Dependency Pairs and Polynomial Path Orders

Martin Avanzini and Georg Moser

Computational Logic
Faculty of Computer Science, University of Innsbruck

RTA '09

Automatic Complexity Analysis

Goal

- purely automatic complexity analysis

Approach

- employ term rewriting as model of computation

1. proof termination
2. extract complexity certificates from termination proof

Automatic Complexity Analysis

Goal

- purely automatic complexity analysis

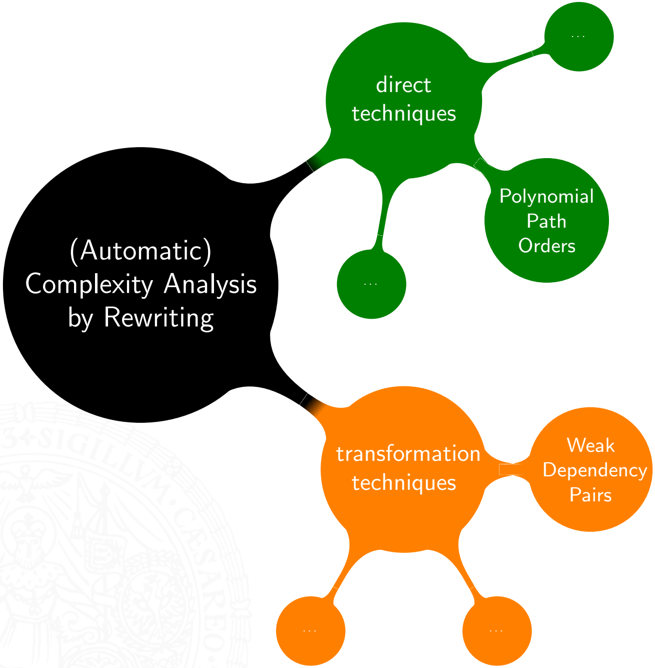
Approach

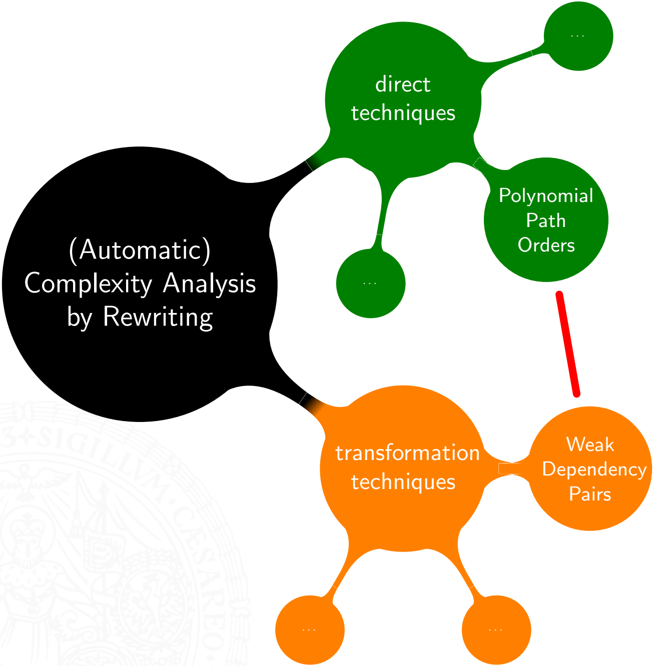
- employ term rewriting as model of computation

  1. proof termination
  2. extract complexity certificates from termination proof

Problem

- to detect feasible computation, restrictions on termination technique usually inevitable


(Automatic) Complexity Analysis by Rewriting
direct techniques
...
Polynomial Path Orders
...
transformation techniques
Weak Dependency Pairs
...
...


(Automatic) Complexity Analysis by Rewriting
direct techniques
...
...
Polynomial Path Orders
transformation techniques
Weak Dependency Pairs
...
...

