

# Mouvement brownien et bruit blanc

Olivier FAUGERAS

12 Novembre 2008

# Plan

Motivations et définitions

Construction du mouvement brownien

Propriété des trajectoires

Propriété de Markov

# Plan

Motivations et définitions

Construction du mouvement brownien

Propriété des trajectoires

Propriété de Markov

# Plan

Motivations et définitions

Construction du mouvement brownien

Propriété des trajectoires

Propriété de Markov

# Plan

Motivations et définitions

Construction du mouvement brownien

Propriété des trajectoires

Propriété de Markov

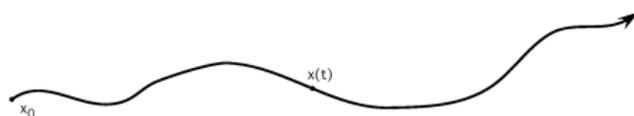
# Motivations

- ▶ Nous avons considéré jusqu'à présent des EDO de la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(t)) & t > 0 \\ \mathbf{x}(0) = x_0 \end{cases}$$

où  $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un champ de vecteur régulier.

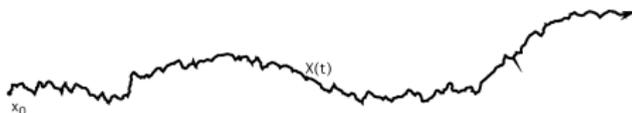
Les trajectoires des solutions sont régulières :



TRAJECTORY OF THE DIFFERENTIAL EQUATION

## Motivations

Dans de nombreuses applications, les trajectoires mesurées ressemblent plutôt à :



SAMPLE PATH OF THE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION

On peut être tenté de perturber le système initial avec de l'aléatoire. De manière formelle :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t))\xi(t) & t > 0 \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

où  $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}^{n \times m}$ , l'ensemble des matrices  $n \times m$ , et  $\xi$  est un "bruit-blanc" de dimension  $m$ . C'est une équation différentielle stochastique (EDS)

# Motivations

Ceci pose les problèmes mathématiques suivants

- ▶ Définir le bruit blanc.
- ▶ Définir les solutions d'une EDS.
- ▶ Etudier l'existence, l'unicité des solutions de l'EDS, leur dépendance par rapport aux paramètres, aux conditions initiales.

# Une heuristique

Dans le cas  $m = n$ ,  $X_0 = 0$ ,  $\mathbf{b} = 0$ ,  $\mathbf{B} = Id$ , la solution est ce qu'on appelle le mouvement brownien ou le processus de Wiener de dimension  $n$ , ce qu'on écrit (symboliquement) :

$$\dot{\mathbf{W}}(\cdot) = \xi(\cdot)$$

“Le bruit blanc est la dérivée du processus de Wiener”.

## Marches aléatoires

- ▶ On considère la grille 2D  $\{(m\Delta x, n\Delta t) \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
- ▶ Une particule se trouve en  $x = 0$  à  $t = 0$ .
- ▶ A chaque instant  $n\Delta t$  elle avance ou elle recule avec la probabilité  $1/2$ .
- ▶ Soit  $p(m, n)$  la probabilité de trouver la particule en  $m\Delta x$  à l'instant  $n\Delta t$ .
- ▶ On a la relation

$$p(m, 0) = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ 1 & m = 0 \end{cases}$$

# Marches aléatoires

- ▶ Et aussi

$$p(m, n+1) = \frac{1}{2}p(m-1, n) + \frac{1}{2}p(m+1, n),$$

- ▶ Donc

$$p(m, n+1) - p(m, n) = \frac{1}{2}(p(m-1, n) - 2p(m, n) + p(m+1, n))$$

## Marches aléatoires

- ▶ Si  $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = D$ , constante,

$$\frac{p(m, n+1) - p(m, n)}{\Delta t} = \frac{D}{2} \left( \frac{p(m-1, n) - 2p(m, n) + p(m+1, n)}{(\Delta x)^2} \right)$$

- ▶ Si maintenant  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $m\Delta x \rightarrow x$ ,  $n\Delta t \rightarrow t$  avec  $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = D$ , alors, sans doute,  $p(m, n) \rightarrow f(x, t)$  qui satisfait

$$f_t = \frac{D}{2} f_{xx}$$

- ▶ C'est une équation de diffusion ou équation de la chaleur.

