Correction

Exercice 1 : 1. $F_\lambda(x) = x \Rightarrow x = 0$ et si $\lambda > 1$, $x = \pm\sqrt{\lambda - 1}$.

- Stabilité : pour $x = 0$, multiplicateur $= F_\lambda'(0) = \lambda$.

  $|\lambda| < 1 \Rightarrow$ 0 est stable.

  $|\lambda| > 1 \Rightarrow$ 0 est instable.

  $\Rightarrow$ bifurc. possibles en $\lambda = -1$ ou 1

- pour $x = \pm\sqrt{\lambda - 1}$: $F_\lambda'(x) = \lambda - 3(\lambda - 1) = 3 - 2\lambda$ $(\lambda > 1)$

  pour $\lambda \in [1, 2]$: stable bifurcs possibles en 1 et 2.

  pour $\lambda > 2$: instable

Bifurcations possibles : $\{(\lambda = -1, x = 0), (\lambda = 1, x = 0), (\lambda = 2, x = \pm\sqrt{\lambda - 1})\}$.

2. Bifurcation $\lambda = -1$: multiplicateur $F_\lambda'(x) = -1 \Rightarrow$ bifurcation clapet possible.

$\frac{1}{2} f_{xx} + \frac{1}{3} f_{xxx} = -2 \neq 0$

$f_{x\alpha} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ clapet.

Bifurcation $\lambda = 2$: multiplicateur $F_\lambda'(x) = -1 \Rightarrow$ clapet possible $x = \pm 1$

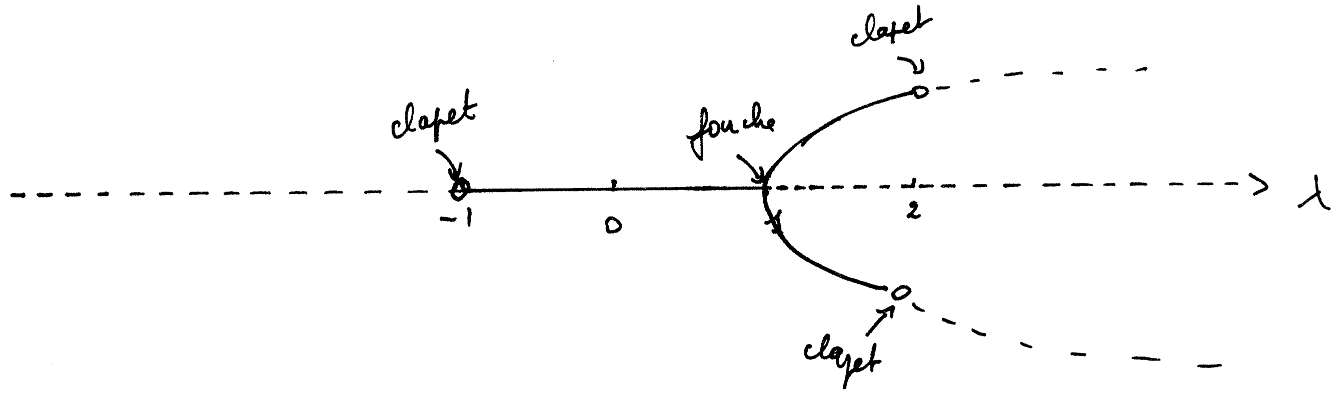
$$\frac{1}{2} f_{xx} + \frac{1}{3} f_{xxx} = \frac{1}{2}(-6x) + \frac{1}{3}(-6) = \begin{cases} x = 1 & -3 - 2 = -5 \\ x = -1 & 3 - 2 = 1 \end{cases} \neq 0.$$

$f_{x\lambda} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ clapet.

3. En $\lambda = 1$, apparition de 2 nouveaux équilibres et chgt de stabilité de 0.

4)



Exercice 2 :

1. $\tau_m \partial_t p = \frac{1}{2} \partial_y^2 (\sigma^2 p) - \partial_y (f(y) p)$

→ stationnaire : $\boxed{p''(y) - \frac{d}{dy}\left(\frac{2 f(y)}{\sigma^2}\, p(y) \right) = 0.}$

2. Résolution :

$$\frac{d}{dy}\left(p'(y) - \frac{2 f(y)}{\sigma^2}\, p(y) \right) = 0 \iff$$

$$\boxed{p'(y) - \frac{2f(y)}{\sigma^2}\, p(y) = \text{cste.}} \quad , \quad p(y) = C(y)\, e^{\frac{2}{\sigma^2} F(y)}$$

où F est une primitive de f.

