

# Introduction aux systèmes dynamiques

Olivier FAUGERAS

15 Octobre 2008

# Plan

Définitions et préliminaires

Théorème de stabilité

# Plan

Définitions et préliminaires

Théorème de stabilité

# Définition

- ▶ Formalisation mathématique d'un système déterministe
- ▶ Un vecteur d'état qui "vit" dans l'espace d'état ou espace de phase, noté  $X$
- ▶ La loi d'évolution de l'état dans le temps

# Définition

- ▶ Formalisation mathématique d'un système déterministe
- ▶ Un vecteur d'état qui "vit" dans l'espace d'état ou espace de phase, noté  $X$
- ▶ La loi d'évolution de l'état dans le temps

# Définition

- ▶ Formalisation mathématique d'un système déterministe
- ▶ Un vecteur d'état qui "vit" dans l'espace d'état ou espace de phase, noté  $X$
- ▶ La loi d'évolution de l'état dans le temps

# Opérateur d'évolution

- ▶ Le temps est discret ou continu :  $t \in T$ ,  $T = \mathbb{R}$  ou  $T = \mathbb{Z}$ .
- ▶  $\varphi^t : X \rightarrow X$  est tel que  $x_t = \varphi^t x_0$ ,  $x_0$  état initial.
- ▶  $\varphi^t$  peut ne pas être défini pour tout  $(t, x) \in T \times X$ .
- ▶ Si  $\varphi^t$  est défini pour  $t \geq 0$  et  $t < 0$ , l'opérateur est dit inversible.
- ▶  $\varphi^t x_0$  peut n'être défini que localement en temps, e.g.  $0 \leq t < t_0$  ("explosion").
- ▶ Deux hypothèses :

# Opérateur d'évolution

- ▶ Le temps est discret ou continu :  $t \in T$ ,  $T = \mathbb{R}$  ou  $T = \mathbb{Z}$ .
- ▶  $\varphi^t : X \rightarrow X$  est tel que  $x_t = \varphi^t x_0$ ,  $x_0$  état initial.
- ▶  $\varphi^t$  peut ne pas être défini pour tout  $(t, x) \in T \times X$ .
- ▶ Si  $\varphi^t$  est défini pour  $t \geq 0$  et  $t < 0$ , l'opérateur est dit inversible.
- ▶  $\varphi^t x_0$  peut n'être défini que localement en temps, e.g.  $0 \leq t < t_0$  ("explosion").
- ▶ Deux hypothèses :

# Opérateur d'évolution

- ▶ Le temps est discret ou continu :  $t \in T$ ,  $T = \mathbb{R}$  ou  $T = \mathbb{Z}$ .
- ▶  $\varphi^t : X \rightarrow X$  est tel que  $x_t = \varphi^t x_0$ ,  $x_0$  état initial.
- ▶  $\varphi^t$  peut ne pas être défini pour tout  $(t, x) \in T \times X$ .
- ▶ Si  $\varphi^t$  est défini pour  $t \geq 0$  et  $t < 0$ , l'opérateur est dit inversible.
- ▶  $\varphi^t x_0$  peut n'être défini que localement en temps, e.g.  $0 \leq t < t_0$  ("explosion").
- ▶ Deux hypothèses :

# Opérateur d'évolution

- ▶ Le temps est discret ou continu :  $t \in T$ ,  $T = \mathbb{R}$  ou  $T = \mathbb{Z}$ .
- ▶  $\varphi^t : X \rightarrow X$  est tel que  $x_t = \varphi^t x_0$ ,  $x_0$  état initial.
- ▶  $\varphi^t$  peut ne pas être défini pour tout  $(t, x) \in T \times X$ .
- ▶ Si  $\varphi^t$  est défini pour  $t \geq 0$  et  $t < 0$ , l'opérateur est dit inversible.
- ▶  $\varphi^t x_0$  peut n'être défini que localement en temps, e.g.  $0 \leq t < t_0$  ("explosion").
- ▶ Deux hypothèses :