Term Rewriting

TRS $\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{s}(0) \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))) \end{aligned}$$

Term Rewriting

TRS $\mathcal{R}_{\text{bits}}$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{s}(0) \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))) \end{aligned}$$

$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$

Term Rewriting

TRS $\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}$

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(0)$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))))$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0))))$$

Term Rewriting

TRS $\mathcal{R}_{\text{bits}}$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{s}(0) \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))) \end{aligned}$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)))$$

Term Rewriting

TRS $\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{s}(0) \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))) \end{aligned}$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$$

Term Rewriting

TRS $\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{s}(0) \\ \mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))) \end{aligned}$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$$

$$\mathsf{bits}(n) = v \iff \mathsf{bits}(\ulcorner n \urcorner) \to^{!}_{\mathcal{R}} \ulcorner v \urcorner$$

computation

Term Rewriting

TRS $\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{s}(0) \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))) \end{aligned}$$

confluent and
terminating
constructor TRS

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \to$$

$$\mathsf{bits}(n) = v \iff \mathsf{bits}(\ulcorner n \urcorner) \to^{!}_{\mathcal{R}} \ulcorner v \urcorner$$

computation

Term Rewriting

TRS $\mathcal{R}_{\text{bits}}$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{s}(0) \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))) \end{aligned}$$

confluent and terminating constructor TRS

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \to$$

$$\mathsf{bits}(n) = v \iff \mathsf{bits}(\ulcorner n \urcorner) \to^{!}_{\mathcal{R}} \ulcorner v \urcorner = \ulcorner \log(n+1) \urcorner$$

computation

Runtime Complexity of TRSs

- derivation length

$$\mathsf{dl}(t, \to) = \max\{n \mid \exists s.\ t \to^n s\}$$

$$\mathsf{dl}(n, T, \to) = \max\{\mathsf{dl}(t, \to) \mid t \in T \text{ and } |t| \leqslant n\}$$

Runtime Complexity of TRSs

- derivation length

$$\mathsf{dl}(t, \to) = \max\{n \mid \exists s.\ t \to^n s\}$$

$$\mathsf{dl}(n, T, \to) = \max\{\mathsf{dl}(t, \to) \mid t \in T \text{ and } |t| \leqslant n\}$$

- derivational complexity

$$\mathsf{dc}_{\mathcal{R}}(n) = \mathsf{dl}(n, \mathcal{T}, \to_{\mathcal{R}})$$

Runtime Complexity of TRSs

- derivation length

$$\mathsf{dl}(t, \rightarrow) = \max\{n \mid \exists s.\ t \rightarrow^n s\}$$

$$\mathsf{dl}(n, T, \rightarrow) = \max\{\mathsf{dl}(t, \rightarrow) \mid t \in T \text{ and } |t| \leqslant n\}$$

- derivational complexity

$$\mathsf{dc}_{\mathcal{R}}(n) = \mathsf{dl}(n, \mathcal{T}, \rightarrow_{\mathcal{R}})$$

capture complexity
of computed functions

- runtime complexity

$$\mathsf{rc}_{\mathcal{R}}(n) = \mathsf{dl}(n, \mathcal{B}, \rightarrow_{\mathcal{R}})$$

$$\mathcal{B} := \{f(v_1, \dots, v_n) \mid f \text{ defined, } v_i \text{ build from constructors}\}$$

Runtime Complexity of TRSs

- derivation length

$$\mathrm{dl}(t, \to) = \max\{n \mid \exists s.\ t \to^n s\}$$

$$\mathrm{dl}(n, T, \to) = \max\{\mathrm{dl}(t, \to) \mid t \in T \text{ and } |t| \leqslant n\}$$

- derivational complexity

$$\mathrm{dc}_{\mathcal{R}}(n) = \mathrm{dl}(n, \mathcal{T} \ldots$$

avoid duplication
of redexes

- innermost runtime complexity

$$\mathrm{rc}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}}(n) = \mathrm{dl}(n, \mathcal{B}, \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}})$$

$$\mathcal{B} := \{f(v_1, \ldots, v_n) \mid f \text{ defined, } v_i \text{ build from constructors}\}$$

Polynomial Path Orders $>_{\mathsf{pop*}}$

- $>_{\mathsf{pop*}} \subseteq >_{\mathsf{mpo}}$

Theorem (A, Moser 2008)

$$\mathcal{R} \subseteq >_{\mathsf{pop*}} \Rightarrow \mathsf{rc}^{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \textit{ polynomially bounded}$$