Résolution : * sur $[V_r, \theta]$, $p'(y) - \frac{2f(y)}{\sigma^2} p(y) =$ valeur en θ $= p'(\theta) = -\frac{2\nu_0 \tau_m}{\sigma^2}$

solution homogène : $C e^{\frac{2}{\sigma^2} F(y)}$

sol. particulière : variation de la constante :

$$C'(y)\, e^{2/\sigma^2 F(y)} = -\frac{2\nu_0 \tau_m}{\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{C(y) = -\int_0^y \frac{2\nu_0\tau_m}{\sigma^2} e^{-2/\sigma^2 F(x)}\, dx + \alpha_0}$$

$$\Rightarrow P_1(y) = \left(\alpha_1 - \frac{2\nu_0\tau_m}{\sigma^2} \int_0^y e^{-2/\sigma^2 F(x)}\, dx \right) e^{2/\sigma^2 F(y)}$$

$$P_1(\theta) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2\nu_0\tau_m}{\sigma^2} \int_0^\theta e^{-2/\sigma^2 F(x)}\, dx.$$

d'où $$\boxed{P_1(y) = \left(\frac{2\nu_0\tau_m}{\sigma^2} \int_y^\theta e^{-2/\sigma^2 F(x)}\, dx \right) e^{2/\sigma^2 F(y)}}$$

* sur $(-\infty, V_r]$: $p'(y) - \frac{2f(y)}{\sigma^2} p(y) = p'(V_r^-) - \frac{2f(V_r)}{\sigma^2} p(V_r^-)$

$$= p'(V_r^+) + \frac{2\nu_0\tau_m}{\sigma^2} - \frac{2f(V_r)}{\sigma^2} p(V_r^+) = -\frac{2\nu_0\tau_m}{\sigma^2} + \frac{2\nu_0\tau_m}{\sigma^2} = 0.$$

$$\Rightarrow P_0(y) = \alpha_0\, e^{2/\sigma^2 F(y)}$$

condition $P_1(V_r^-) = P_0(V_r^+) \Rightarrow$ $\boxed{\alpha_0 = \frac{2\nu_0\tau_m}{\sigma^2} \int_{V_r}^\theta e^{-2/\sigma^2 F(x)}\, dx.}$

$$\Rightarrow \boxed{P_0(y) = \frac{2\nu_0\tau_m}{\sigma^2} \int_{V_r}^\theta e^{-2/\sigma^2 F(x)}\, dx \quad e^{2/\sigma^2 F(y)}}$$

Taux de décharge stationnaire :

$$\int_{-\infty}^{\theta} P(y)\,dy = 1 = \frac{2\nu_0\tau_m}{\sigma^2}\int_{V_r}^{\theta} e^{-2/\sigma^2 F(x)}dx \int_{-\infty}^{V_r} e^{2/\sigma^2 f(x)}dx$$

$$+ \frac{2\nu_0\tau_m}{\sigma^2}\int_{V_r}^{\theta}dy\int_{y}^{\theta} e^{-2/\sigma^2 F(x)}\, e^{2/\sigma^2 f(y)}\,dx.$$

$$= \frac{2\nu_0\tau_m}{\sigma^2}\int_{V_r}^{\theta}dx\int_{-\infty}^{V_r} e^{-2/\sigma^2\left(F(x)-F(y)\right)}dy.$$

$$+ \frac{2\nu_0\tau_m}{\sigma^2}\int_{V_r}^{\theta}dy\int_{y}^{\theta} e^{-2/\sigma^2\left(f(x)-f(y)\right)}dy.$$

$$\Rightarrow \boxed{\nu_0 = \frac{\sigma^2}{2\tau_m}\left(\int_{V_r}^{\theta}dx\int_{-\infty}^{V_r} e^{-2/\sigma^2\, f(x)-f(y)}dx + \int_{V_r}^{\theta}dy\int_{y}^{\theta} e^{-2/\sigma^2\left(F(x)-F(y)\right)}dx\right)^{-1}}$$

3. $f(x) = \mu - x$. $\quad F(x) = -\dfrac{(\mu-x)^2}{2}$.

