Introduction aux systèmes dynamiques

Olivier FAUGERAS

Plan

Plan

Définition

- Formalisation mathématique d'un système déterministe
- Un vecteur d'état qui "vit" dans l'espace d'état ou espace de phase, noté X
- La loi d'évolution de l'état dans le temps

Définition

- Formalisation mathématique d'un système déterministe
- Un vecteur d'état qui "vit" dans l'espace d'état ou espace de phase, noté X
- La loi d'évolution de l'état dans le temps

Définition

- Formalisation mathématique d'un système déterministe
- Un vecteur d'état qui "vit" dans l'espace d'état ou espace de phase, noté X
- La loi d'évolution de l'état dans le temps

Opérateur d'évolution

- Le temps est discret ou continu : $t \in T$, $T = \mathbb{R}$ ou $T = \mathbb{Z}$.
- $\varphi^t : X \to X$ est tel que $x_t = \varphi^t x_0$, x_0 état initial.
- φ^t peut ne pas être défini pour tout $(t, x) \in T \times X$.
- Si φ^t est défini pour $t \geq 0$ et $t < 0$, l'opérateur est dit inversible.
- $\varphi^t x_0$ peut n'être défini que localement en temps, e.g. $0 \leq t < t_0$ ("explosion").
- Deux hypothèses :
  1. $\varphi^0 = id$.
  2. $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$

Opérateur d'évolution

- Le temps est discret ou continu : $t \in T$, $T = \mathbb{R}$ ou $T = \mathbb{Z}$.
- $\varphi^t : X \to X$ est tel que $x_t = \varphi^t x_0$, x_0 état initial.
- φ^t peut ne pas être défini pour tout $(t, x) \in T \times X$.
- Si φ^t est défini pour $t \geq 0$ et $t < 0$, l'opérateur est dit inversible.
- $\varphi^t x_0$ peut n'être défini que localement en temps, e.g. $0 \leq t < t_0$ ("explosion").
- Deux hypothèses :
  1. $\varphi^0 = Id$.
  2. $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$

Opérateur d'évolution

- Le temps est discret ou continu : $t \in T$, $T = \mathbb{R}$ ou $T = \mathbb{Z}$.
- $\varphi^t : X \to X$ est tel que $x_t = \varphi^t x_0$, x_0 état initial.
- φ^t peut ne pas être défini pour tout $(t, x) \in T \times X$.
- Si φ^t est défini pour $t \geq 0$ et $t < 0$, l'opérateur est dit inversible.
- $\varphi^t x_0$ peut n'être défini que localement en temps, e.g. $0 \leq t < t_0$ ("explosion").
- Deux hypothèses :
  1. $\varphi^0 = id$.
  2. $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$

Opérateur d'évolution

- Le temps est discret ou continu : $t \in T$, $T = \mathbb{R}$ ou $T = \mathbb{Z}$.
- $\varphi^t : X \to X$ est tel que $x_t = \varphi^t x_0$, x_0 état initial.
- φ^t peut ne pas être défini pour tout $(t, x) \in T \times X$.
- Si φ^t est défini pour $t \geq 0$ et $t < 0$, l'opérateur est dit inversible.
- $\varphi^t x_0$ peut n'être défini que localement en temps, e.g. $0 \leq t < t_0$ ("explosion").
- Deux hypothèses :
  1. $\varphi^0 = Id$.
  2. $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$

Opérateur d'évolution

- Le temps est discret ou continu : $t \in T$, $T = \mathbb{R}$ ou $T = \mathbb{Z}$.
- $\varphi^t : X \to X$ est tel que $x_t = \varphi^t x_0$, x_0 état initial.
- φ^t peut ne pas être défini pour tout $(t, x) \in T \times X$.
- Si φ^t est défini pour $t \geq 0$ et $t < 0$, l'opérateur est dit inversible.
- $\varphi^t x_0$ peut n'être défini que localement en temps, e.g. $0 \leq t < t_0$ ("explosion").
- Deux hypothèses :
  1. $\varphi^0 = Id$.