# Opérateur d'évolution

- ▶ Le temps est discret ou continu :  $t \in T$ ,  $T = \mathbb{R}$  ou  $T = \mathbb{Z}$ .
- ▶  $\varphi^t : X \rightarrow X$  est tel que  $x_t = \varphi^t x_0$ ,  $x_0$  état initial.
- ▶  $\varphi^t$  peut ne pas être défini pour tout  $(t, x) \in T \times X$ .
- ▶ Si  $\varphi^t$  est défini pour  $t \geq 0$  et  $t < 0$ , l'opérateur est dit inversible.
- ▶  $\varphi^t x_0$  peut n'être défini que localement en temps, e.g.  $0 \leq t < t_0$  ("explosion").
- ▶ Deux hypothèses :

$$\varphi^0 = Id$$

# Opérateur d'évolution

- ▶ Le temps est discret ou continu :  $t \in T$ ,  $T = \mathbb{R}$  ou  $T = \mathbb{Z}$ .
- ▶  $\varphi^t : X \rightarrow X$  est tel que  $x_t = \varphi^t x_0$ ,  $x_0$  état initial.
- ▶  $\varphi^t$  peut ne pas être défini pour tout  $(t, x) \in T \times X$ .
- ▶ Si  $\varphi^t$  est défini pour  $t \geq 0$  et  $t < 0$ , l'opérateur est dit inversible.
- ▶  $\varphi^t x_0$  peut n'être défini que localement en temps, e.g.  $0 \leq t < t_0$  ("explosion").
- ▶ Deux hypothèses :
  1.  $\varphi^0 = Id$ .
  2.  $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$

# Opérateur d'évolution

- ▶ Le temps est discret ou continu :  $t \in T$ ,  $T = \mathbb{R}$  ou  $T = \mathbb{Z}$ .
- ▶  $\varphi^t : X \rightarrow X$  est tel que  $x_t = \varphi^t x_0$ ,  $x_0$  état initial.
- ▶  $\varphi^t$  peut ne pas être défini pour tout  $(t, x) \in T \times X$ .
- ▶ Si  $\varphi^t$  est défini pour  $t \geq 0$  et  $t < 0$ , l'opérateur est dit inversible.
- ▶  $\varphi^t x_0$  peut n'être défini que localement en temps, e.g.  $0 \leq t < t_0$  ("explosion").
- ▶ Deux hypothèses :
  1.  $\varphi^0 = Id$ .
  2.  $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$

# Opérateur d'évolution

- ▶ Le temps est discret ou continu :  $t \in T$ ,  $T = \mathbb{R}$  ou  $T = \mathbb{Z}$ .
- ▶  $\varphi^t : X \rightarrow X$  est tel que  $x_t = \varphi^t x_0$ ,  $x_0$  état initial.
- ▶  $\varphi^t$  peut ne pas être défini pour tout  $(t, x) \in T \times X$ .
- ▶ Si  $\varphi^t$  est défini pour  $t \geq 0$  et  $t < 0$ , l'opérateur est dit inversible.
- ▶  $\varphi^t x_0$  peut n'être défini que localement en temps, e.g.  $0 \leq t < t_0$  ("explosion").
- ▶ Deux hypothèses :
  1.  $\varphi^0 = Id$ .
  2.  $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$

## Définition d'un système dynamique

### Definition

Un triplet  $\{T, X, \varphi^t\}$  où  $T = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ ,  $X$  est un espace d'état, et  $\varphi^t$  est une famille d'opérateurs d'évolution paramétrée par  $t$  et satisfaisant les deux conditions précédentes.

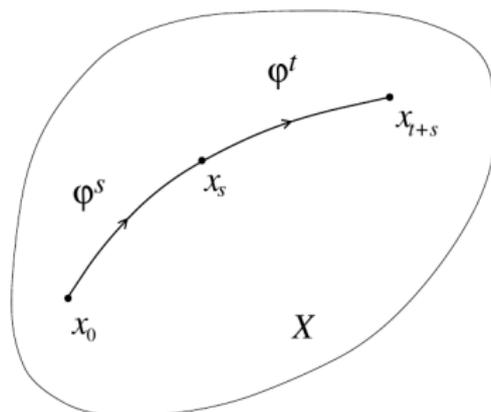


Figure from Kuznetsov 1995,1998.