# Marches aléatoires

- ▶ Avec la condition initiale  $f(x, 0) = \delta(x)$  on trouve la solution

$$f(x, t) = \frac{1}{(2\pi Dt)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{2Dt}}$$

- ▶ La densité de probabilité est  $\mathcal{N}(0, Dt)$ .

## Justification mathématique

- ▶ On utilise le théorème de Laplace-De Moivre.
- ▶ Soient  $X_i$ ,  $i = 1, \dots$  des variables aléatoires à valeurs dans  $\{0, 1\}$  indépendantes et identiquement uniformément distribuées (donc  $V(X_i) = 1/4$ ).
- ▶ On définit la v.a.

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

C'est le nombre de mouvements en avant jusqu'au temps  $n\Delta t$ .

- ▶ Soit  $X(t)$  la position de la particule à l'instant  $n\Delta t$  :

$$X(t) = S_n\Delta x + (n - S_n)(-\Delta x) = (2S_n - n)\Delta x$$

## Justification mathématique

- ▶ On vérifie que

$$V(X(t)) = (\Delta x)^2 n = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} t = Dt$$

- ▶ Puis,

$$X(t) = \left( \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \right) \sqrt{n} \Delta x = \left( \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \right) \sqrt{Dt}$$

- ▶ Le théorème de Laplace-De Moivre implique que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ t = n\Delta t, \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}}} P(a \leq X(t) \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2Dt}} dx$$

# Justification mathématique

On est conduit à la définition

## Définition

*Un processus aléatoire réel  $W(\cdot)$  est dit processus de Wiener ou mouvement brownien si*

- ▶  $W(0) = 0$  p.s.,
- ▶  $W(t) - W(s)$  a pour loi  $\mathcal{N}(0, t - s)$  pour tout  $t \geq s \geq 0$ ,
- ▶ Quels que soient les instants  $0 < t_1 < \dots < t_n$  les v.a.  $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$  sont indépendantes (indépendance des accroissements).

Noter que  $\mathbb{E}[W(t)] = 0$  et  $\mathbb{E}[W^2(t)] = t$ .

# Calcul des lois jointes

- ▶ On sait que

$$P(a_1 \leq W(t_1) \leq b_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} \int_{a_1}^{b_1} e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}} dx_1$$

- ▶ Sachant que  $W(t_1) = x_1$  avec  $a_1 \leq x_1 \leq b_1$  on peut parier que  $W(t_2)$  est  $\mathcal{N}(x_1, t_2 - t_1)$  sur l'intervalle  $[t_1, t_2]$ .

# Calcul des lois jointes

- ▶ En posant

$$g(x, t | y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}},$$

- ▶ on s'attend à ce que

$$\begin{aligned} P(a_1 \leq W(t_1) \leq b_1, \dots, a_n \leq W(t_n) \leq b_n) = \\ \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1, t_1 | 0) g(x_2, t_2 - t_1 | x_1) \dots \\ g(x_n, t_n - t_{n-1} | x_{n-1}) dx_n \dots dx_1 \end{aligned}$$

# Calcul des lois jointes

## Théorème

Soit  $W(\cdot)$  un processus de Wiener de dimension 1. Pour tout entier positif  $n$  et pour tous les choix d'instant

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  et pour toutes les fonctions mesurables  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(W(t_1), \dots, W(t_n))] = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) g(x_1, t_1 | 0) g(x_2, t_2 - t_1 | x_1) \dots \\ g(x_n, t_n - t_{n-1} | x_{n-1}) dx_n \dots dx_1 \end{aligned}$$

# Calcul des lois jointes

## Preuve :

On pose  $X_i = W(t_i)$ ,  $Y_i = X_i - X_{i-1}$  pour  $i = 1, \dots, n$ , on définit  $h(y_1, y_2, \dots, y_n) = f(y_1, y_1 + y_2, \dots, y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ . Le résultat provient de l'indépendance des  $Y_i$ .