Opérateur d'évolution

- Le temps est discret ou continu : $t \in T$, $T = \mathbb{R}$ ou $T = \mathbb{Z}$.
- $\varphi^t : X \to X$ est tel que $x_t = \varphi^t x_0$, x_0 état initial.
- φ^t peut ne pas être défini pour tout $(t, x) \in T \times X$.
- Si φ^t est défini pour $t \geq 0$ et $t < 0$, l'opérateur est dit inversible.
- $\varphi^t x_0$ peut n'être défini que localement en temps, e.g. $0 \leq t < t_0$ ("explosion").
- Deux hypothèses :
  1. $\varphi^0 = Id$.
  2. $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$

Opérateur d'évolution

- Le temps est discret ou continu : $t \in T$, $T = \mathbb{R}$ ou $T = \mathbb{Z}$.
- $\varphi^t : X \to X$ est tel que $x_t = \varphi^t x_0$, x_0 état initial.
- φ^t peut ne pas être défini pour tout $(t, x) \in T \times X$.
- Si φ^t est défini pour $t \geq 0$ et $t < 0$, l'opérateur est dit inversible.
- $\varphi^t x_0$ peut n'être défini que localement en temps, e.g. $0 \leq t < t_0$ ("explosion").
- Deux hypothèses :
  1. $\varphi^0 = Id$.
  2. $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$

Opérateur d'évolution

- Le temps est discret ou continu : $t \in T$, $T = \mathbb{R}$ ou $T = \mathbb{Z}$.
- $\varphi^t : X \to X$ est tel que $x_t = \varphi^t x_0$, x_0 état initial.
- φ^t peut ne pas être défini pour tout $(t, x) \in T \times X$.
- Si φ^t est défini pour $t \geq 0$ et $t < 0$, l'opérateur est dit inversible.
- $\varphi^t x_0$ peut n'être défini que localement en temps, e.g. $0 \leq t < t_0$ ("explosion").
- Deux hypothèses :
  1. $\varphi^0 = Id$.
  2. $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$

Définition d'un système dynamique

Definition

Un triplet $\{T, X, \varphi^t\}$ où $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, X est un espace d'état, et φ^t est une famille d'opérateurs d'évolution paramétrée par t et satisfaisant les deux conditions précédentes.

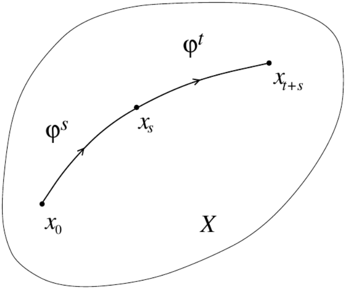


Figure from Kuznetzov 1995,1998.

Un exemple: une équation différentielle

- Le théorème de Cauchy nous permet d'affirmer que pour tout temps t_0 dans un ouvert de $\mathbb{R}$ et tout x_0 dans un ouvert de l'espace de Banach E, il existe une unique solution, notée $u(t, x_0)$, définie sur un intervalle ouvert $J = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ de centre t_0, de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ telle que $u(t_0, x_0) = x_0$.
- Pour chaque $t \in J$ définissons $\varphi^t : H \to E$ par $\varphi^t x_0 = u(t + t_0, x_0)$.
- Alors $\{\mathbb{R}, E, \varphi^t\}$ est un système dynamique:

Un exemple: une équation différentielle

- Le théorème de Cauchy nous permet d'affirmer que pour tout temps t_0 dans un ouvert de $\mathbb{R}$ et tout x_0 dans un ouvert de l'espace de Banach E, il existe une unique solution, notée $u(t, x_0)$, définie sur un intervalle ouvert $J = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ de centre t_0, de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ telle que $u(t_0, x_0) = x_0$.
- Pour chaque $t \in J$ définissons $\varphi^t : H \to E$ par $\varphi^t x_0 = u(t + t_0, x_0)$.
- Alors $\{\mathbb{R}, E, \varphi^t\}$ est un système dynamique:
  - $\varphi^0 x_0 = u(t_0, x_0) = x_0$ pour tout x_0 de H donc $\varphi^0 = \mathrm{Id}$.
  - $\varphi^{t+s} x_0 = u(t + s + t_0, x_0) = \varphi^t u(s + t_0, x_0) = \varphi^t(\varphi^s x_0)$