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{2\nu_0\tau_m}{\sigma^2}\displaystyle\int_{V_r}^{\theta} e^{\frac{2(\mu-x)^2}{\sigma^2}}dx\; e^{-2(\mu-y)^2/\sigma^2} & y\in(-\infty, V_r) \\ \dfrac{2\nu_0\tau_m}{\sigma^2}\displaystyle\int_{y}^{\theta} e^{\frac{2(\mu-x)^2}{\sigma^2}}dx\; e^{-2(\mu-y)^2/\sigma^2} & y\in[V_r, \theta]. \\ 0 & y > \theta. \end{cases}$$

Exercice 3 :
$$\begin{cases} dV_t = \left(-\lambda V_t + Ie(t)\right) dt + g\,(V_t - E)\, dW_t \\ V_0 = V_{reset}. \end{cases}$$

$$\phi(t) = \exp\left(-\lambda t + \int_0^t g\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t g^2\, ds\right)$$
$$= \exp\left(-\left(\lambda + \frac{g^2}{2}\right)t + g\, W_t\right).$$

$$\boxed{V_t = \phi(t)\left[V_{reset} + \int_0^t \phi(s)^{-1}\left(Ie(s) + g^2 E\right) ds - \int_0^t \phi(s)^{-1}\, g\, E\, dW_s\right]}$$

Problème :

1. (a) c_m : capacité de la membrane, g_m = sa conductance, V_r = pot. de repos.

(b) $V_j(t) = V_{reset} + \left(\frac{I_{app}}{g_m} + V_r - V_{reset}\right)\left(1 - e^{-t g_m/c_m}\right)$.

(c) $V_j \nearrow$, $V_j(0) = V_{reset} < V_{th}$, V_j atteint le seuil ssi :

$$\frac{I_{app}}{g_m} + V_r > V_{th} \iff \boxed{I_{app} > (V_{th} - V_r)\, g_m .}$$

sinon, pas de spike.

temps du 1er spike : T tq $V_j(T) = V_{th}$ ie :

$$1 - e^{-T g_m/c_m} = (V_{th} - V_{reset}) \Big/ \left(\frac{I_{app}}{g_m} + V_r - V_{reset}\right).$$

$$e^{-T g_m/c_m} = \frac{V_{th} - V_r - I_{app}/g_m}{V_{reset} - V_r - I_{app}/g_m}.$$

$$\boxed{T = \frac{c_m}{g_m} \log\left(\frac{V_{reset} - V_r - I_{app}/g_m}{V_{th} - V_r - I_{app}/g_m}\right)}$$

(d) oui. $T = \frac{c_m}{g_m} \log\left(1 + \frac{V_{reset} - V_{th}}{V_{th} - V_r - I_{app}/g_m}\right)$.

(e) $I_{app} \nearrow \Rightarrow \underset{(V_{reset} - V_{th} < 0)}{T \searrow} \Rightarrow f \nearrow$ ce qui est cohérent avec les expériences bien sûr !

2. Couplage :

(a) $I_{chain}(t) = \sum_{k=-\infty}^{n} I_{Syn}(t - kT) = -q_s \alpha^2 \sum_{-\infty}^{n} (t - kT)\, e^{-\alpha(t-kT)} = q_s \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\sum_{-\infty}^{n} e^{-\alpha(t-kT)}\right)$

$$= q_s \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(e^{-\alpha t} \sum_{-n}^{\infty} e^{-\alpha k T}\right) = q_s \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(e^{-\alpha t} \frac{e^{n\alpha T}}{1 - e^{-\alpha T}}\right).$$

$$\boxed{I_{chain}(t) = q_s \alpha^2 \frac{e^{-\alpha(t - nT)}}{(1 - e^{-\alpha T})^2} \left\{ (t - nT)(1 - e^{-\alpha T}) + T e^{-\alpha T} \right\}.}$$

(b)

$$\boxed{\begin{aligned} c_m \frac{dV_j}{dt} &= -g_m (V_j - V_r) + I_{app} + \sum_{t_{n,i} \le t} -q_s S_{ji}(t - t_{n,i}) \\ &\quad + g_c \left(V_j - V_i + \beta \sum_{t_{n,i} \le t} \delta(t - t_{n,i})\right), \quad j \in 1, 2,\ i \ne j \end{aligned}}$$

chgt de variables :

$$v_j(\tau) = \frac{V_j\left(\tau \frac{c_m}{g_m}\right) - V_{reset}}{V_{th} - V_{reset}} . \qquad \Delta V = V_{th} - V_{reset} .$$