Polynomial Path Orders $>_{\mathsf{pop*}}$

- $>_{\mathsf{pop*}} \subseteq >_{\mathsf{mpo}}$
- $>_{\mathsf{pop*}} \approx >_{\mathsf{mpo}} \cap$ predicative recursion

Predicative Recursion [Bellantoni, Cook 1992]

$$f(\varepsilon, \vec{x}; \vec{y}) = g(\vec{x}; \vec{y})$$
$$f(z \cdot i, \vec{x}; \vec{y}) = h_i(z, \vec{x}; \vec{y}, f(z, \vec{x}; \vec{y})), \;\; i \in \{0, 1\}$$

$$f(\underbrace{x_1, \ldots, x_m}_{\text{normal}}; \underbrace{y_1, \ldots, y_n}_{\text{safe}})$$

Theorem (A, Moser 2008)

$$\mathcal{R} \subseteq >_{\mathsf{pop*}} \Rightarrow \mathsf{rc}^{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \textit{ polynomially bounded}$$

Polynomial Path Orders $>_{\mathsf{pop}*}$

- $>_{\mathsf{pop}*} \subsetneq >_{\mathsf{mpo}}$
- $>_{\mathsf{pop}*} \approx >_{\mathsf{mpo}} \cap$ predicative recursion
- $\mathcal{R} \subseteq >_{\mathsf{pop}*}$ and $s \to_{\mathcal{R}} t \not\Rightarrow s >_{\mathsf{pop}*} t$

Theorem (A, Moser 2008)

$$\mathcal{R} \subseteq >_{\mathsf{pop}*} \Rightarrow \mathsf{rc}^{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \textit{ polynomially bounded}$$

Polynomial Path Orders $>_{\mathsf{pop}*}$

- $>_{\mathsf{pop}*} \subseteq >_{\mathsf{mpo}}$
- $>_{\mathsf{pop}*} \approx >_{\mathsf{mpo}} \cap$ predicative recursion
- $\mathcal{R} \subseteq >_{\mathsf{pop}*}$ and $s \to_{\mathcal{R}} t \not\Rightarrow s >_{\mathsf{pop}*} t$

Lemma

if $\mathcal{R} \subseteq >_{\mathsf{pop}*}$ then there exists $\mathcal{I} : \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V}) \to \mathbb{N}$ satisfying

1. $s \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} t \Rightarrow \mathcal{I}(s) > \mathcal{I}(t)$

Theorem (A, Moser 2008)

$$\mathcal{R} \subseteq >_{\mathsf{pop}*} \Rightarrow \mathsf{rc}^{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \text{ polynomially bounded}$$

Polynomial Path Orders $>_{\mathrm{pop}*}$

- $>_{\mathrm{pop}*} \subsetneq >_{\mathrm{mpo}}$
- $>_{\mathrm{pop}*} \approx >_{\mathrm{mpo}} \cap$ predicative recursion
- $\mathcal{R} \subseteq >_{\mathrm{pop}*}$ and $s \to_{\mathcal{R}} t \not\Rightarrow s >_{\mathrm{pop}*} t$

Lemma

if $\mathcal{R} \subseteq >_{\mathrm{pop}*}$ *then there exists* $\mathcal{I} : \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V}) \to \mathbb{N}$ *satisfying*

1. $s \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}} t \Rightarrow \mathcal{I}(s) > \mathcal{I}(t)$
2. $\mathcal{I}(t)$ *polynomially bounded (in the size of* t*) for basic terms* t

Theorem (A, Moser 2008)

$$\mathcal{R} \subseteq >_{\mathrm{pop}*} \Rightarrow \mathrm{rc}^{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}} \text{ polynomially bounded}$$

Polynomial Path Orders $>_{\mathsf{pop}*}$ (continued)

Observation

$$>_{\mathsf{pop}*} \subseteq >_{\mathsf{mpo}}$$

- application of polynomial path orders restricted to MPO-terminating TRS's

Polynomial Path Orders $>_{\mathsf{pop*}}$ (continued)

Observation

$$>_{\mathsf{pop*}} \subseteq >_{\mathsf{mpo}}$$

- application of polynomial path orders restricted to MPO-terminating TRS's

☞ dependency pairs for complexity analysis

- reduction pairs, argument filterings, usable rules, dependency graphs, subterm criterion ...

