TD 1

Exo 1 $\forall T \in \mathbb{R}$ $h(t) = \begin{cases} \frac{\Delta^2}{4}(t-T)^2 & \text{si } t \leq T \\ 0 & \text{si } t \geq T \end{cases}$

est solution. La non unicité provient du fait que $x \to \sqrt{x}$ n'est pas Lipschitzienne proche de 0.

Si le réservoir est vide, on ne peut pas savoir quand il s'est vidé.

Exo 2 1/ Si $[A(s), A(t)] = 0$ alors

$$x(t) = \left(\exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right)\right) x_0 \quad \text{est solution.}$$

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right) = B(t)$$

$$B(t+\varepsilon) - B(t) = \exp\int_{t_0}^{t} A \left[\exp\int_{t}^{t+\varepsilon} A - 1\right]$$

$$\overset{\text{dl } \exp}{=} \exp\int_{t_0}^{t} A \left[1 + \int_{t}^{t+\varepsilon} A + O(\varepsilon^2) - 1\right] = \exp\int_{t_0}^{t} A \left[\varepsilon A(t) + O(\varepsilon^2)\right]$$

$$\text{ie} \quad \frac{dB}{dt} = A(t)\,B(t)$$

2/ Toutes les solutions sont définies sur I. L'équation se met sous la forme $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\,x(s)\,ds$ qui admet une unique solution d'après le th. de Volterra.

Rappel: Si $K(s,t) = 0$, $s > t$ et $t \to \int_0 K(s,t)\,x(s)\,ds$ est C^0 alors l'équation $x(t) + \int_a^b K(s,t)\,x(s)\,ds = g(t)$ a une unique solution définie sur $[a,b]$

3/ Provient de l'unicité du TCL.

4/ Les solutions de (1) forment un e.v. de dimension n.

$x(t) = \Phi_{t_0}^{t}\, x_0$. Si les $x_i(t)$ sont les colonnes de $\Phi_{t_0}^{t}$:

$$\dot{\det}(x_1(t) \dots x_n(t)) = \sum_i \det(x_1, \dots, \dot{x}_i, \dots, x_n)$$

$$= \sum_i \det(x_1, \dots, Ax_i, \dots, x_n)$$

$(x_1,\dots,x_n) \to \sum_i \det(x_1,\dots, Ax_i,\dots,x_n)$ est n-multilinéaire alternée donc proportionnelle à $\det(x_1,\dots,x_n)$. En prenant pour $(x_1,\dots,x_n)$ la base canonique on trouve le coefficient de proportionnalité : $\operatorname{Tr} A$; donc
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\det \Phi_{t_0}^t = \operatorname{Tr} A(t) \det \Phi_{t_0}^t \\ \Phi_{t_0}^{t_0} = Id \end{cases}$$

4/ Variation de la constante : $x(t) = \Phi_{t_0}^t x_0 + \int_{t_0}^t \Phi_s^t b(s)ds$

5/ (1) s'écrit $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s)\,ds$

$$(Tx)(t) = \int_{t_0}^t A(s)\,x(s)\,ds$$

$$(T_0^n x)(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, A(t_1)\dots A(t_n)\, x(t_n)$$

$$|(T_0^n x)(t)| \leq \left(\max_{[t_0,t]} \|A\|\right)^n / n! \max_{s\in[t_0,t]} (|x|(s))$$

T_0^n est contractante pour n assez grand. Son point fixe est solut° de (1).

$\mathcal{P}\, A(t_1)\dots A(t_n) = A(t_{i_1})\dots A(t_{i_n})$ / $t_{i_1} > t_{i_2} \dots > t_{i_n}$

Alors $(T_0^n x)(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n\, \mathbb{1}(t_1 > t_2 \dots > t_n)\, A(t_1)\dots A(t_n)\, x(t_n)$

$$= \frac{1}{n!}\int_{(t_0,t)^n} dt_1 \times\dots\times dt_n \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathbb{1}(t_{\sigma(1)} > \dots > t_{\sigma(n)})\, A(t_{\sigma(1)})\dots A(t_{\sigma(n)})$$

$$= \frac{1}{n!}\int_{(t_0\, t)^n} dt_1\dots dt_n\, \mathcal{P}(A(t_1)\dots A(t_n))$$

$$\Rightarrow (I - T)^{-1} = \sum_n T_0^n = \mathcal{P}\exp\int_{t_0}^t A$$

C'est bien défini sur I.

Exercice 3 $\dot{\theta} = f(\theta, I)$

(1) $I<0$ 2 pts d'équilibre $\theta_\pm = \pm A\cos\left(\frac{1+I}{1-I}\right)$ $\leftarrow \in (-1,1)$

- $\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta_\pm, I) = \sin\theta_\pm (1-I) = \pm(1-I)\sqrt{1-\cos^2\theta_\pm}$
$= \pm 2\sqrt{-I}$

Donc θ_+ est instable, θ_- stable.