$$\Rightarrow \frac{dv_j}{d\tau} = \frac{c_m}{g_m \Delta V}\frac{dV_j}{dt} = -\frac{V_j - V_r}{\Delta V} + \frac{I_{app}}{g_m \Delta V} + \sum \frac{-q_s}{g_m \Delta V}\, \alpha^2\left(\tau \frac{c_m}{g_m} - t_{n,i}\right) e^{-\alpha^2\left(\tau \frac{c_m}{g_m} - t_{n,i}\right)}$$

$$+ \frac{g_c}{g_m}\left(\frac{V_j - V_i}{\Delta V} + \frac{\beta}{\Delta V}\sum \delta\left(\tau \frac{c_m}{g_m} - t_{n,i}\right)\right)$$

on pose $\tau_{n,i} = t_{n,i}\frac{g_m}{c_m}$, $\bar{\alpha} = \alpha \frac{c_m}{g_m}$, on a :

$$\boxed{\frac{dv_j}{d\tau_m} = -v_j + \left(\frac{I_{app}}{g_m \Delta V} - \frac{V_{reset} - V_r}{\Delta V}\right) - \sum \frac{q_s}{c_m \Delta V}\, s(\tau - \tau_{n,i}) + \frac{g_c}{g_m}\left(v_j - v_i + \frac{\beta}{\Delta V}\sum \delta(\tau - \tau_{n,i})\right) .}$$

$$\boxed{I = \frac{I_{app}}{g_m \Delta V} + \frac{V_r - V_{reset}}{\Delta V}, \quad g_s = \frac{q_s}{c_m \Delta V}, \quad \bar{g}_c = \frac{g_c}{g_m}, \quad \bar{\beta} = \beta / \Delta V, \quad \bar{\alpha} = \alpha \frac{c_m}{g_m}}$$

3. Modèle de Phase :

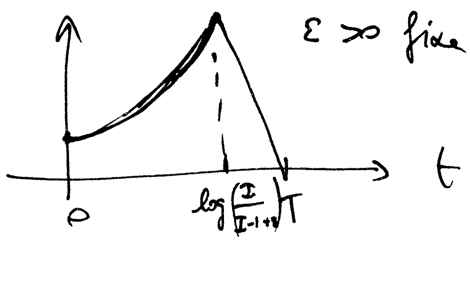
(a) en t^*, $V(t^*) = I(1 - e^{-t^*}) + \varepsilon$. ,

comme l'équation est linéaire, il suffit de rajouter $\varepsilon e^{-(t-t^*)}$ à la solution de base (sans perturbation)

pour $t \geq t^*$, $\boxed{v(t) = I(1 - e^{-t}) + \varepsilon e^{-(t-t^*)}}$.

* si $\varepsilon + I(1 - e^{-t^*}) > 1$, alors $\tilde{T} = t^*$. (ie : $t^* > \log \frac{I}{I-1+\varepsilon}$)
* sinon, $\tilde{T}(t^*) = \log\left(\frac{\varepsilon e^{t^*} - I}{1 - I}\right)$. , $T = \log\left(\frac{I}{1-I}\right)$

$$\Rightarrow \Delta\Phi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \log\left(\frac{I}{I - \varepsilon e^t}\right) / \log\left(\frac{I}{I-1}\right) . & t \leq \log\left(\frac{I}{I-1+\varepsilon}\right) \\ \frac{T-t}{T} & t \geq \log\left(\frac{I}{I-1+\varepsilon}\right) \end{cases}$$



$\varepsilon > 0$ fixé

Dérivée en $z = 0$: $\frac{a}{IT}$.

(b)(i) $G_c(\phi) = \frac{g_c}{T}\int_0^T Z(t)\Big(v_{Lc}(t-\phi T) + \beta\,\delta(t-\phi T) - v_{Lc}(t+\phi T) - \beta\,\delta(t+\phi T)\Big)dt$

$= \frac{g_c}{T}\beta\Big(Z(\phi T) - Z((1-\phi)T)\Big) + \frac{g_c}{T^2}\int_0^T e^t\Big(1 - e^{-[t-\phi T]} - 1 + e^{-[t+\phi T]}\Big)dt$

$= \frac{g_c\beta}{IT^2}\Big(e^{\phi T} - e^{(1-\phi)T}\Big) + \frac{g_c}{T^2}\int_0^{\phi T} -e^t e^{-t-(1-\phi)T}dt + \frac{g_c}{T^2}\int_{\phi T}^T -e^t e^{-t+\phi T}dt$

$+ \frac{g_c}{T^2}\int_0^{(1-\phi)T} e^t e^{-t-\phi T}dt + \frac{g_c}{T^2}\int_{(1-\phi)T}^T e^t e^{-t+(1-\phi)T}dt$.