# Construction d'un processus de Wiener monodimensionnel

## Lemme

Soit  $W(\cdot)$  un processus de Wiener de dimension 1. Alors

$$\mathbb{E}[W(t)W(s)] = t \wedge s = \min\{t, s\} \quad t, s \geq 0$$

La preuve utilise l'indépendance des accroissements.  
La fonction  $r(s, t) = \mathbb{E}[W(t)W(s)]$  s'appelle la fonction d'autocorrélation du processus  $W(\cdot)$  (en fait, puisque  $\mathbb{E}[W(t)] = 0$ , c'est la fonction d'autocovariance).

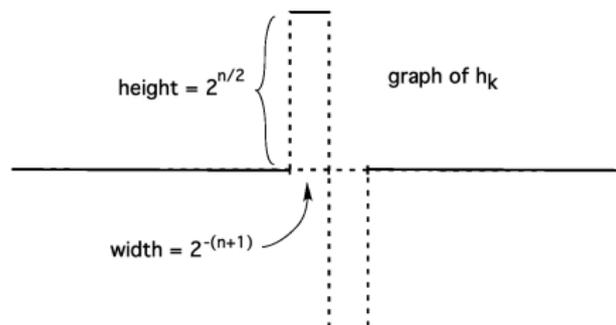
# Construction de Lévy-Ciesilsky

## Lemme

Les fonctions de Haar  $\{h_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$  définies sur  $[0, 1]$  forment une base complète orthonormale de  $L^2(0, 1)$

### Preuve :

On montre que si  $f \in L^2(0, 1)$  est telle que  $\int_0^1 f(t)h_k(t) dt$  pour tout  $k \geq 0$  alors  $f = 0$  p.p.



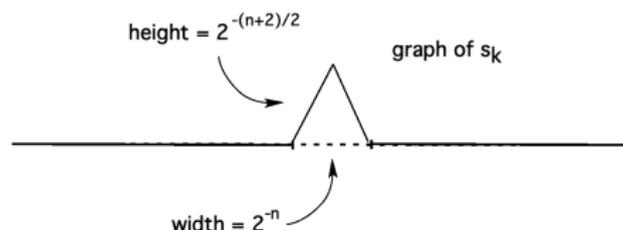
GRAPH OF A HAAR FUNCTION

# Construction de Lévy-Ciesilsky

## Définition

$$s_k(t) = \int_0^t h_k(s) ds \quad 0 \leq t \leq 1 \quad k = 0, 1, \dots$$

*est la k-ième fonction de Schauder.*



GRAPH OF A SCHAUDER FUNCTION

## Construction de Lévy-Ciesilsky

On définit (formellement)  $W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k s_k(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , où les coefficients  $A_k$  sont des v.a. i.i.d  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

### Lemme

Soit  $\{a_k\}_{k \geq 0}$  une suite de réels tels que

$$|a_k| = O(k^\delta) \quad k \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \delta < 1/2,$$

alors la série  $\sum_0^\infty a_k s_k(t)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

### Preuve :

Il suffit de remarquer que  $\max_{2^n \leq k \leq 2^{n+1}} |a_k| \leq C(2^{n+1})^\delta$ .

# Construction de Lévy-Ciesilsky

## Lemme

Soit  $\{A_k\}_{k \geq 0}$  une suite de v.a. i.i.d.  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Alors on a p.s.

$|A_k(\omega)| = O(\sqrt{\log k})$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

## Preuve :

- ▶ On majore  $P(|A_k| > x)$  par  $Ce^{-\frac{x^2}{4}}$ ,  $C > 0$ .
- ▶ On en déduit pour  $x = 4\sqrt{\log k}$ ,  $P(|A_k| > 4\sqrt{\log k}) \leq C\frac{1}{k^4}$ .
- ▶ L'application du lemme de Borel-Cantelli donne  $P(|A_k| > 4\sqrt{\log k} \text{ i.s.}) = 0$ , i.s. = "infinitement souvent".
- ▶ Donc pour presque tout  $\omega$ ,  $|A_k(\omega)| \leq 4\sqrt{\log k}$  dès que  $k \geq K(\omega)$ .