Un exemple: une équation différentielle

- Le théorème de Cauchy nous permet d'affirmer que pour tout temps t_0 dans un ouvert de $\mathbb{R}$ et tout x_0 dans un ouvert de l'espace de Banach E, il existe une unique solution, notée $u(t, x_0)$, définie sur un intervalle ouvert $J = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ de centre t_0, de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ telle que $u(t_0, x_0) = x_0$.
- Pour chaque $t \in J$ définissons $\varphi^t : H \to E$ par $\varphi^t x_0 = u(t + t_0, x_0)$.
- Alors $\{\mathbb{R}, E, \varphi^t\}$ est un système dynamique:
  - $\varphi^0 x_0 = u(t_0, x_0) = x_0$ pour tout x_0 de H donc $\varphi^0 = \mathrm{Id}$.
  - $\varphi^{t+s} x_0 = u(t + s + t_0, x_0) = \varphi^t u(s + t_0, x_0) = \varphi^t (\varphi^s x_0)$

Un exemple: une équation différentielle

- Le théorème de Cauchy nous permet d'affirmer que pour tout temps t_0 dans un ouvert de $\mathbb{R}$ et tout x_0 dans un ouvert de l'espace de Banach E, il existe une unique solution, notée $u(t, x_0)$, définie sur un intervalle ouvert $J = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ de centre t_0, de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ telle que $u(t_0, x_0) = x_0$.
- Pour chaque $t \in J$ définissons $\varphi^t : H \to E$ par $\varphi^t x_0 = u(t + t_0, x_0)$.
- Alors $\{\mathbb{R}, E, \varphi^t\}$ est un système dynamique:
  - $\varphi^0 x_0 = u(t_0, x_0) = x_0$ pour tout x_0 de H donc $\varphi^0 = \mathrm{Id}$.
  - $\varphi^{t+s} x_0 = u(t + s + t_0, x_0) = \varphi^t u(s + t_0, x_0) = \varphi^t (\varphi^s x_0)$

Un exemple: une équation différentielle

- Le théorème de Cauchy nous permet d'affirmer que pour tout temps t_0 dans un ouvert de $\mathbb{R}$ et tout x_0 dans un ouvert de l'espace de Banach E, il existe une unique solution, notée $u(t, x_0)$, définie sur un intervalle ouvert $J = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ de centre t_0, de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ telle que $u(t_0, x_0) = x_0$.
- Pour chaque $t \in J$ définissons $\varphi^t : H \to E$ par $\varphi^t x_0 = u(t + t_0, x_0)$.
- Alors $\{\mathbb{R}, E, \varphi^t\}$ est un système dynamique:
  - $\varphi^0 x_0 = u(t_0, x_0) = x_0$ pour tout x_0 de H donc $\varphi^0 = \mathrm{Id}$.
  - $\varphi^{t+s} x_0 = u(t + s + t_0, x_0) = \varphi^t u(s + t_0, x_0) = \varphi^t \left(\varphi^s x_0\right)$

Orbites et portraits de phase

Definition (Orbite)

Une orbite partant de x_0 est

$$x \in X \ : \ x = \varphi^t x_0, \forall t \in T, \varphi^t x_0 \text{ est défini}$$

Definition (Equilibre)

x^0 est un équilibre (point fixe) si $\varphi^t x_0 = x_0$ pour tout t

Definition (Cycle)

Un cycle est une orbite périodique L_0 telle que pour tout $x_0 \in L_0$, $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$ pour un $T_0 > 0$, pour tout $t \in T$.

