Bifurcations de codimension 1 des équilibres des systèmes dynamiques continus

Olivier FAUGERAS

22 Octobre 2008

Plan

Introduction

Forme normale de la bifurcation pli

Forme normale de la bifurcation d'Andronov-Hopf

Plan

Plan

Conditions de bifurcation

On considère

$$\dot{x} = f(x, \alpha),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

- La situation "$x = x_0$ est un équilibre hyperbolique pour $\alpha = \alpha_0$" perdure pour de petites variations du paramètre α (voir leçon 2).
- Deux manières génériques de changer cette situation :
  1. Une valeur propre simple λ_1 passe par 0 : c'est la bifurcation **pli**.
  2. Un couple de valeurs propres simples $\lambda_{1,2}$ traverse l'axe imaginaire pur : c'est la bifurcation d'**Andronov-Hopf**.

Le cas 1D

Le système

$$\dot{x} = \alpha + x^2 \equiv f(x, \alpha),\ x,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Le cas 1D

- a un équilibre non-hyperbolique $x_0 = 0$ pour $\alpha = 0$ avec $\lambda = f_x(0,0) = 0$.
- Pour $\alpha < 0$ on a deux equilibres $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha}$, un stable, l'autre instable.
- Ces équilibres disparaissent pour $\alpha > 0$ par “collision” pour $\alpha = 0$

Le cas 1D

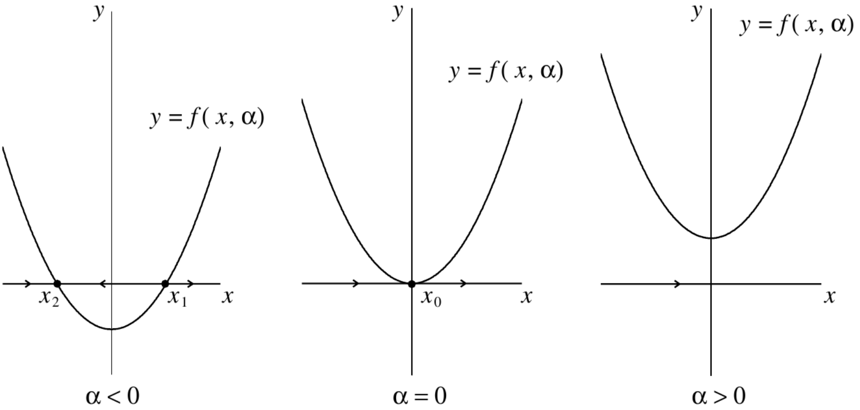

Figure tirée de Kuznetzov 1998.

Le cas 1D

Le système

$$\dot{x} = \alpha - x^2$$

est similaire.

Le cas 1D

Lemme

Le système $\dot{x} = \alpha + x^2 + O(x^3)$ *est localement topologiquement équivalent au système* $\dot{x} = \alpha + x^2$.

Le cas 1D

Schéma de preuve :

- On réécrit le système précédent sous la forme $\dot{y} = F(y, \alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha)$, $\psi = O(y^3)$ régulière en (y, α) autour de $(0, 0)$.
- On considère la variété M des équilibres au voisinage de l'origine : $M = \{(y, \alpha) : F(y, \alpha) = 0\}$.
- On remarque que $F(0, 0) = 0$ et que $F_\alpha(0, 0) = 1$ et on applique le théorème des fonctions implicites : $M = \{(y, \alpha) : \alpha = g(y)\}$, g régulière et $g(y) = -y^2 + O(y^3)$.
- On en déduit l'existence pour $\alpha < 0$ petit de deux équilibres $y_{1,2}(\alpha)$ proches de $x_{1,2}(\alpha)$.

Le cas 1D

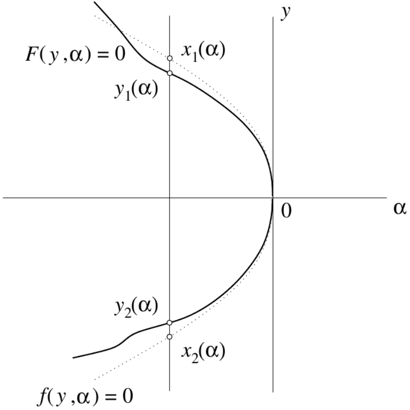

Figure tirée de Kuznetzov 1998.