## Construction de Lévy-Ciesilsky

### Lemme

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k(s)s_k(t) = t \wedge s \text{ pour } 0 \leq s, t \leq 1.$$

### Preuve :

- ▶ Soit  $\Phi_s(\tau) = 1$  si  $0 \leq \tau \leq s$  et 0 sinon.
- ▶ D'après le lemme sur les fonctions de Haar on a, si  $s \leq t$

$$s = \int_0^1 \Phi_t \Phi_s d\tau = \sum_{k \geq 0} a_k b_k,$$

- ▶ avec

$$a_k = \int_0^1 \Phi_t h_k d\tau = \int_0^t h_k d\tau = s_k(t)$$

et pour la même raison  $b_k = s_k(s)$ .

# Construction de Lévy-Ciesilsky

## Théorème

Soit  $\{A_k\}_{k \geq 0}$  une suite de v.a. i.i.d.  $\mathcal{N}(0, 1)$  définies sur le même espace de probabilité. La somme

$$W(t, \omega) = \sum_{k \geq 0} A_k(\omega) s_k(t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

converge uniformément en  $t$  p.s. De plus

1.  $W(\cdot)$  est un mouvement brownien pour  $0 \leq t \leq 1$ .
2. Les trajectoires  $t \rightarrow W(t, \omega)$  sont continues p.s.

## Construction de Lévy-Ciesilsky

### Schéma de preuve :

- ▶ La convergence uniforme est une conséquence des lemmes précédents et implique (ii) et  $W(0) = 0$  p.s..
- ▶ On montre que  $W(t) - W(s)$  est  $\mathcal{N}(0, t - s)$  en calculant la fonction caractéristique et en utilisant l'indépendance des  $A_k$  et le lemme précédent.
- ▶ On démontre ensuite, pour  $m = 1, 2, \dots$  et pour tout  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq 1$  que la fonction de répartition  $F_{W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})}(x_1, \dots, x_m)$  est égale à  $F_{W(t_1)}(x_1) F_{W(t_2) - W(t_1)}(x_2) \dots F_{W(t_m) - W(t_{m-1})}(x_m)$  en utilisant la fonction caractéristique :

$$\mathbb{E} \left[ e^{i \sum_{j=1}^m \lambda_j (W(t_j) - W(t_{j-1}))} \right] = \prod_{j=1}^m e^{-\frac{\lambda_j^2}{2} (t_j - t_{j-1})}$$

# Construction de Lévy-Ciesilsky

## Théorème

*Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité sur lequel il existe une famille dénombrable de v.a. i.i.d.  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Alors il existe un mouvement brownien  $W(\cdot)$  défini pour  $\omega \in \Omega$  et  $t \geq 0$ .*

## Preuve :

On construit une famille dénombrable de mouvements browniens  $W^n(t)$ ,  $n \geq 0$  sur  $[0, 1]$  puis  $W$  par induction :

$$W(t) = W(n-1) + W^n(t - (n-1)) \quad n-1 \leq t \leq n$$

# Mouvement brownien dans $R^n$

## Définition

Un processus stochastique  $\mathbf{W}(\cdot) = (W^1(\cdot), \dots, W^n(\cdot))$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  est un processus de Wiener (ou un mouvement brownien)  $n$ -dimensionnel si

1. Pour chaque  $k = 1, \dots, n$ ,  $W^k(\cdot)$  est un processus de Wiener monodimensionnel.
2. Les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{W}^k = \mathcal{A}(W^k(t) \mid t \geq 0)$  sont indépendantes pour  $k = 1, \dots, n$ .

En utilisant les résultats précédents on sait construire un processus de Wiener  $n$ -dimensionnel.

