\lambda Id - M)$$

en fonction de la trace  $\tau$  et du déterminant  $\delta$  de  $M$ .

2. Trouver les racines de ce polynôme dans  $\mathbb{C}$
3. Trouver le ou les points fixes du système dynamique (1)
4. Valeurs propres réelles:
  - (a) Trouver une condition en fonction de  $\tau$  et  $\delta$  pour que les valeurs propres soient réelles.
  - (b) Dans ce cas, trouver une condition en fonction de  $\delta$  pour que l'équilibre soit un noeud-col.
  - (c) Trouver une condition sur  $\delta$  et  $\tau$  pour que l'équilibre soit attractif (puit).
  - (d) Trouver une condition sur  $\delta$  et  $\tau$  pour que l'équilibre soit repulsif (source).
5. Valeurs propres complexes:
  - (a) Trouver une condition en fonction de  $\tau$  uniquement pour que l'équilibre soit attractif (foyer stable)
  - (b) Trouver une condition en fonction de  $\tau$  uniquement pour que l'équilibre soit repulsif (foyer instable)

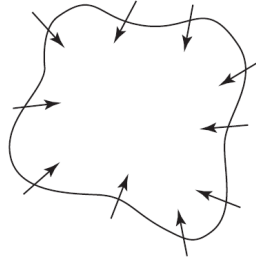


Figure 1: Champ rentrant

6. Tracer sur un diagramme  $(\tau, \delta)$  la stabilité du point fixe et les différents comportements autour du point fixe

**Exercice 2 : Champ de vecteur rentrant** On se place dans  $\mathbb{R}^n$  et on considère un ouvert  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  défini par  $F := \{x | f(x) \leq 0\}$  où  $f$  est une fonction  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $X(t, x)$  un champ de vecteur défini pour  $t \in \mathbb{R}$  et pour tout  $x$  dans un voisinage de  $F$ . Supposons que  $df(x) \cdot X(t, x) < 0$  pour tout  $x \in f^{-1}(0)$  le bord de  $F$  (dans ce cas le champ de vecteur est dit rentrant, voir fig. 1).

Montrer que les solutions de l'équation  $\dot{x} = X(t, x)$  qui sont dans  $F$  en  $t = t_0$  restent dans  $F$  pour tout temps dans l'intervalle de définition supérieur à  $t_0$ .

**Exercice 3 : Spikes dans le modèle de Fitzhugh Nagumo** On considère le modèle de Fitzhugh-Nagumo d'un seul neurone:

$$\begin{cases} \dot{u} = u(u - \alpha)(1 - u) - w + I \\ \dot{w} = \varepsilon(u - \gamma w) \end{cases} \quad (2)$$

avec  $(\alpha, I) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $\gamma > 0$ .

1. Tracer le portrait de phase de ce système dynamique, pour différents  $I$ , et montrer graphiquement qu'il peut exister un, deux ou trois points fixes, dans le cas  $\alpha < 0$  (on distinguera le cas  $\alpha < 1/\gamma$  ou  $\alpha > 1/\gamma$ ).
2. Pour  $I = 0$ , étudier en fonction de  $\alpha$  la stabilité du point fixe  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que ce point fixe peut être stable et instable en fonction de  $\alpha$ . Tracer dans un diagramme  $(\alpha, \gamma)$  les zones où ce point fixe est stable ou instable.
3. Dans le cas où le point fixe est instable, montrer qu'il existe une orbite périodique en utilisant le théorème de Poincaré-Bendixon :

**Theorem 1.** Soit  $x(t)$  une solution d'un champ de vecteur  $X$  du plan. Si  $x(t)$  reste bornée lorsque  $t \rightarrow \infty$ , alors l'adhérence de  $x(t)$  contient soit un point singulier de  $X$  soit une orbite périodique. Dans ce dernier cas, si  $x(t)$  n'est pas elle-même périodique on dit que l'orbite périodique est un cycle limite.

- (a) Soit  $\begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$  une condition initiale pour l'équation du neurone de Fitzhugh Nagumo avec  $I = 0$ . Trouver un ensemble compact du plan de phase dans lequel le champ de vecteur est rentrant.
- (b) En utilisant le résultat de l'exercice précédent montrer que toute solution ayant sa condition initiale dans ce compact reste indéfiniment dans ce compact.

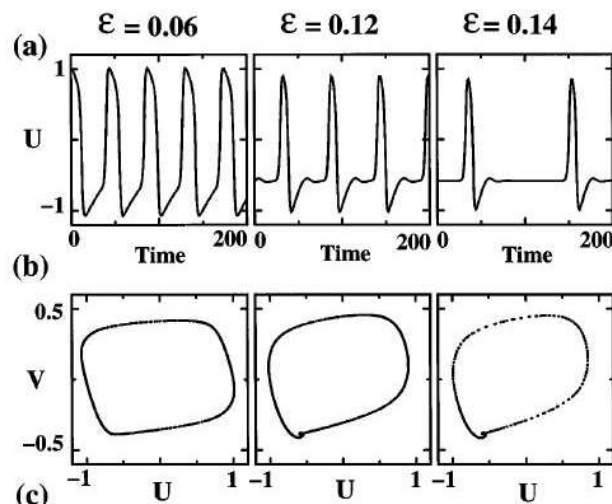


Figure 2: Spikes dans le modèle de neurone de Fitzhugh-Nagumo

- (c) Montrer qu'il existe un cycle limite dans ce compact. Ce cycle limite correspond aux spikes émis par le modèle de Fitzhugh Nagumo (voir la figure 2).

#### Exercice 4 : Application de Poincaré

1. On considère le système dynamique dans le plan:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

et la section  $\Sigma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y = 0\}$

- (a) Écrire le système en coordonnées polaires  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\theta = \arctan(y/x)$  et montrer que:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Écrire de même l'équation de  $\Sigma$  dans ces nouvelles coordonnées.

- (b) Intégrer ce système en utilisant qu'une primitive de  $\frac{1}{x(1-x^2)}$  est  $\frac{1}{2} \log(x^2/(x^2 - 1))$ . En déduire que le flot s'écrit:

$$\varphi^t(r_0, t_0) = \left( \left( 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right)^{-1/2}, t + \theta_0 \right)$$

- (c) Trouver le temps de premier retour sur  $\Sigma$  et en déduire que l'application de Poincaré s'écrit:

$$P(r_0) = \left( 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right)^{-1/2}$$

- (d) Trouver les points fixes de  $P$  et leur stabilité. En déduire l'existence d'une orbite périodique.

2. Faire la même analyse avec le système tridimensionnel suivant en rajoutant la composante  $z$  telle que :  $\dot{z} = \mu z$  puis  $\dot{z} = \mu - z^2$ . Suivant le signe de  $\mu$  discuter la stabilité de l'orbite périodique.