Le cas 1D

- Pour $|\alpha|$ petit, on construit un homéomorphisme $y = h_\alpha(x)$:

$$h_\alpha(x) = \begin{cases} x & \alpha \geq 0 \\ a(\alpha) + b(\alpha)x & \alpha < 0 \end{cases}$$

- Avec les conditions $h_\alpha(x_j(\alpha)) = y_j(\alpha)$, $j = 1, 2$

Forme normale

Théorème

Si le système $\dot{x} = f(x, \alpha)$, x, $\alpha \in \mathbb{R}$, *f régulière a pour* $\alpha = 0$ *l'équilibre* $x = 0$ *avec* $\lambda = f_x(0, 0) = 0$ *et si les deux conditions*

1. $f_{x^2}(0, 0) \neq 0$.
2. $f_\alpha(0, 0) \neq 0$.

sont satisfaites, alors il existe des changements inversibles de paramètres et de coordonnées qui transforment le système en

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2 + O(\eta^3)$$

Forme normale

Idées et schéma de preuve :

- On fait un développement de Taylor par rapport à x à l'ordre 2 en $x = 0$:

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3)$$

avec $f_0(0) = f(0, 0) = 0$ (condition d'*équilibre*) et $f_1(0) = f_x(0, 0) = 0$ (condition de *pli*).

- L'idée (générale) est d'effectuer des changements de coordonnées et de paramètre régulières et inversibles.
- Ce faisant on voit apparaître des conditions de non-dégénérescence et de transversalité.

Forme normale

Etape 1 : changement de coordonnée
on pose $\xi = x + \delta(\alpha)$, δ régulière. On obtient

$$\dot{\xi} = \cdots + [f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)]\xi + \cdots + O(\xi^3)$$

Si $f_2(0) = \frac{1}{2} f_{xx}(0,0) \neq 0$ on applique le théorème des fonctions implicites à $F(\alpha, \delta) = f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \delta^2\psi(\alpha, \delta)$, ψ régulière et on en déduit l'existence d'une fonction régulière $\delta = \delta(\alpha)$ de la forme $\delta(\alpha) = \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)}\alpha + O(\alpha^2)$ d'où

$$\dot{\xi} = [f_0'(0)\alpha + O(\alpha^2)] + [f_2(0) + O(\alpha)]\xi^2 + O(\xi^3)$$

Forme normale

Etape 2 : nouveau paramètre
On définit $\mu = \mu(\alpha) = f_0'(0)\alpha + \alpha^2\Phi(\alpha)$, Φ régulière. On a $\mu(0) = 0$ et $\mu'(0) = f_0'(0) = f_\alpha(0,0)$. Si $f_\alpha(0,0) \neq 0$ le théorème des fonctions implicites nous donne l'existence d'une fonction régulière $\alpha = \alpha(\mu)$ avec $\alpha(0) = 0$ et

$$\dot{\xi} = \mu + a(\mu)\xi^2 + O(\xi^3),$$

$a(\mu)$ est régulière et $a(0) = f_2(0) \neq 0$.

Forme normale

Etape 3 : mise à l'échelle
On pose $\eta = |a(\mu)|\xi$ et $\beta = |a(\mu)|\mu$. On en déduit

$$\dot{\xi} = \beta + s\eta^2 + O(\eta^3) \quad s = \pm 1 = \mathrm{sign}(a(0))$$

Forme normale

On en déduit le

Théorème (Forme normale topologique)

Un système générique $\dot{x} = f(x, \alpha)$ *ayant pour* $\alpha = 0$ *l'équilibre* $x = 0$ *satisfaisant* $\lambda = f_x(0, 0) = 0$ *est localement topologiquement équivalent au voisinage de l'origine à l'une des deux formes normales*

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2$$

Préliminaires

Le système

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a un équilibre en $(0, 0)$ pour tout α. La jacobienne vaut en ce point

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

avec les valeurs propres $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$.

Préliminaires

On utilise aussi les représentations complexe et en coordonnées polaires (voir leçon 2) :

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2 \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\rho} & = & \rho(\alpha - \rho^2) \\ \dot{\theta} & = & 1 \end{array} \right.$$

Préliminaires

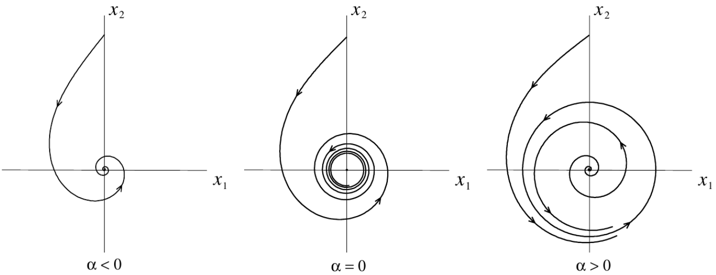

Figure tirée de Kuznetzov 1998.