# Mouvement brownien dans $R^n$

## Lemme

Si  $\mathbf{W}(\cdot)$  est un processus de Wiener  $n$ -dimensionnel alors

1.  $\mathbb{E} [W^k(t)W^l(s)] = (t \wedge s)\delta_{kl} \quad k, l = 1, \dots, n$
2.  $\mathbb{E} [(W^k(t) - W^k(s))(W^l(t) - W^l(s))] = (t - s)\delta_{kl} \quad k, l = 1, \dots, n \quad t \geq s \geq 0$

# Mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$

## Théorème

1. Si  $\mathbf{W}(\cdot)$  est un processus de Wiener  $n$ -dimensionnel, alors  $\mathbf{W}(t) \sim \mathcal{N}(0, t \text{Id})$  pour  $t > 0$ .  $\text{Id}$  est la matrice identité de taille  $n$ .
2. Pour chaque fonction mesurable  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on a, si  $g(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{2t}}$  :

$$\mathbb{E} [f(\mathbf{W}(t_1), \dots, \mathbf{W}(t_m))] = \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) g(\mathbf{x}_1, t_1 | 0) g(\mathbf{x}_2, t_2 - t_1 | \mathbf{x}_1) \dots g(\mathbf{x}_m, t_m - t_{m-1} | \mathbf{x}_{m-1}) d\mathbf{x}_m \dots d\mathbf{x}_1$$

# Continuité

## Définition

Soit  $0 < \gamma \leq 1$ . Une fonction  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite uniformément hölderienne d'exposant  $\gamma$  s'il existe une constante  $K$  telle que

$$|f(t) - f(s)| \leq K |t - s|^\gamma \quad \forall t, s \in [0, T]$$

## Continuité

On utilise le théorème suivant dû à Kolmogorov :

### Théorème

*Soit  $\mathbf{X}(\cdot)$  un processus stochastique à trajectoires continues p.s. et tel que*

$$\mathbb{E} \left[ |\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(s)|^\beta \right] \leq C |t - s|^{1+\alpha}, \quad \alpha, \beta > 0, C \geq 0 \quad \forall t, s \geq 0.$$

*Alors pour tout  $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $T > 0$  et pour presque tout  $\omega$ , il existe une constante  $K(\omega, \gamma, T)$  telle que*

$$|\mathbf{X}(t, \omega) - \mathbf{X}(s, \omega)| \leq K |t - s|^\gamma \quad \forall 0 \leq s, t \leq T$$

On a donc continuité hölderienne uniforme d'exposant  $\gamma$  sur  $[0, T]$ .

# Continuité

## Schéma de démonstration :

- ▶ On suppose pour simplifier que  $T = 1$ . Soit  $\gamma$  tel que  $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$ . On considère les événements  $A_n = \{ |\mathbf{X}(\frac{i+1}{2^n}) - \mathbf{X}(\frac{i}{2^n})| > \frac{1}{2^{n\gamma}} \}$  pour un entier  $i$  tel que  $0 \leq i < 2^n$  pour  $n \geq 1$ .
- ▶ Par l'inégalité de Chebyshev on majore  $P(A_n)$  par  $C 2^{n(-\alpha+\beta\gamma)}$  et on en déduit que  $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty$ .
- ▶ Le lemme de Borel-Cantelli implique que  $P(A_n \text{ i.s.}) = 0$  et donc que pour presque tout  $\omega$  il existe  $m = m(\omega)$  tel que si  $n \geq m$

$$\left| \mathbf{X}\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - \mathbf{X}\left(\frac{i}{2^n}\right) \right| \leq \frac{1}{2^{n\gamma}} \quad 0 \leq i \leq 2^n - 1$$

# Continuité

- ▶ On peut donc trouver  $K(\omega)$  tel que

$$\begin{cases} |\mathbf{X}(\frac{i+1}{2^n}) - \mathbf{X}(\frac{i}{2^n})| \leq K \frac{1}{2^{n\gamma}} \\ \forall n \geq 0 \end{cases}$$

- ▶ On montre alors que ceci implique la propriété hölderienne.

# Continuité

## Application au mouvement brownien :

On montre que

$$\mathbb{E} \left[ |\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(s)|^{2m} \right] = C |t - s|^m$$

pour tout  $m \geq 1$ .

