Exploration de l'activité et de la formation spontanée de structures dans le cortex visuel par les méthodes de bifurcation avec symétrie.

Pascal Chossat
laboratoire J-A Dieudonné, UMR CNRS 6621
université de Nice Sophia Antipolis

Sujet

Le cortex peut être vu comme une assemblée d'un très grand nombre de neurones reliés entre eux par l'intermédiaire de synapses selon une architecture complexe dans laquelle s'emboîtent différentes échelles d'espace et de temps. Des méthodes inspirées de la physique permettent dans certains cas de définir un "champ moyen" à échelle mésoscopique et de modéliser l'activité de ces assemblées de neurones comme celle d'un continuum où chaque "point" représente en fait un agglomérat nommé "colonne corticale" de neurones interconnectés selon des règles qui se traduisent dans les équations par un certain nombre de paramètres.

Cette approche est notamment utilisée pour modéliser l'activité du cortex visuel, c'est-à-dire de la zone où se forment les représentations des stimulis visuels reçus par le cerveau. Des expériences récentes ont permis de préciser la structure générale du cortex visuel et de valider, dans une certaine mesure, le modèle continu développé par Wilson et Cowan [1] au début des années 70. Ce modèle, dans lequel le cortex visuel est idéalisé par un plan $\{\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, présente des propriétés de symétrie par rapport aux déplacements euclidiens du plan. Ces propriétés induisent une dégénérescence de nature géométrique dans l'étude des bifurcations à partir d'un état de base homogène. La résolution de cette singularité requiert la prise en compte de l'action du groupe des isométries du plan sur les "modes propres critiques" du système, ce qui a été fait dans une première approche par Ermentrout et Cowan [2] puis par Bressloff et Cowan en collaboration avec Golubitsky [3], l'un des promoteurs de la théorie des bifurcations en présence de symétries [4], [5]. La principale contribution de [3] a été de prendre en compte dans le modèle, la sensibilité des neurones à l'orientation spatiale, une variable qu'on représente par un angle $\phi \in [0, \pi]$. Sous cetaines hypothèses, les équations pour le potentiel d'action $\mathbf{a}(\mathbf{r}, \phi, t)$ s'écrivent alors

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = -\mathbf{a} + \mu \int_0^\pi w_{loc}(\phi - \phi')\sigma[\mathbf{a}(\mathbf{r}, \phi', t)]\frac{d\phi'}{\pi} + \beta \int_{\mathbb{R}^2} w_{lat}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \phi)\sigma[\mathbf{a}(\mathbf{r}', \phi, t)]d\mathbf{r}'$$

où w_{loc} et w_{lat} désignent des fonctions qui traduisent la loi de connectivité d'un "neurone" $(\mathbf{r}, \phi)$ avec, respectivement, les autres neurones de la même colonne $\mathbf{r}$ (sensibles des orientations comprises entre 0 et π) et des neurones situés dans les autres colonnes corticales (c'est-à-dire en des points différents du plan), mais sensibles la même orientation ϕ. Ces fonctions sont par hypothèse invariantes par les isométries du plan. Des arguments expérimentaux permettent de "justifier" une telle idéalisation. Lorsque les paramètres μ et β $(\mu, \beta > 0)$ sont suffisamment voisins de 0, les fluctuations autour de l'état de base homogène sont amorties grâce au terme $-\mathbf{a}$ du membre de droite. Mais lorsque μ atteint une certaine valeur critique une *bifurcation* se produit et l'état homogène se déstabilise au profit de nouvelles solutions qu'il s'agit de calculer. Ce travail, effectué notamment par [3], a permis de mieux comprendre comment des hallucinations visuelles se forment spontanément sous l'action de drogues psychotropes. Cependant il s'est largement cantonné à la bifurcation d'états *stationnaires* et à la prise en compte de la seule sensibilité des neurones à l'orientation spatiale. En toute rigueur, la présence de neurones excitateurs et inhibiteurs devrait permettre d'engendrer des solutions oscillantes par bifurcation de Hopf (voir [6]). De plus, d'autres paramètres définissant les structures visuelles devraient être également pris en compte: la sensibilité à la fréquence spatiale, aux couleurs, etc. Ainsi, Bressloff et Cowan ont récemment utilisé une approche géométrique originale pour prendre en compte, dans le modèle de Wilson et Cowan, la sensibilité à la fréquence spatiale en utilisant un modèle sphérique fondé sur des considérations expérimentales, mais non validé [7].

Ce stage aura pour but de pousser l'étude de ces systèmes dans les deux directions indiquées ci-dessus: d'une part, déterminer la possibilité et les conditions de bifurcation d'auto-oscillations (bifurcation de Hopf), d'autre part étudier les conséquences de la prise en compte de la fréquence spatiale "à la Bressloff-Cowan" [7] dans l'étude du modèle des hallucinations visuelles.

Ce travail se fera en collaboration étroite avec des chercheurs du projet NeuroMath. Il requiert une connaissance des méthodes locales des systèmes dynamiques (théorie des bifurcations) et une réelle motivation pour la recherche à l'interface entre les mathématiques et les neurosciences théoriques. Des simulations numériques pourront être mises en oeuvre pour cette étude.

References

[1] HR Wilson, JD Cowan. A mathematical theory of the functional dynamics of cortical and thalamic nervous tissue. *Kybernetik* **13**,55-80 (1973).

[2] G.B. Ermentrout, J.D. Cowan. A mathematical theory of visual halucination patterns. *Biol. Cybernetics* **34**, 137-150 (1979).

[3] P.C. Bressloff, J.D. Cowan, M. Golubitsky, P.J. Thomas, M.C. Wiener. What geometric visual hallucinations tell us about the visual cortex. *Neural Computation* 14, 473-491 (2002).

[4] Golubitsky M, Stewart I and Schaeffer D 1988 *Singularities and groups in bifurcation theory* Vol. 2, Appl. Math. Sci. **69** Springer Verlag.

[5] Chossat P, Lauterbach R 2000 *Equivariant bifurcation theory and its applications* Advanced Series in Nonlinear Dynamics **15** World Scientific, Singapur.

[6] G.B. Ermentrout, J.D. Cowan. Temporal oscillations in neuronal nets. *J. Math. Biol*, **7**, 265-280 (1979).

[7] P.C. Bressloff, J.D. Cowan. SO(3) symmetry breaking for orientation and spatial frequency tuning in the visual cortex. *Phys Rev Lett.* 88, 7, p. (2002 ou 2003).