Préliminaires

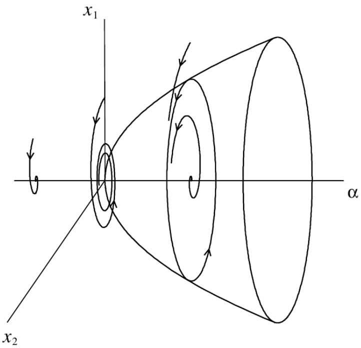

Figure tirée de Kuznetzov 1998.

Termes d'ordre supérieur

Lemme

Le système

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4)$$

est localement topologiquement équivalent au système initial.

Le cas générique

- Soit $\dot{x} = f(x, \alpha)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, f régulière, qui a pour $\alpha = 0$ l'équilibre $x = 0$ de valeurs propres $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$.
- Puisque 0 n'est pas valeur propre de la jacobienne, par le théorème des fonctions implicites le système a un équilibre $x_0(\alpha)$ dans un voisinage de l'origine pour $|\alpha|$ suffisamment petit.
- En faisant un changement de coordonnées dépendant du paramètre, on peut supposer que $x = 0$ est l'équilibre pour $|\alpha|$ suffisamment petit.

Le cas générique

- On écrit donc

$$\dot{x} = A(\alpha)x + F(x, \alpha),\ F = O(\|x\|^2)\ A(\alpha) = \begin{pmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{pmatrix} \tag{1}$$

  F, a, b, c régulières.
- Polynome caractéristique $\lambda^2 - \sigma(\alpha)\lambda + \Delta$, $\sigma = \sigma(\alpha) = Tr(A(\alpha))$, $\Delta = \Delta(\alpha) = det(A(\alpha))$.
- Pour $|\alpha|$ suffisamment petit on pose $\mu(\alpha) = \frac{\sigma(\alpha)}{2}$ et $\omega(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)}$.
- On a $\lambda_1(\alpha) = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$ et $\lambda_2(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)}$.

Le cas générique

Lemme

Le système peut s'écrire, pour $|\alpha|$ suffisamment petit, sous la forme

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha)$$

g régulière, $g = O(|z|^2)$.

Le cas générique

Schéma de preuve :

- On considère un vecteur propre $q(\alpha)$ de $A(\alpha)$ pour la valeur propre $\lambda(\alpha)$ et un vecteur propre $p(\alpha)$ de la matrice $A^T(\alpha)$ pour la valeur propre $\overline{\lambda(\alpha)}$. On les normalise de manière à ce que $\langle p(\alpha), q(\alpha)\rangle = 1$, si $\langle p, q\rangle = \overline{p}_1 q_1 + \overline{p}_2 q_2$.
- On a alors $x = zq(\alpha) + \overline{z}\,\overline{q}(\alpha)$ et $z = \langle p(\alpha), x\rangle$.

Le cas générique

- On vérifie alors que $\dot{z} = \lambda(\alpha)z + \langle p(\alpha), \, F(zq(\alpha) + \overline{z}\,\overline{q}(\alpha), \alpha)\rangle$.
- On écrit
$$g(z, \overline{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!\,l!} g_{kl}(\alpha) z^k \overline{z}^l$$
avec
$$g_{kl}(\alpha) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \, \partial \overline{z}^l} \langle p(\alpha), \, F(zq(\alpha) + \overline{z}\,\overline{q}(\alpha), \alpha)\rangle \Big|_{z=0}$$
et $k + l \geq 2, \; k, \; l = 0, \; 1, \cdots$

Le cas générique

On supprime d'abord les termes quadratiques

Lemme

L'équation

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3)$$

avec $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0^2$, $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$ *devient*

$$\dot{w} = \lambda w + O(|w|^3)$$

avec le changement de variable

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \overline{w} + \frac{h_{02}}{2} \overline{w}^2$$

pour $|\alpha|$ *suffisamment petit.*

Le cas générique

Schéma de preuve : On remarque que

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3),$$

on remplace, et on prend

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda} \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}} \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}$$

ce qui a l'effet de “tuer” les termes d'ordre 2.
Les substitutions sont rendues possibles par le fait que les dénominateurs sont non nuls pour pour $|\alpha|$ suffisamment petit.