Les hypothèses du théorème de Kolmogorov sont satisfaites pour  $\beta = 2m$  et  $\alpha = m - 1$ .  $\mathbf{W}(\cdot)$  est donc hölderien pour tous les exposants  $\gamma$  tels que  $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$

# Différentiabilité

## Théorème (Dvoretzky, Erdős, Kakutani)

1. *Pour tout  $\gamma$ ,  $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$  et pour presque tout  $\omega$ ,  $t \rightarrow \mathbf{W}(t, \omega)$  n'est nulle part hölderien d'exposant  $\gamma$ .*
2. *En particulier, p.s., la trajectoire  $t \rightarrow \mathbf{W}(t, \omega)$  n'est différentiable nulle part et de variation infinie sur chaque sous intervalle.*

# Différentiabilité

## Schéma de démonstration :

Il suffit de considérer un mouvement brownien de dimension 1 sur  $[0, 1]$ .

- ▶ On choisit  $N$  assez grand pour que  $N(\gamma - \frac{1}{2}) > 1$ .
- ▶ Supposons que  $t \rightarrow W(t, \omega)$  soit Hölder d'exposant  $\gamma$  en  $s$ ,  $0 \leq s < 1$ . Alors il existe  $K$  tel que

$$|W(t, \omega) - W(s, \omega)| \leq K|t - s|^\gamma \quad \forall t \in [0, 1]$$

## Différentiabilité

- ▶ On choisit  $n \gg 1$  et  $i = [ns] + 1$ , alors pour  $j = i, i + 1, \dots, i + N - 1$  on a

$$\left| W\left(\frac{j+1}{n}, \omega\right) - W\left(\frac{j}{n}, \omega\right) \right| \leq \left| W(s, \omega) - W\left(\frac{j}{n}, \omega\right) \right| + \left| W(s, \omega) - W\left(\frac{j+1}{n}, \omega\right) \right| \leq \frac{M}{n^\gamma}$$

pour une certaine constante  $M$ .

- ▶ Donc  $\omega$  appartient à l'un des événements

$$A_{M,n}^i = \left\{ \left| W\left(\frac{j+1}{n}\right) - W\left(\frac{j}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{n^\gamma} \quad j = i, \dots, i + N - 1 \right\}$$

pour certains  $i$  tels que  $1 \leq i \leq n$ , un  $M \geq 1$  et tous les  $n$  assez grands.

## Différentiabilité

- ▶ L'ensemble des  $\omega$  tels que  $W(\omega, \cdot)$  est Hölder de coefficient  $\gamma$  est inclus dans l'ensemble

$$\bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n A_{M,n}^i$$

- ▶ On montre que cet événement est de probabilité nulle, d'où découle 1.
- ▶ Si  $W(t, \omega)$  est différentiable en  $s$  il est Hölder de coefficient 1 en ce point ce qu'il n'est pas p.s. Enfin, si  $W(t, \omega)$  est de variation finie sur un sous-intervalle il est différentiable p.p. sur cet intervalle.

# Bruit blanc

## Définition

Soit  $X(\cdot)$  un processus à valeur réelles tel que  $\mathbb{E}[X^2(t)] < \infty$  pour tout  $t \geq 0$ . On définit sa fonction d'autocorrélation

$$r(t, s) = \mathbb{E}[X(t)X(s)], \quad t, s \geq 0,$$

et sa fonction d'autocovariance

$$a(t, s) = \mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}[X(t)])(X(s) - \mathbb{E}[X(s)])], \quad t, s \geq 0,$$

Si  $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[X(s)]$  pour tous  $s, t \geq 0$  et  $r(t, s) = c(t - s)$ , pour une fonction  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on dit que le processus  $X(\cdot)$  est stationnaire.