# Orbites et portraits de phase

## Definition (Orbite)

Une orbite partant de  $x_0$  est

$$x \in X : x = \varphi^t x_0, \forall t \in T, \varphi^t x_0 \text{ est défini}$$

## Definition (Equilibre)

$x^0$  est un équilibre (point fixe) si  $\varphi^t x_0 = x_0$  pour tout  $t$

## Definition (Cycle)

Un cycle est une orbite périodique  $L_0$  telle que pour tout  $x_0 \in L_0$ ,  $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$  pour un  $T_0 > 0$ , pour tout  $t \in T$ .

## Definition (Portrait de phase)

Le portrait de phase d'un système dynamique est une partition de l'espace d'état en orbites.

# Orbites et portraits de phase

## Definition (Orbite)

Une orbite partant de  $x_0$  est

$$x \in X : x = \varphi^t x_0, \forall t \in T, \varphi^t x_0 \text{ est défini}$$

## Definition (Equilibre)

$x^0$  est un équilibre (point fixe) si  $\varphi^t x_0 = x_0$  pour tout  $t$

## Definition (Cycle)

Un cycle est une orbite périodique  $L_0$  telle que pour tout  $x_0 \in L_0$ ,  $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$  pour un  $T_0 > 0$ , pour tout  $t \in T$ .

## Definition (Portrait de phase)

Le portrait de phase d'un système dynamique est une partition de l'espace d'état en orbites.

# Orbites et portraits de phase

## Definition (Orbite)

Une orbite partant de  $x_0$  est

$$x \in X : x = \varphi^t x_0, \forall t \in T, \varphi^t x_0 \text{ est défini}$$

## Definition (Equilibre)

$x^0$  est un équilibre (point fixe) si  $\varphi^t x_0 = x_0$  pour tout  $t$

## Definition (Cycle)

Un cycle est une orbite périodique  $L_0$  telle que pour tout  $x_0 \in L_0$ ,  $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$  pour un  $T_0 > 0$ , pour tout  $t \in T$ .

## Definition (Portrait de phase)

Le portrait de phase d'un système dynamique est une partition de l'espace d'état en orbites.



# Orbites et portraits de phase

## Definition (Orbite)

Une orbite partant de  $x_0$  est

$$x \in X : x = \varphi^t x_0, \forall t \in T, \varphi^t x_0 \text{ est défini}$$

## Definition (Equilibre)

$x^0$  est un équilibre (point fixe) si  $\varphi^t x_0 = x_0$  pour tout  $t$

## Definition (Cycle)

Un cycle est une orbite périodique  $L_0$  telle que pour tout  $x_0 \in L_0$ ,  $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$  pour un  $T_0 > 0$ , pour tout  $t \in T$ .

## Definition (Portrait de phase)

Le portrait de phase d'un système dynamique est une partition de l'espace d'état en orbites.