Polynomial Path Orders $>_{\mathsf{pop}*}$ (continued)

Observation

$$>_{\mathsf{pop}*} \subseteq >_{\mathsf{mpo}}$$

- application of polynomial path orders restricted to MPO-terminating TRS's

☞ dependency pairs for complexity analysis

- reduction pairs, argument filterings, usable rules, dependency graphs, subterm criterion ...

Dependency Pairs for Complexity Analysis

$$t^\sharp = \begin{cases} t & \text{if } t \text{ a variable} \\ f^\sharp(t_1, \dots, t_n) & \text{if } t = f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

$$\mathrm{WIDP}(\mathcal{R}) = \{l^\sharp \to \mathsf{c}(r_1^\sharp, \dots r_n^\sharp) \mid l \to C[r_1, \dots, r_n] \in \mathcal{R}\}$$

- C maximal context built from constructors and variables
- c fresh compound symbol (but we set $\mathsf{c}(t) = t$)

Dependency Pairs for Complexity Analysis

$$t^\sharp = \begin{cases} t & \text{if } t \text{ a variable} \\ f^\sharp(t_1,\dots,t_n) & \text{if } t = f(t_1,\dots,t_n) \end{cases}$$

$$\mathrm{WIDP}(\mathcal{R}) = \{l^\sharp \to \mathsf{c}(r_1^\sharp,\dots r_n^\sharp) \mid l \to C[r_1,\dots,r_n] \in \mathcal{R}\}$$

- C maximal context built from constructors and variables
- c fresh compound symbol (but we set $\mathsf{c}(t) = t$)

TRS $\mathcal{R}$	$\mathrm{WIDP}(\mathcal{R})$
$\mathsf{f}(0) \to 0$	$\mathsf{f}^\sharp(0) \to \mathsf{c}_1$
$\mathsf{f}(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{d}(\mathsf{f}(x),\mathsf{f}(x))$	$\mathsf{f}^\sharp(\mathsf{s}(x)) \to \mathsf{c}_2(\mathsf{f}^\sharp(x),\mathsf{f}^\sharp(x))$

Dependency Pairs for Complexity Analysis (continued)

TRS $\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}$

$$\mathsf{half}(0) \rightarrow 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \rightarrow 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \rightarrow 0 \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) \rightarrow \mathsf{s}(0)$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \rightarrow \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \rightarrow \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))))$$

$\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}})$

$$\mathsf{half}^{\sharp}(0) \rightarrow \mathsf{c}_1 \qquad \mathsf{bits}^{\sharp}(0) \rightarrow \mathsf{c}_3$$
$$\mathsf{half}^{\sharp}(\mathsf{s}(0)) \rightarrow \mathsf{c}_2 \qquad \mathsf{bits}^{\sharp}(\mathsf{s}(0)) \rightarrow \mathsf{c}_4$$
$$\mathsf{half}^{\sharp}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \rightarrow \mathsf{half}^{\sharp}(x) \qquad \mathsf{bits}^{\sharp}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \rightarrow \mathsf{bits}^{\sharp}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))$$

Dependency Pairs for Complexity Analysis (continued)

TRS $\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{s}(0) \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))) \end{aligned}$$

$\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}})$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}^{\sharp}(0) &\to \mathsf{c}_1 & \mathsf{bits}^{\sharp}(0) &\to \mathsf{c}_3 \\ \mathsf{half}^{\sharp}(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{c}_2 & \mathsf{bits}^{\sharp}(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{c}_4 \\ \mathsf{half}^{\sharp}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{half}^{\sharp}(x) & \mathsf{bits}^{\sharp}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{bits}^{\sharp}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))) \end{aligned}$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$$

Dependency Pairs for Complexity Analysis (continued)