Definition (Portrait de phase)

Le portrait de phase d'un système dynamique est une partition de l'espace d'état en orbites.

Orbites et portraits de phase

Definition (Orbite)

Une orbite partant de x_0 est

$$x \in X \ : \ x = \varphi^t x_0, \forall t \in T, \varphi^t x_0 \text{ est défini}$$

Definition (Equilibre)

x^0 est un équilibre (point fixe) si $\varphi^t x_0 = x_0$ pour tout t

Definition (Cycle)

Un cycle est une orbite périodique L_0 telle que pour tout $x_0 \in L_0$, $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$ pour un $T_0 > 0$, pour tout $t \in T$.

Definition (Portrait de phase)

Le portrait de phase d'un système dynamique est une partition de l'espace d'état en orbites.

Orbites et portraits de phase

Definition (Orbite)

Une orbite partant de x_0 est

$$x \in X \;:\; x = \varphi^t x_0,\ \forall t \in T,\ \varphi^t x_0 \text{ est défini}$$

Definition (Equilibre)

x^0 est un équilibre (point fixe) si $\varphi^t x_0 = x_0$ pour tout t

Definition (Cycle)

Un cycle est une orbite périodique L_0 telle que pour tout $x_0 \in L_0$, $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$ pour un $T_0 > 0$, pour tout $t \in T$.

Definition (Portrait de phase)

Le portrait de phase d'un système dynamique est une partition de l'espace d'état en orbites.

Orbites et portraits de phase

Definition (Orbite)

Une orbite partant de x_0 est

$$x \in X \ : \ x = \varphi^t x_0, \forall t \in T, \varphi^t x_0 \text{ est défini}$$

Definition (Equilibre)

x^0 est un équilibre (point fixe) si $\varphi^t x_0 = x_0$ pour tout t

Definition (Cycle)

Un cycle est une orbite périodique L_0 telle que pour tout $x_0 \in L_0$, $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$ pour un $T_0 > 0$, pour tout $t \in T$.

Definition (Portrait de phase)

Le portrait de phase d'un système dynamique est une partition de l'espace d'état en orbites.

Orbites

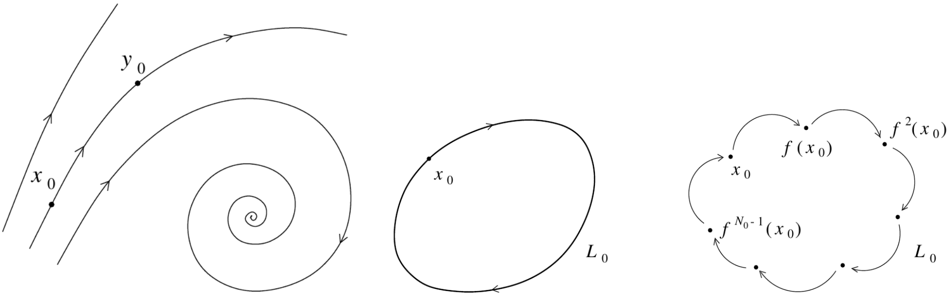
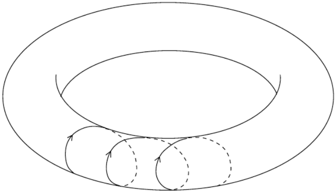


Figure from Kuznetzov 1995,1998.

Ensembles invariants

Definition (Ensemble invariant)

Un ensemble invariant d'un système dynamique $\{T, X, \varphi^t\}$ est un sous-ensemble $S \subset X$ tel que si $x_0 \in S$ alors $\varphi^t x_0 \in S$ pour tout $t \in T$

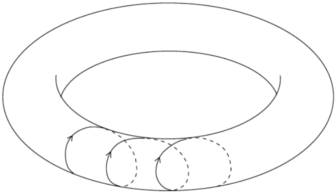


Remarque : Tout orbite est un ensemble invariant.