$= \frac{g_c\beta}{IT^2}\Big(e^{\phi T} - e^{(1-\phi)T}\Big) + \frac{g_c}{T^2}\Big(-\phi T e^{-(1-\phi)T} - (1-\phi)Te^{\phi T}$

$+ (1-\phi)Te^{-\phi T} + \phi T e^{(1-\phi)T}\Big)$.

$$\boxed{G_c(\phi) = \frac{g_c\beta}{IT^2}\Big(e^{\phi T} - e^{(1-\phi)T}\Big) + \frac{2g_c}{T}\Big(\phi\,\mathrm{sh}((1-\phi)T) - (1-\phi)\,\mathrm{sh}(\phi T)\Big)}$$

$0 < \phi < 1$.

$G_c(0) = G_c(1) = 0$ par T-périodicité de la fonction d'interaction.

(ii). 0, 1 : on vient de le voir. 1/2 par T-périodicité aussi (on peut aussi faire le calcul).

(iii) ~~$\beta = 0$~~ $\boxed{G_c'(\phi) = \frac{g_c\beta}{IT}\Big(e^{\phi T} + e^{(1-\phi)T}\Big) + \frac{2g_c}{T}\Big(\mathrm{sh}((1-\phi)T) - \phi T\,\mathrm{ch}((1-\phi)T) + \mathrm{sh}(\phi T) - (1-\phi)T\,\mathrm{ch}(\phi T)\Big)}$.

Cas $\beta = 0$: $G_c'(1/2) = \frac{2g_c}{T}\Big(\mathrm{sh}(T/2) - \frac{T}{2}\mathrm{ch}(T/2) + \mathrm{sh}(T/2) - T/2\,\mathrm{ch}(T/2)\Big)$.

$= \frac{4g_c}{T}\Big(\mathrm{sh}(T/2) - \frac{T}{2}\mathrm{ch}(T/2)\Big)$.

on mq $\forall x$, $\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x) \leq 0$. En effet, en 0 vaut 0,

$f'(x) = \cancel{\mathrm{ch}(x)} - \cancel{\mathrm{ch}(x)} - x\,\mathrm{sh}(x) \leq 0\ \forall x \geq 0$, $< 0\ \forall x > 0$.

$f'' = 0$, $f^{(3)}(0) < 0 \Rightarrow \boxed{f < 0\ \forall x > 0.} \Rightarrow \boxed{\text{stable } \forall T > 0}$

$$G_c'(1/2) = \frac{2 g_c}{I T} e^{T/2} \beta + \frac{4 g_c}{T}\left(sh(T/2) - T/2\, ch(T/2)\right).$$

on a vu que $sh(T/2) - T/2\, ch(T/2) < 0 \quad \forall T > 0$.

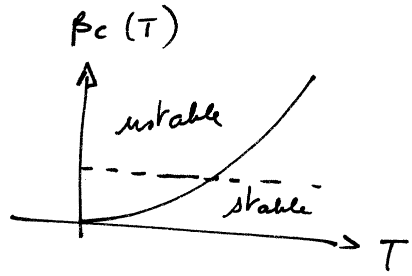
donc il existe un unique point β_c pour lequel $G_c'(1/2)$ s'annule et change de signe :

$$\beta_c(T) = -\frac{\cancel{2}4 g_c}{\cancel{T}}\left(sh(T/2) - T/2\, ch(T/2)\right)\frac{I \cancel{T}}{\cancel{2} g_c} e^{-T/2}$$

$$= 2 I e^{-T/2}\left(T/2\, ch(T/2) - sh(T/2)\right) \quad . \text{ et } I = \frac{1}{1-e^{-T}}$$

$$= \frac{2}{e^{T/2} - e^{-T/2}}\left(T/2\, ch(T/2) - sh(T/2)\right)$$

$$\boxed{\beta_c(T) = \frac{T}{2}\frac{ch(T/2)}{sh(T/2)} - 1 .}$$



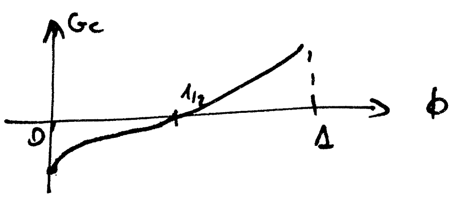
Pour $\beta < \beta_c(T)$, l'équilibre est stable

Pour $\beta > \beta_c(T)$, ———— instable.

