Théorie du champ moyen pour des modèles non linéaires de neurones

Olivier Faugeras
Equipe Projet NeuroMathComp
INRIA Sophia-Antipolis - ENS Paris

2 janvier 2009

Sujet

Dans [2] nous avons développé une théorie du champ moyen pour des ensembles de neurones. Le modèle de neurone utilisé dans ce travail est un modèle à taux de décharge [3] dans lequel le potentiel de membrane V_i du neurone postsynaptique i est la somme des potentiels postsynaptiques PSP_{ij} évoqués par les neurones présynaptiques j :

$$V_i(t) = \sum_{j,\,k,\,t_k^j > t_0} PSP_{ij}(t - t_k^j) + V_i(t_0),$$

où les t_k^j sont les temps d'émission des potentiels d'action du neurone présynaptique j.

Pour avancer dans la modélisation on remplace la somme discrète sur les t_k^j par une intégrale faisant intervenir les taux instantanés de décharge $\nu_j(t)$ des neurones présynaptiques, en remarquant que le nombre de potentiels d'action émis par le neurone j entre t et $t + dt$ est égal à $\nu_j(t)\,dt$:

$$V_i(t) = \sum_j \int_{t_0}^{t} PSP_{ij}(t - s)\nu_j(s)\,ds + V_i(t_0).$$

On considère ensuite deux grands types de modèles. D'abord les modèles basés sur le potentiel (type Hopfield) dans lesquels on suppose que $PSP_{ij}(t) = J_{ij}g_i(t)$, c.a.d. que la forme du potentiel postsynaptique ne dépend que du neurone postsynaptique i (à l'exception d'un coefficient constant d'efficacité synaptique J_{ij}. Ensuite les modèles basés sur l'activité dans lesquels on suppose au contraire que $PSP_{ij}(t) = J_{ij}g_j(t)$, c.a.d. que la forme du potentiel postsynaptique ne dépend que du neurone présynaptique j.

Pour un modèle basé sur le potentiel on a donc, en utilisant la relation $V_j = S(\nu_j)$ (S fonction sigmoïdale) entre l'activité ν_j et le potentiel de membrane V_j du neurone j L

$$V_i(t) = g_i \star \left(\sum_j J_{ij} S(V_j) \right)(t) + V_i(t_0), \tag{1}$$

où $\star$ symbolise l'opération de convolution.

La théorie du champ moyen considère, dans sa forme la plus simple, un ensemble de N neurones décrit par les N équations (1) et permet de les résumer, quand $N \to \infty$, par une équation différentielle stochastique. Le résultat, démontré dans [2], de l'existence et l'unicité de la solution de cette équation dépend de manière fondamentale du fait que cette équation est linéaire, malgré le fait que (1) ne le soit pas.

Ce n'est plus le cas pour le modèle à base d'activité ni pour celui de modèles plus sophistiqués et biologiquement plus plausibles tel que celui de Hodgkin et Huxley [5, 6]. Pour ces modèles on ne sait même pas aujourd'hui écrire une équation de champ moyen, encore moins montrer qu'elle est bien posée et calculer sa solution !

La piste que je propose est d'utiliser une technique de grandes déviations telle que celle développée pour les verres de spin par A. Guionnet et Ben Arous [1, 4]. La partie mathématique du stage consistera en l'étude de la généralisation/adaptation de cette technique au cas du modèle à base d'activité, à écrire et à étudier l'équation de champ moyen correspondante (existence et unicité de la solution). Une suite naturelle est l'élaboration d'un algorithme de calcul de cette solution et l'écriture d'un code correspondant.

Compléments

Ce stage nécessite des connaissances de calcul stochastique et une forte motivation pour la recherche à l'interface entre les mathématiques et les neurosciences théoriques. Des expériences numériques nécessitant le développement de programmes informatiques viendront utilement compléter et enrichir le travail théorique.

Ce stage est proposé dans le cadre du projet NerVi financé par l'European Research Council (ERC) au travers de son programme IDEAS. Il aura lieu au sein de l'équipe projet NeuroMathComp INRIA/ENS Paris. Il est rémunéré et peut se poursuivre en thèse.

Références

[1] G. Ben-Arous and A. Guionnet. Symmetric Langevin Spin Glass Dynamics. *The Annals of Probability*, 25(3) :1367–1422, 1997.

[2] O. Faugeras, J. Touboul, and B. Cessac. A constructive mean field analysis of multi population neural networks with random synaptic weights and stochastic inputs. *Frontiers in Neuroscience*, 2008. submitted.

[3] W. Gerstner and W. Kistler. *Spiking Neuron Models.* Cambridge University Press, 2002.

[4] A. Guionnet. Averaged and quenched propagation of chaos for spin glass dynamics. *Probability Theory and Related Fields*, 109(2) :183–215, 1997.

[5] A.L. Hodgkin and A.F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *Journal of Physiology*, 117 :500–544, 1952.

[6] E. M. Izhikevich. *Dynamical Systems in Neuroscience : The Geometry of Excitability and Bursting (Computational Neuroscience)*. The MIT Press, November 2006.