Le cas générique

On supprime maintenant (presque) les termes d'ordre 3

Lemme

L'équation

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \overline{z} + \frac{g_{12}}{2} z \overline{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \overline{z}^3 + O(|z|^4)$$

avec $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0^2$, $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$ *devient*

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \overline{w} + O(|w|^4)$$

avec le changement de variable

$$z = w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2 \overline{w} + \frac{h_{12}}{2} w \overline{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \overline{w}^3$$

pour $|\alpha|$ *suffisamment petit.*

Le cas générique

La preuve est analogue à celle du lemme précédent.

Forme normale de Poincaré

Théorème

L'équation

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l + O(|z|^4)$$

avec $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0^2$, $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$ *devient*

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \overline{w} + O(|w|^4)$$

où $c_1 = c_1(\alpha)$ *avec le changement de variable*

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \overline{w} + \frac{h_{02}}{2} \overline{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2 \overline{w} + \frac{h_{12}}{2} w \overline{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \overline{w}^3$$

Forme normale de Poincaré

La preuve se fait en combinant les deux lemmes précédents. Le coefficient c_1 s'obtient par la formule

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \overline{\lambda})} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + g_{11}g_{20}\frac{2\lambda + \overline{\lambda}}{2|\lambda|^2}$$

Retour à la forme normale

Lemme

Considérons l'équation

$$\frac{d\,w}{d\,t} = (\mu(\alpha) + i\omega(\alpha))w + c_1(\alpha)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

avec $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$.
Si $\mu'(0) \neq 0$ *et* $\mathrm{Re}\, c_1(0) \neq 0$ *alors cette équation peut se transformer, à l'aide d'un changement de coordonnée linéaire mais dépendant du paramètre, d'un changement d'échelle de temps et d'une reparamétrisation non linéaire du temps en*

$$\frac{d\,u}{d\,\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4)$$

où θ *est le nouveau paramètre temps* β *le nouveau paramètre et* $s = \mathrm{signe} c_1(0) = \pm 1$.

Retour à la forme normale

Schéma de preuve :
Etape 1 : changement d'échelle de temps on pose $\tau = \omega(\alpha)t$ ($\omega(\alpha) > 0$) et on obtient

$$\frac{dw}{d\tau} = (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

avec

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)},\ d_1(\beta) = \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))}$$

On utilise le théorème des fonctions implicites.

Retour à la forme normale

Etape 2 : reparamétrisation non linéaire du temps On introduit $\theta(\tau, \beta)$ par $d\theta = (1 + e_1(\beta)|w|^2)\, d\tau$, $e_1(\beta) = \mathrm{Im} d_1(\beta)$ et on obtient

$$\frac{d\,w}{d\,\theta} = (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

où $l_1(\beta) = \mathrm{Re} d_1(\beta) - \beta e_1(\beta)$ est *réel* et

$$l_1(0) = \frac{\mathrm{Re} c_1(0)}{\omega(0)}$$

Retour à la forme normale

Etape 3 : changement linéaire de coordonnée On pose enfin $w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}}$.

On en déduit que le premier coefficient de Lyapunov $l_1(0)$ est donné par

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2}\mathrm{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21})$$

Forme normale pour Andronov-Hopf

Théorème

Soit le système

$$\frac{d\,x}{d\,t} = f(x, \alpha),\ x \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \mathbb{R},\ f \textit{ régulière},$$

qui a pour $|\alpha|$ *suffisamment petit l'équilibre* $x = 0$ *avec les valeurs propres* $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$. *Si les deux conditions*

1. $l_1(0) \neq 0$
2. $\mu'(0) \neq 0$,

sont satisfaites, alors il existe des changements inversibles de coordonnée, de paramètre et une reparamétrisation du temps tels que le système s'écrive

$$\frac{d}{d\,\tau}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4)$$

Forme normale pour Andronov-Hopf

Théorème

Tout système bidimensionnel générique à un paramètre

$$\dot{x} = f(x, \alpha)$$

qui a pour $\alpha = 0$ *l'équilibre* $x = 0$ *avec les valeurs propres* $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0,\ \omega_0 > 0$ *est localement topologiquement équivalent à l'une des deux formes normales*

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$