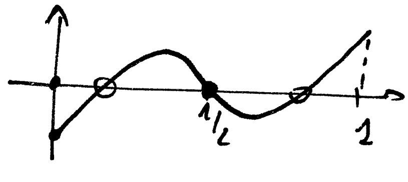
- à β fixé, il existe donc $T_c(\beta) = \beta_c^{-1}(T)$ tel que $\forall T < T_c$, l'équilibre est instable et $\forall T > T_c$, l'éq. est stable.
- $G_c(0^+) = \frac{g_c \beta}{I T^2}\left(1 - e^{T}\right) < 0$. $\Rightarrow G_c(1^-) > 0$ car G_c impaire et 1-périodique
- on a $G_c(0^+) < 0$, $G_c(1/2) = 0$ et $G_c'(1/2) < 0$ donc nécessairement G_c croise 0 entre $(0, 1/2)$ avec une pente positive $\Rightarrow \exists$ un point fixe instable entre 0 et $1/2$.

De même entre $1/2$ et 1, $G_c(1/2) = 0$ avec pente < 0 donc va être < 0 dans un voisinage à droite de $1/2$ et $G_c(1^-) > 0 \Rightarrow$ on va croiser 0 avec une pente $> 0 \Rightarrow$ il existe un point fixe instable entre $1/2$ et 1.

$T < T_c$: $1/2$ est instable



$T > T_c$, $1/2$ est stable



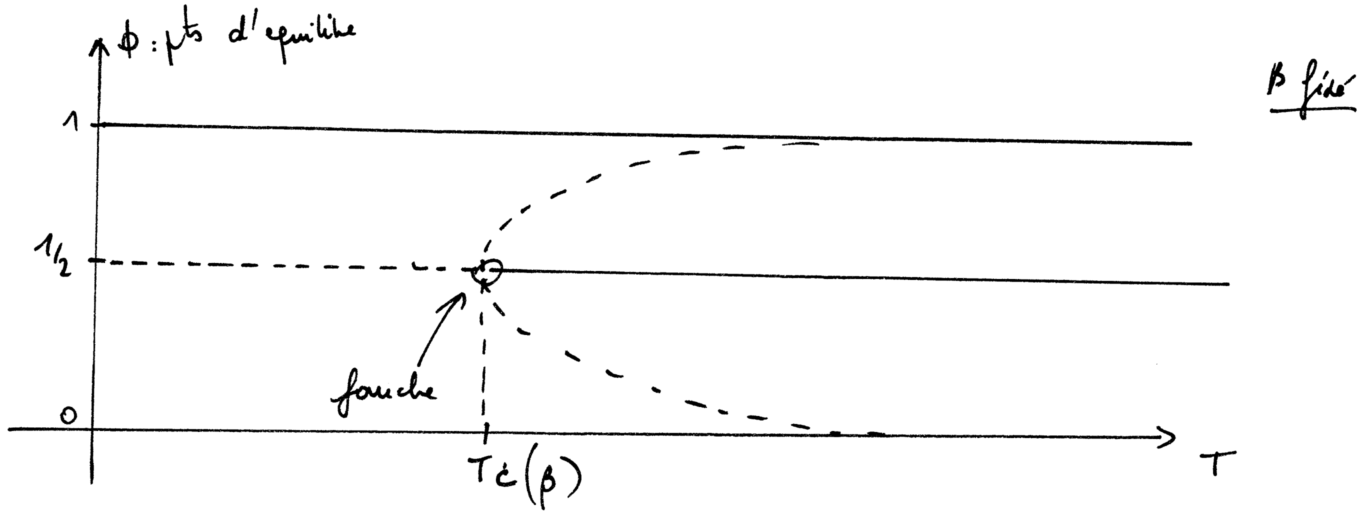
(iv) $\dfrac{\partial G_c}{\partial \phi} = 0$: par déf de β_c