## Orbites

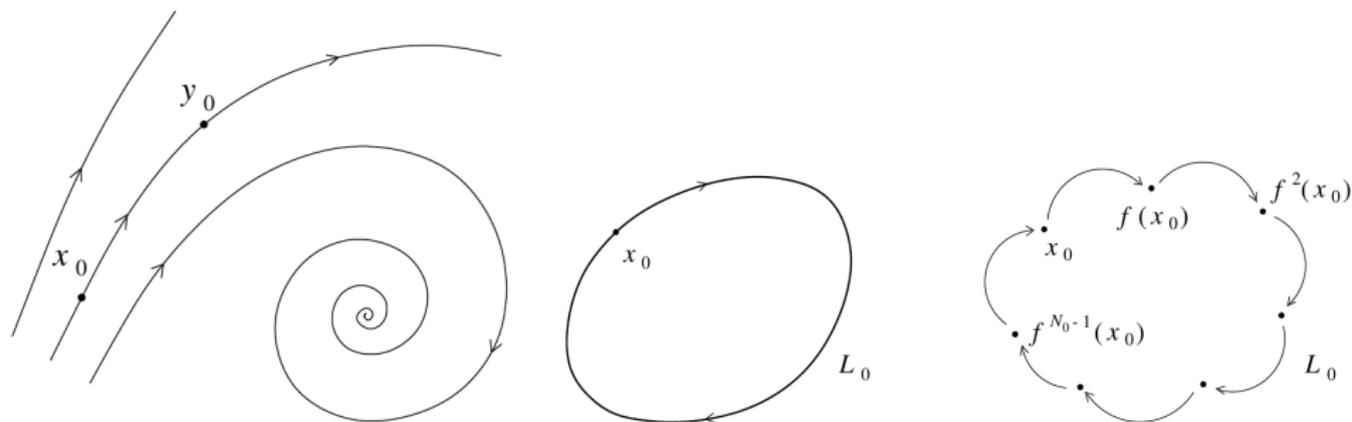
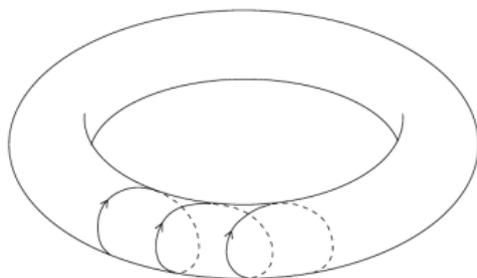


Figure from Kuznetsov 1995,1998.

# Ensembles invariants

## Definition (Ensemble invariant)

Un ensemble invariant d'un système dynamique  $\{T, X, \varphi^t\}$  est un sous-ensemble  $S \subset X$  tel que si  $x_0 \in S$  alors  $\varphi^t x_0 \in S$  pour tout  $t \in T$

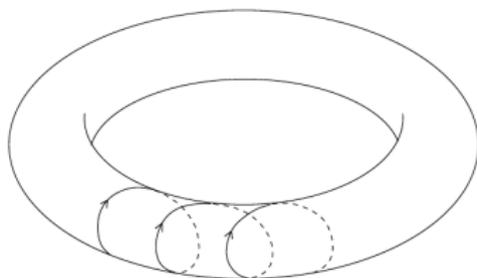


Remarque : Tout orbite est un ensemble invariant.

# Ensembles invariants

## Definition (Ensemble invariant)

Un ensemble invariant d'un système dynamique  $\{T, X, \varphi^t\}$  est un sous-ensemble  $S \subset X$  tel que si  $x_0 \in S$  alors  $\varphi^t x_0 \in S$  pour tout  $t \in T$



**Remarque :** Tout orbite est un ensemble invariant.

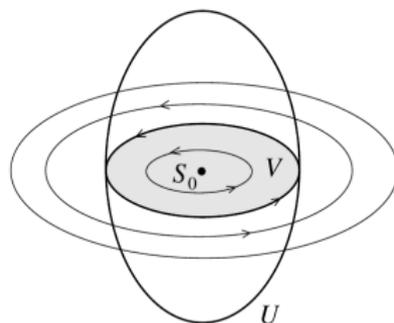
# Stabilité des ensembles invariants: Lyapunov

$X$  est un espace métrique complet.

**Definition (Ensemble invariant stable au sens de Lyapunov)**

Un ensemble invariant  $S_0$  est dit stable si

pour tout voisinage  $U$  de  $S_0$  suffisamment petit il existe un voisinage  $V$  de  $S_0$  tel que  $\varphi^t x \in U$  pour tout  $x \in V$  et  $t > 0$  (Stabilité de Lyapunov).