TRS $\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}$

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(0)$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))))$$

$\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}})$

$$\mathsf{half}^\sharp(0) \to \mathsf{c}_1 \qquad \mathsf{bits}^\sharp(0) \to \mathsf{c}_3$$
$$\mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{c}_2 \qquad \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{c}_4$$
$$\mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{half}^\sharp(x) \qquad \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$$

$$\mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))$$

Dependency Pairs for Complexity Analysis (continued)

TRS $\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}$

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(0)$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))))$$

$\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}})$

$$\mathsf{half}^\sharp(0) \to \mathsf{c}_1 \qquad \mathsf{bits}^\sharp(0) \to \mathsf{c}_3$$
$$\mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{c}_2 \qquad \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{c}_4$$
$$\mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{half}^\sharp(x) \qquad \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$$

$$\mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{R}} \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))$$

Dependency Pairs for Complexity Analysis (continued)

TRS $\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & \mathsf{bits}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{s}(0) \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & \mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))) \end{aligned}$$

$\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}})$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}^\sharp(0) &\to \mathsf{c}_1 & \mathsf{bits}^\sharp(0) &\to \mathsf{c}_3 \\ \mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{c}_2 & \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{c}_4 \\ \mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{half}^\sharp(x) & \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))) \end{aligned}$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$$

$$\mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{R}} \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{R}} \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(0))$$

Dependency Pairs for Complexity Analysis (continued)

TRS $\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}$

$$\mathsf{half}(0) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0 \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(0)$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \qquad \mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))))$$

$\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}})$

$$\mathsf{half}^\sharp(0) \to \mathsf{c}_1 \qquad \mathsf{bits}^\sharp(0) \to \mathsf{c}_3$$
$$\mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{c}_2 \qquad \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{c}_4$$
$$\mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{half}^\sharp(x) \qquad \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$$
$$\mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{R}} \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{R}} \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(0)) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{R}} \mathsf{c}_4$$

Dependency Pairs for Complexity Analysis (continued)

$\mathcal{U} := \mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}))$ usable rules

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \end{aligned}$$

$\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}})$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}^\sharp(0) &\to \mathsf{c}_1 & \mathsf{bits}^\sharp(0) &\to \mathsf{c}_3 \\ \mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{c}_2 & \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{c}_4 \\ \mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{half}^\sharp(x) & \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))) \end{aligned}$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$$

$$\mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{U}} \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{U}} \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(0)) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{U}} \mathsf{c}_4$$

Dependency Pairs for Complexity Analysis (continued)

$\mathcal{U} := \mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}))$ usable rules

$$\mathsf{half}(0) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) \to 0$$
$$\mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x))$$

$\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}})$

$$\mathsf{half}^\sharp(0) \to \mathsf{c}_1 \qquad \mathsf{bits}^\sharp(0) \to \mathsf{c}_3$$
$$\mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{c}_2 \qquad \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{c}_4$$
$$\mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{half}^\sharp(x) \qquad \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x)))$$

$$\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0)))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{bits}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$$
$$\mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{U}} \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{half}(0))) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{U}} \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(0)) \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{U}} \mathsf{c}_4$$

Dependency Pairs for Complexity Analysis (continued)

Notation

$\rightarrow_{\mathcal{P}/\mathcal{U}} := \rightarrow_{\mathcal{U}}^{*} \cdot \rightarrow_{\mathcal{P}} \cdot \rightarrow_{\mathcal{U}}^{*}$

Dependency Pairs for Complexity Analysis (continued)

Notation

$\xrightarrow{\mathrm{i}}_{\mathcal{P}/\mathcal{U}} := \xrightarrow{\mathrm{i}}{}^{+}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{U}}$ with exactly one step due to $\mathcal{P}$

Dependency Pairs for Complexity Analysis (continued)

Notation

$\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{P}/\mathcal{U}} := \xrightarrow{\mathsf{i}}^{+}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{U}}$ with exactly one step due to $\mathcal{P}$