$\dfrac{\partial^2 G_c}{\partial \phi^2} = 0$ par symétrie autour de $1/2$

$$\frac{\partial^3 G_c}{\partial \phi^3} = g_c \beta T \left(1 - e^{-T}\right)\left(e^{\phi T} + e^{(1-\phi)T}\right) + 2 g_c \Big(3T\,\mathrm{sh}\left((1-\phi)T\right) + 3T\,\mathrm{sh}(\phi T) - (1-\phi)T^2\,\mathrm{ch}(\phi T) - \phi T^2\,\mathrm{ch}\left((1-\phi)T\right)\Big).$$

en $\phi = 1/2$, $$= 2 g_c \beta T\left(1 - e^{-T}\right) e^{T/2} + 2g_c\left(6T\,\mathrm{sh}(T/2) - T^2\,\mathrm{ch}(T/2)\right)$$
$$= 4 g_c \beta T\,\mathrm{sh}(T/2) + 2g_c\left(6T\,\mathrm{sh}(T/2) - T^2\,\mathrm{ch}(T/2)\right).$$

en $\beta = \beta_c$ $$= 4 g_c T\,\mathrm{sh}(T/2)\left(\frac{T}{2}\frac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}} - 1\right) + 2 g_c\left(6T\,\mathrm{sh}(T/2) - T^2\,\mathrm{ch}(T/2)\right)$$
$$= 2 g_c\left(6T\,\mathrm{sh}(T/2) - \cancel{T^2\,\mathrm{ch}(T/2)} + \cancel{T^2\,\mathrm{ch}(T/2)} - 2T\,\mathrm{sh}(T/2)\right)$$
$$= 8 g_c T\,\mathrm{sh}(T/2) \neq 0.$$



(c) Couplage chimique

i. $$\int_{\varepsilon_1 T}^{\varepsilon_2 T} e^t I_{chim}(t)\,dt = \int_{\varepsilon_1 T}^{\varepsilon_2 T} e^t S_T(t-nT)\,dt \overset{u=t-nT}{=} \int_{u_1}^{u_2} e^{u+nT} S_T(t)\,dt$$

$$= \frac{\alpha^2 e^{nT}}{(1-e^{-\alpha T})^2}\int_{u_1}^{u_2} e^{u}\, e^{-u}\left(u(1-e^{-\alpha T})+Te^{-\alpha T}\right)dt$$

$$= \frac{\alpha^2 e^{nT}}{(1-e^{-\alpha T})^2}\left(\left(\frac{u_2^2}{2}-\frac{u_1^2}{2}\right)(1-e^{-\alpha T})+Te^{-\alpha T}(u_2-u_1)\right)$$

$$= \frac{\alpha^2 e^{nT}}{(1-e^{-\alpha T})^2}\left(\frac{(\varepsilon_2-n)^2T^2-(\varepsilon_1-n)^2T^2}{2}(1-e^{-\alpha T})+T^2e^{-\alpha T}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\right)$$

$$= \frac{\alpha^2 T^2 e^{nT}}{(1-e^{-\alpha T})^2}\left(\frac{(\varepsilon_2-n)^2-(\varepsilon_1-n)^2}{2}(1-e^{-\alpha T})+e^{-\alpha T}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\right)$$

(ii) $$G(\phi)=\frac{1}{IT^2}\left\{\int_0^{\phi T} e^t I_{chim}(t-\phi T) + \int_{\phi T}^{T} e^t I_{chim}(t-\phi t) + \int_0^{(1-\phi)T} e^t I_{chim}(t+\phi T) + \int_{(1-\phi)T}^{T} e^t I_{chim}(t+\phi T)\right\}.$$

I_1: $n=-1$ $$I_1=\int_{-\phi T}^{0} e^{t+\phi T} I_{chim}(t)\,dt = \frac{e^{\phi T}\alpha^2T^2e^{-T}}{(1-e^{-\alpha T})^2}\left(-\frac{(1-\phi)^2-1}{2}(1-e^{-\alpha T})+e^{-\alpha T}\phi\right)$$

$$I_2=\int_{0}^{T(1-\phi)} e^{t+\phi T} I_{chim}(t)\,dt = \frac{e^{\phi T}\alpha^2T^2}{(1-e^{-\alpha T})^2}\left(\frac{(1-\phi)^2}{2}(1-e^{-\alpha T})+e^{-\alpha T}(1-\phi)\right).$$