Ensembles invariants

Definition (Ensemble invariant)

Un ensemble invariant d'un système dynamique $\{T, X, \varphi^t\}$ est un sous-ensemble $S \subset X$ tel que si $x_0 \in S$ alors $\varphi^t x_0 \in S$ pour tout $t \in T$



Remarque : Tout orbite est un ensemble invariant.

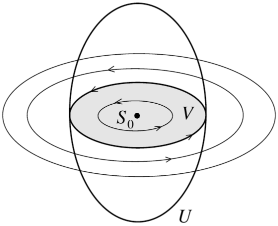
Stabilité des ensembles invariants: Lyapunov

X est un espace métrique complet.

Definition (Ensemble invariant stable au sens de Lyapunov)

Un ensemble invariant S_0 est dit stable si pour tout voisinage U de S_0 suffisamment petit il existe un voisinage V de S_0 tel que $\varphi^t x \in U$ pour tout $x \in V$ et $t > 0$ (Stabilité de Lyapunov): les orbites proches de S_0 ne sortent pas de son voisinage V.

Note: S_0 n'est pas asymptotiquement stable.

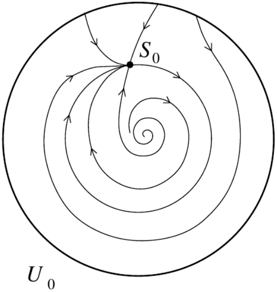


Stabilité des ensembles invariants: asymptotique

Definition (Ensemble invariant asymptotiquement stable)

Un ensemble invariant S_0 est dit asymptotiquement stable si

Il existe un voisinage U_0 de S_0 tel que $\varphi^t x \to S_0$ pour tout $x \in U_0$ quand $t \to +\infty$ (Stabilité asymptotique).



Note : S_0 n'est pas stable au sens de Lyapunov.

Système dynamique discret : point fixe

Théorème

Soit $x \to f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, f C^1, un système dynamique discret. Si x_0 est un point fixe ($x_0 = f(x_0)$), il est (asymptotiquement) stable si toutes les valeurs propres de $Df(x_0)$ sont de module < 1.

La preuve est une application du théorème du point fixe.

Schéma de preuve

- On écrit dans un voisinage V de x_0 :
  $f(x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + O(\|x - x_0\|^2)$.
- D'où $\|f(x) - f(y)\| \leq \|Df(x_0)\| \, \|x - y\| + O(\|x - y\|^2) = (\|Df(x_0)\| + O(\|x - y\|))\|x - y\|$.
- Comme $\|Df(x_0)\|\| \leq \max \mu_k < 1$, on peut choisir V pour que $\sup_{x,\, y \in V}(\|Df(x_0)\| + O(\|x - y\|)) = k < 1$: f est Lipschitz contractante.
- On a trivialement $\|f(x_0) - x_0\| = 0 < \beta(1 - k)$.

Schéma de preuve

- On écrit dans un voisinage V de x_0 : $f(x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + O(\|x - x_0\|^2)$.
- D'où $\|f(x) - f(y)\| \leq \|Df(x_0)\| \, \|x - y\| + O(\|x - y\|^2) = (\|Df(x_0)\| + O(\|x - y\|))\|x - y\|$.
- Comme $\|Df(x_0)\|\| \leq \max \mu_k < 1$, on peut choisir V pour que $\sup_{x,y \in V}(\|Df(x_0)\| + O(\|x - y\|)) = k < 1$: f est Lipschitz contractante.
- On a trivialement $\|f(x_0) - x_0\| = 0 < \beta(1 - k)$.

Schéma de preuve

- On écrit dans un voisinage V de x_0 : $f(x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + O(\|x - x_0\|^2)$.
- D'où $\|f(x) - f(y)\| \leq \|Df(x_0)\| \, \|x - y\| + O(\|x - y\|^2) = (\|Df(x_0)\| + O(\|x - y\|))\|x - y\|$.
- Comme $\|Df(x_0)\|\|\| \leq \max \mu_k < 1$, on peut choisir V pour que $\sup_{x,\, y \in V}(\|Df(x_0)\| + O(\|x - y\|)) = k < 1$: f est Lipschitz contractante.
- On a trivialement $\|f(x_0) - x_0\| = 0 < \beta(1 - k)$.