Theorem (Hirokawa, Moser 2008)

$$\mathsf{rc}^{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}(n) \leqslant \mathcal{O}(\,\mathsf{dl}(n, \mathcal{B}^{\sharp}, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})/\mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}))}) + |t|\,)$$

provided

- $\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})$ *is non-duplicating*
- $\mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})) \subseteq >_{\mathcal{A}}$ *for some strongly linear interpretation* $\mathcal{A}$

interpretations are weight functions

Dependency Pairs for Complexity Analysis (continued)

Notation

$\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathcal{P}/\mathcal{U}} := \xrightarrow{\mathsf{i}}^{+}_{\mathcal{P}\cup\mathcal{U}}$ with exactly one step due to $\mathcal{P}$

Theorem (Hirokawa, Moser 2008)

$$\mathsf{rc}^{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}}(n) \leqslant \mathcal{O}(\,\mathsf{dl}(n, \mathcal{B}^{\sharp}, \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})/\mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}))}) + |t|\,)$$

provided

- $\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})$ *is non-duplicating*
- $\mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})) \subseteq >_{\mathcal{A}}$ *for some strongly linear interpretation* $\mathcal{A}$

interpretations are weight functions

☞ measure $\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})$-steps with reduction pairs

Reduction Pairs for Complexity Analysis

Reduction Pairs for Complexity Analysis

Definition

a safe reduction pair is a pair $(\succsim, \succ)$ of orderings such that

- $\succsim$ is a rewrite preorder,
- $\succ$ is closed under substitutions,
- $\succsim \cdot \succ \cdot \succsim \subseteq \succ$
- $s_i \succ t_i \Rightarrow \mathsf{c}(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \succ \mathsf{c}(s_1, \ldots, t_i, \ldots, s_n)$ for compound symbols c

Reduction Pairs for Complexity Analysis

Definition

a safe reduction pair is a pair $(\succsim, \succ)$ of orderings such that

- $\succsim$ is a rewrite preorder,
- $\succ$ is closed under substitutions,
- $\succsim \cdot \succ \cdot \succsim \subseteq \succ$
- $s_i \succ t_i \Rightarrow \mathsf{c}(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \succ \mathsf{c}(s_1, \ldots, t_i, \ldots, s_n)$ for compound symbols c

Lemma (Hirokawa, Moser 2008)

suppose $\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}) \subseteq \succ$ *and* $\mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})) \subseteq \succsim$

$$\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})/\mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}))} \subseteq \succ$$

Reduction Pairs for Complexity Analysis

Definition

a safe reduction pair is a pair $(\succsim, \succ)$ of orderings such that

- $\succsim$ is a rewrite preorder,
- $\succ$ is closed under substitutions,
- $\succsim \cdot \succ \cdot \succsim \subseteq \succ$
- $s_i \succ t_i \Rightarrow \mathsf{c}(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \succ \mathsf{c}(s_1, \ldots, t_i, \ldots, s_n)$ for compound symbols c

Lemma (Hirokawa, Moser 2008)

suppose $\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}) \subseteq \succ$ *and* $\mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})) \subseteq \succsim$

$$\xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})/\mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}))} \subseteq \succ$$

☞ $\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})$-steps bounded by $\succ$-descents

Polynomial Path Orders as Reduction Pair

Problem

- $(\gtrsim_{\mathsf{pop}*}, >_{\mathsf{pop}*})$ is not a reduction pair

Polynomial Path Orders as Reduction Pair

Problem

- $(\gtrsim_{\mathsf{pop}*}, >_{\mathsf{pop}*})$ is not a reduction pair

Theorem

suppose $\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}) \subseteq >_{\mathsf{pop}*}$ *and* $\mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})) \subseteq \gtrsim_{\mathsf{pop}*}$

$$s \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})/\mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}))} t \Rightarrow \mathcal{I}(s) > \mathcal{I}(t)$$

☞ $\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})$-steps bounded by interpretation $\mathcal{I}$,
i.e. polynomially bounded in the sizes of starting terms $\mathcal{B}$

Polynomial Path Orders as Reduction Pair

Problem

- $(\gtrsim^{\pi}_{\mathsf{pop}*}, >^{\pi}_{\mathsf{pop}*})$ is not a reduction pair