$\cancel{I_1+I_2}$

$$I_3=\int_{\phi T}^{T} e^{t} I_{chim}(t)\,dt\; e^{-\phi T} = \frac{e^{-\phi T}\alpha^2T^2}{(1-e^{-\alpha T})^2}\left(\frac{1-\phi^2}{2}(1-e^{-\alpha T})+e^{-\alpha T}(1-\phi)\right)$$

$$I_4=\int_{T}^{T+\phi T} e^{t} I_{chim}(t)\,dt\; e^{-\phi T} = \frac{e^{-\phi T}\alpha^2T^2e^{T}}{(1-e^{-\alpha T})^2}\left(\frac{\phi^2}{2}(1-e^{-\alpha T})+e^{-\alpha T}\phi\right)$$

$$G(\phi)=\frac{g_s\,\alpha^2T^2}{IT^2(1-e^{-\alpha T})^2}\Bigg\{ e^{-(1-\phi)T}\left(\frac{1-(1-\phi)^2}{2}(1-e^{-\alpha T})+e^{-\alpha T}\phi\right)$$
$$+\,e^{\phi T}\left(\frac{(1-\phi)^2}{2}(1-e^{-\alpha T})+e^{-\alpha T}(1-\phi)\right)$$
$$+\,e^{-\phi T}\left(\frac{1-\phi^2}{2}(1-e^{-\alpha T})+e^{-\alpha T}(1-\phi)\right)$$
$$+\,e^{(1-\phi)T}\left(\frac{\phi^2}{2}(1-e^{-\alpha T})+e^{-\alpha T}\phi\right)\Bigg\}$$

(iii) 0, 1/2 et 1 : évident - On vérifie que ça marche :

$$0 : \cancel{0} + \frac{1}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) + e^{-\alpha T} - \frac{1}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) - e^{-\alpha T} + 0 = 0.$$

$$1 : \frac{1}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) + e^{-\alpha T} + 0 + 0 - \frac{1}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) - e^{-\alpha T} = 0.$$

$$1/2 : e^{-T/2}\,\frac{1-1/4}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) + \frac{1}{2}e^{-\alpha T} + e^{T/2}\,\frac{1/4}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) + \frac{1}{2}e^{-\alpha T}$$
$$- e^{-T/2}\,\frac{1-1/4}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) - \frac{1}{2}e^{-\alpha T} - e^{T/2}\,\frac{1/4}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) - \frac{1}{2}e^{-\alpha T} = 0. \quad \blacksquare$$

(iv). Il faut dériver : c'est moche.

$$\begin{aligned}
G'(\phi) = K\Big[& T e^{-(1-\phi)T}\left(\frac{1-(1-\phi)^2}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) + e^{-\alpha T}\phi\right) \\
& + e^{-(1-\phi)T}\left(\frac{1+2(1-\phi)}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) + e^{-\alpha T}\right) \\
& + T e^{\phi T}\left(\frac{(1-\phi)^2}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) + e^{-\alpha T}(1-\phi)\right) \\
& + e^{\phi T}\left(\frac{-2(1-\phi)}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) - e^{-\alpha T}\right) \\
& - T e^{-\phi T}\left(\frac{1-\phi^2}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) + e^{-\alpha T}(1-\phi)\right) \\
& - e^{-\phi T}\left(-\phi\left(1-e^{-\alpha T}\right) - e^{-\alpha T}\right) \\
& + T e^{(1-\phi)T}\left(\frac{\phi^2}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) + e^{-\alpha T}\phi\right) \\
& - e^{(1-\phi)T}\left(\phi\left(1-e^{-\alpha T}\right) + e^{-\alpha T}\right).\Big].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G'(0) = K\Big[& T e^{-T}\cancel{(0+0)} + e^{-T}\left(\frac{3}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) + e^{-\alpha T}\right) + T\left(\frac{1}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) \cancel{+ e^{-\alpha T}}\right) \\
& + \left(-\left(1-e^{-\alpha T}\right)\right) \cancel{- e^{-\alpha T}} - T\left(\frac{1}{2}\left(1-e^{-\alpha T}\right) \cancel{+ e^{-\alpha T}}\right) \\
& \cancel{+ e^{-\alpha T}} + T e^{T}(0+0) - e^{T}e^{-\alpha T}\Big].
\end{aligned}$$

$$= K\left[e^{-T}\left(1-e^{-\alpha T}\right) + e^{-(1+\alpha)T} - \left(1-e^{-\alpha T}\right) - e^{(1-\alpha)T}\right].$$

$$= K\Big[\underbrace{\left(e^{-T}-1\right)\left(1-e^{-\alpha T}\right)}_{\leqslant 0.} + \underbrace{e^{-(1+\alpha)T} - e^{(1-\alpha)T}}_{\leqslant 0}\Big].$$

$$\leqslant 0$$

$G'(1) \leq 0$ par imparité de la fonction.

$G'(1/2)$: cf figure : d'abord instable puis stable

(v) idem.

(vi)