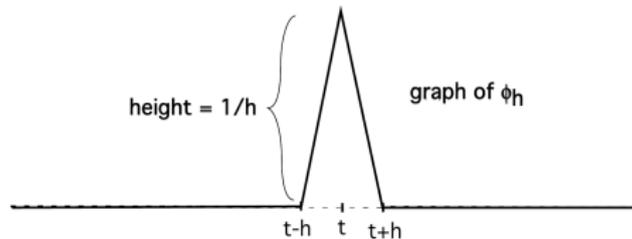
## Bruit blanc

- ▶ Nous avons défini au début de la leçon le bruit blanc comme la “dérivée” d’un processus de Wiener dont nous savons maintenant que ses trajectoires sont p.s. nul part dérivable.
- ▶ On peut néanmoins “définir” un bruit blanc comme un processus stationnaire à valeurs réelles de moyenne nulle et de fonction d’autorrélation  $c(t) = \delta(t)$ .
- ▶ On le voit en définissant la fonction

$$\Phi_h(s) = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{W(t+h) - W(t)}{h} \right) \left( \frac{W(s+h) - W(s)}{h} \right) \right],$$

pour  $h > 0$ ,  $t > 0$  fixé, en utilisant les propriétés du mouvement brownien et en faisant tendre  $h$  vers 0 (voir figure).

# Bruit blanc



# Markov

## Définition

Si  $\Gamma$  est une  $\sigma$ -algèbre,  $\Gamma \subset \mathcal{A}$  alors, pour tout borélien  $A$  de  $\mathcal{A}$  on définit la v.a.  $P(A | \Gamma) = \mathbb{E}[\chi_A | \Gamma]$

$P(A | \Gamma)$  est la probabilité conditionnelle de  $A$  étant donné  $\Gamma$ .

## Définition

Si  $\mathbf{X}(\cdot)$  est un processus stochastique, la  $\sigma$ -algèbre

$$\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(\mathbf{X}(r) | 0 \leq r \leq s)$$

s'appelle l'historique du processus jusqu'au temps  $s$ .

# Markov

## Définition

Un processus  $\mathbf{X}(\cdot)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  est dit de Markov si

$$P(\mathbf{X}(t) \in B \mid \mathcal{A}(s)) = P(\mathbf{X}(t) \in B \mid \mathbf{X}(s)) \text{ p.s.}$$

pour tout  $s$  tel que  $0 \leq s < t$  et pour tout borélien  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ .

# Markov

## Théorème

Soit  $\mathbf{W}(\cdot)$  un processus de Wiener  $n$ -dimensionnel. Alors  $\mathbf{W}(\cdot)$  est de Markov et p.s.

$$P(\mathbf{W}(t) \in A \mid \mathbf{W}(s)) = \frac{1}{(2\pi(t-s))^{n/2}} \int_A e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{W}(s)|^2}{2(t-s)}} dx$$

pour tous  $s$  tels que  $0 \leq s < t$  et tous les boréliens  $B$ .

Noter que les deux côtés de cette égalité sont des v.a.

# Markov

## Schéma de preuve de la deuxième partie :

- ▶ On définit

$$\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi(t-s))^{n/2}} \int_A e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{2(t-s)}} d\mathbf{x}$$

- ▶ On remarque que  $\Phi(\mathbf{W}(s))$  est mesurable par rapport à la tribu  $\mathcal{A}(\mathbf{W}(s))$ .
- ▶ Il suffit donc de montrer que pour tout borélien  $C$  de  $\mathcal{A}(\mathbf{W}(s))$

$$\int_C \chi_{\mathbf{W}(t) \in A} dP = \int_C \Phi(\mathbf{W}(s)) dP$$

- ▶ Ceci résulte de ce que  $C = \{\mathbf{W}(s) \in B\}$  pour un certain borélien  $B \subset \mathbb{R}^n$  et des définitions.

# Markov

- ▶ Par exemple

$$\begin{aligned}
 \int_C \chi_{\mathbf{W}(t) \in A} dP &= P(\mathbf{W}(s) \in B, \mathbf{W}(t) \in A) \\
 &= \int_B \int_A g(y, s | 0) g(\mathbf{x}, t - 1 | \mathbf{y}) d\mathbf{x} dy \\
 &= \int_B g(\mathbf{y}, s | 0) \Phi(\mathbf{y}) dy
 \end{aligned}$$

- ▶ et

$$\begin{aligned}
 \int_C \Phi(\mathbf{W}(s)) dP &= \int_{\Omega} \chi_B(\mathbf{W}(s)) \Phi(\mathbf{W}(s)) dP \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) \frac{e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2s}}}{(2\pi s)^{n/2}} dy
 \end{aligned}$$