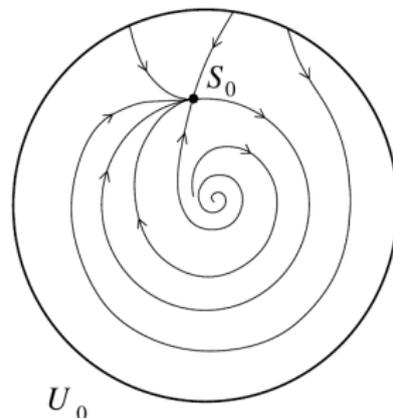


# Stabilité des ensembles invariants: asymptotique

## Definition (Ensemble invariant asymptotiquement stable)

Un ensemble invariant  $S_0$  est dit asymptotiquement stable si

Il existe un voisinage  $U_0$  de  $S_0$  tel que  $\varphi^t x \rightarrow S_0$  pour tout  $x \in U_0$  quand  $t \rightarrow +\infty$  (Stabilité asymptotique).



# Système dynamique discret : point fixe

## Théorème

*Soit  $x \rightarrow f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1$ , un système dynamique discret. Si  $x_0$  est un point fixe ( $x_0 = f(x_0)$ ), il est stable si toutes les valeurs propres de  $Df(x_0)$  sont de module  $< 1$ .*

La preuve est une application du théorème du point fixe.

# Système dynamique discret : existence d'un point fixe stable

## Théorème

*Soit  $X$  un espace métrique complet,  $d$  sa fonction distance. Si  $f : X \rightarrow X$  est contractante, i.e.*

*$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ ,  $0 < \lambda < 1$ , alors le système dynamique discret  $\{\mathbb{Z}_+, X, f^k\}$  a un point fixe stable  $x^0 \in X$  et pour tout  $x \in X$  on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(x) = x_0$ .*

La preuve est une application du théorème du point fixe.

# Système dynamique continu : stabilité

## Théorème

*Soit  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1$ , un système dynamique continu. Si  $x_0$  est un point fixe ( $f(x_0) = 0$ ), alors si les valeurs propres de  $Df(x_0)$  sont de partie réelle négative,  $x_0$  est stable.*

## Schéma de preuve

- ▶ Au voisinage de l'équilibre

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad F(x) = O(\|x\|^2) \text{ lisse}$$

- ▶ D'où

$$\varphi^t x = e^{At} x + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(\varphi^\tau x) d\tau$$

- ▶ Donc le déplacement par unité de temps le long des orbites s'écrit

$$\varphi^1 x = Bx + O(\|x\|^2), \quad B = e^A$$

- ▶ Le résultat s'obtient en remarquant que  $\mu_k = e^{\lambda_k}$  et en appliquant le théorème du point fixe.

## Schéma de preuve

- ▶ Au voisinage de l'équilibre

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad F(x) = O(\|x\|^2) \text{ lisse}$$

- ▶ D'où

$$\varphi^t x = e^{At} x + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(\varphi^\tau x) d\tau$$

- ▶ Donc le déplacement par unité de temps le long des orbites s'écrit

$$\varphi^1 x = Bx + O(\|x\|^2), \quad B = e^A$$

- ▶ Le résultat s'obtient en remarquant que  $\mu_k = e^{\lambda_k}$  et en appliquant le théorème du point fixe.

## Schéma de preuve

- ▶ Au voisinage de l'équilibre

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad F(x) = O(\|x\|^2) \text{ lisse}$$

- ▶ D'où

$$\varphi^t x = e^{At} x + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(\varphi^\tau x) d\tau$$

- ▶ Donc le déplacement par unité de temps le long des orbites s'écrit

$$\varphi^1 x = Bx + O(\|x\|^2), \quad B = e^A$$

- ▶ Le résultat s'obtient en remarquant que  $\mu_k = e^{\lambda_k}$  et en appliquant le théorème du point fixe.



## Schéma de preuve

- ▶ Au voisinage de l'équilibre

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad F(x) = O(\|x\|^2) \text{ lisse}$$

- ▶ D'où

$$\varphi^t x = e^{At} x + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(\varphi^\tau x) d\tau$$

- ▶ Donc le déplacement par unité de temps le long des orbites s'écrit

$$\varphi^1 x = Bx + O(\|x\|^2), \quad B = e^A$$

- ▶ Le résultat s'obtient en remarquant que  $\mu_k = e^{\lambda_k}$  et en appliquant le théorème du point fixe.