Schéma de preuve

- On écrit dans un voisinage V de x_0 : $f(x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + O(\|x - x_0\|^2)$.
- D'où $\|f(x) - f(y)\| \leq \|Df(x_0)\| \, \|x - y\| + O(\|x - y\|^2) = (\|Df(x_0)\| + O(\|x - y\|))\|x - y\|$.
- Comme $\|Df(x_0)\|\|| \leq \max \mu_k < 1$, on peut choisir V pour que $\sup_{x,\, y \in V}(\|Df(x_0)\| + O(\|x - y\|)) = k < 1$: f est Lipschitz contractante.
- On a trivialement $\|f(x_0) - x_0\| = 0 < \beta(1 - k)$.

Système dynamique discret : existence d'un point fixe stable

Théorème

Soit X un espace métrique complet, d sa fonction distance. Si $f : X \to X$ est contractante, i.e. $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$, $0 < \lambda < 1$, alors le système dynamique discret $\{\mathbb{Z}_+, X, f^k\}$ a un point fixe stable $x^0 \in X$ et pour tout $x \in X$ on a $\lim_{k\to+\infty} f^k(x) = x_0$.

La preuve est une application du théorème du point fixe.

Système dynamique continu : stabilité

Théorème

Soit $\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n$*, f* C^1*, un système dynamique continu. Si* x_0 *est un point fixe* $(f(x_0) = 0)$*, alors si les valeurs propres de* $Df(x_0)$ *sont de partie réelle négative,* x_0 *est stable.*

Schéma de preuve

- Au voisinage de l'équilibre

$$\dot{x} = Ax + F(x),\ F(x) = O(\|x\|^2) \text{ lisse}$$

- D'où

$$\varphi^t x = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(\varphi^\tau x)\, d\tau$$

- Donc le déplacement par unité de temps le long des orbites s'écrit

$$\varphi^1 x = Bx + O(\|x\|^2),\ B = e^A$$

- Le résultat s'obtient en remarquant que $\mu_k = e^{\lambda_k}$ et en appliquant le théorème du point fixe.

Schéma de preuve

- Au voisinage de l'équilibre

$$\dot{x} = Ax + F(x), \; F(x) = O(\|x\|^2) \text{ lisse}$$

- D'où

$$\varphi^t x = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(\varphi^\tau x)\, d\tau$$

- Donc le déplacement par unité de temps le long des orbites s'écrit

$$\varphi^1 x = Bx + O(\|x\|^2), \; B = e^A$$

- Le résultat s'obtient en remarquant que $\mu_k = e^{\lambda_k}$ et en appliquant le théorème du point fixe.

Schéma de preuve

- Au voisinage de l'équilibre

$$\dot{x} = Ax + F(x), \; F(x) = O(\|x\|^2) \text{ lisse}$$

- D'où

$$\varphi^t x = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(\varphi^\tau x)\, d\tau$$

- Donc le déplacement par unité de temps le long des orbites s'écrit

$$\varphi^1 x = Bx + O(\|x\|^2), \; B = e^A$$

- Le résultat s'obtient en remarquant que $\mu_k = e^{\lambda_k}$ et en appliquant le théorème du point fixe.

Schéma de preuve

- Au voisinage de l'équilibre

$$\dot{x} = Ax + F(x),\ F(x) = O(\|x\|^2) \text{ lisse}$$

- D'où

$$\varphi^t x = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-\tau)}F(\varphi^\tau x)\, d\tau$$

- Donc le déplacement par unité de temps le long des orbites s'écrit

$$\varphi^1 x = Bx + O(\|x\|^2),\ B = e^A$$

- Le résultat s'obtient en remarquant que $\mu_k = e^{\lambda_k}$ et en appliquant le théorème du point fixe.