- Si $\theta_0 \neq \theta_+$, $f(\theta(t), I)$ monotone (elle ne peut s'annuler en raison du TCL), donc converge vers un point fixe qui ne peut être que θ_- par stabilité

(2) $I>0$ eq : $\cos\theta = \frac{1+I}{1-I}$ or $\left|\frac{1+I}{1-I}\right| > 1$ donc pas de pt d'équilibres, donc $f(\theta, I)$ est de signe fixe en θ, positif strict, minorée par $f_{min}(I)$.

La solution traverse donc $(0, 2\pi)$ en temps fini, elle est périodique par unicité du TCL.

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\cos\theta(1-I)+1+I} = \frac{1}{1+I}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{1+\underbrace{\frac{1-I}{1+I}}_{=\beta}\cos\theta} = \int$$

$$= \frac{1}{1+I}\int_{\tan\frac{\theta_0}{2}}^{\tan\frac{\theta_1}{2}} \frac{2\,dx}{1+x^2}\,\frac{1}{1+\beta\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \frac{2}{1+I}\int_{\tan\frac{\theta_0}{2}}^{\tan\frac{\theta_1}{2}} \frac{dx}{1+\beta+x^2(1-\beta)}$$

$\left[x = \tan\frac{\theta}{2}\right]$

$\frac{1+\beta}{1-\beta} = -I$

$y = x\sqrt{I}$

$$= \underbrace{\frac{2}{(1+I)(1+\beta)}}_{=1}\left[A\tan(\sqrt{I}\,x)/\sqrt{I}\right]_{\tan\theta_0/2}^{\tan\theta_1/2}$$

ie $\sqrt{I}(t_1 - t_0) = A\tan\left(\sqrt{I}\tan\frac{\theta_1}{2}\right) - A\tan\left(\sqrt{I}\tan\frac{\theta_0}{2}\right)$

ie $\theta(t) = 2A\tan\left\{\left[\tan\left(\sqrt{I}(t-t_0) + A\tan\left(\sqrt{I}\tan\frac{\theta_0}{2}\right)\right)\right]/\sqrt{I}\right\}$

ie $\alpha = \frac{1}{\sqrt{I}} A\tan\sqrt{I}\tan\frac{\theta_0}{2} - t_0$

Frequence d'émission : $\theta(t) = 2\,\mathrm{Atan}\,\frac{1}{\sqrt{I}}\left(\tan\sqrt{I}\,t + \alpha\right)$

$$\boxed{f = \frac{\pi}{\sqrt{I}}}$$

(3) $I = 0$ $f(\theta, 0)$ a un point fixe : $\theta = 0$

Si $\theta_0 \neq 0$, alors $f(\theta$ $\dot{\theta} > 0$, θ est monotone jusqu'à $\theta = 0$. Donc si $\theta_0 < \pi$: émission d'un spike, et si $\theta_0 > \pi$ pas de spike émis.

Exo 4 (1) $V(t) = E_L + RI + e^{-t/\tau}(V_0 - E_L - RI)$

Spike si $E_L + RI > \theta$.

$$\boxed{f_{\text{décharge}} = 1 / \tau \log\left(\frac{E_L + RI - V_R}{E_L + RI - \theta}\right)}$$

Un spike émis $V_0 = V_R$ puis $V(T) = \theta \Leftrightarrow \frac{\theta - E_L - RI}{V_r - E_L - RI} = \exp(-t/\tau)$

(2) $\hat{V} = V - \frac{V_T + E_L}{2}$ donne $\tau \frac{d\hat{V}}{dt} = \tilde{V}^2 + \tilde{I}$

$$\frac{d\tilde{V}}{\tilde{V}^2 + \tilde{I}} = dt/\tau \qquad \boxed{\tilde{I} > 0} : \left[\mathrm{Atan}\,\tilde{V}/\sqrt{\tilde{I}}\right]_{\tilde{V}_0}^{\tilde{V}} = t/\tau \cdot \sqrt{\tilde{I}}$$

ie $\hat{V}(t) = \tan\left(\frac{\sqrt{\tilde{I}}\,t}{\tau} + \mathrm{Atan}\,\frac{\tilde{V}_0}{\sqrt{\tilde{I}}}\right) \times \sqrt{\tilde{I}}$

explose quand $\frac{\sqrt{\tilde{I}}}{\tau}\Delta t + \mathrm{Atan}(\,) = \pi/2$

ie $\Delta t = \frac{\pi/2 - \mathrm{Atan}\,\tilde{V}_{0r}/\sqrt{\tilde{I}}}{\sqrt{\tilde{I}}}\,\tau$

$V_r = -\infty$ $\quad \boxed{f_r = \frac{1}{\tau}\frac{\sqrt{\tilde{I}}}{\pi}}$

$\boxed{\tilde{I} < 0}$ $\hat{V}(t) = -\sqrt{-\tilde{I}}\ \mathrm{th}\left(\sqrt{-\tilde{I}}\,\frac{t}{\tau} + \mathrm{Ath}\,\frac{\tilde{V}_0}{\sqrt{-\tilde{I}}}\right)$

n'explose pas en tps fini.

Donc condition pour le spike : $\boxed{\tilde{I} > 0}$