$s \succ^{\pi} t \iff \pi(s) \succ \pi(t)$
for argument filtering π

Theorem

suppose $\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}) \subseteq >^{\pi}_{\mathsf{pop}*}$ *and* $\mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})) \subseteq \gtrsim^{\pi}_{\mathsf{pop}*}$

$$s \xrightarrow{\mathsf{i}}_{\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})/\mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}))} t \Rightarrow \mathcal{I}(\pi(s)) > \mathcal{I}(\pi(t))$$

☞ $\mathsf{WIDP}(\mathcal{R})$-steps bounded by interpretation $\mathcal{I}$,
i.e. polynomially bounded in the sizes of starting terms $\mathcal{B}$

Polynomial Path Orders as Reduction Pair (continued)

Corollary

let $\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R})$ *and* $\mathcal{U} := \mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}))$, *and suppose*

- $\mathcal{P}$ *is non-duplicating*
- $\mathcal{U} \subseteq >_{\mathcal{A}}$ *for some strongly linear interpretation* $\mathcal{A}$

then

$$\mathcal{P} \subseteq >^{\pi}_{\mathsf{pop}*},\ \mathcal{U} \subseteq \gtrsim^{\pi}_{\mathsf{pop}*} \Rightarrow \mathsf{rc}^{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \text{ polynomially bounded}$$

Example

$\mathcal{U} := \mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}))$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) \end{aligned}$$

$\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}})$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}^\sharp(0) &\to \mathsf{c}_1 & \mathsf{bits}^\sharp(0) &\to \mathsf{c}_3 \\ \mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{c}_2 & \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{c}_4 \\ \mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{half}^\sharp(x) & \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))) \end{aligned}$$

Example

$\mathcal{U} := \mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}))$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}(0) &\to 0 & 2 &> 1 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(0)) &\to 0 & 3 &> 1 \\ \mathsf{half}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{s}(\mathsf{half}(x)) & 3 + x &> 2 + x \end{aligned}$$

$\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}})$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}^\sharp(0) &\to \mathsf{c}_1 & \mathsf{bits}^\sharp(0) &\to \mathsf{c}_3 \\ \mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{c}_2 & \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{c}_4 \\ \mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{half}^\sharp(x) & \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{half}(x))) \end{aligned}$$

$$\mathsf{weight}(\mathsf{half}) = \mathsf{weight}(0) = \mathsf{weight}(\mathsf{s}) = 1$$

Example

$\mathcal{U} := \mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}))$

$$\begin{aligned} 0 &\to 0 \\ \mathsf{s}(0) &\to 0 \\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(x)) &\to \mathsf{s}(\quad x \;) \end{aligned}$$

$\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}})$

$$\begin{aligned} \mathsf{half}^\sharp(0) &\to \mathsf{c}_1 & \mathsf{bits}^\sharp(0) &\to \mathsf{c}_3 \\ \mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{c}_2 & \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{c}_4 \\ \mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{half}^\sharp(x) & \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\quad x \;)) \end{aligned}$$

$\pi(\mathsf{half}) = 1 \qquad \pi(\mathsf{half}^\sharp) = \pi(\mathsf{bits}^\sharp) = \pi(\mathsf{s}) = [1]$

Example

$\mathcal{U} := \mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}))$

$$0 \gtrsim_{\mathsf{pop}*} 0$$
$$\mathsf{s}(0) \gtrsim_{\mathsf{pop}*} 0$$
$$\mathsf{s}(\mathsf{s}(x)) \gtrsim_{\mathsf{pop}*} \mathsf{s}(\quad x \;)$$

$\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}})$

$$\mathsf{half}^\sharp(0) >_{\mathsf{pop}*} \mathsf{c}_1 \qquad \mathsf{bits}^\sharp(0) >_{\mathsf{pop}*} \mathsf{c}_3$$
$$\mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(0)) >_{\mathsf{pop}*} \mathsf{c}_2 \qquad \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(0)) >_{\mathsf{pop}*} \mathsf{c}_4$$
$$\mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) >_{\mathsf{pop}*} \mathsf{half}^\sharp(x) \qquad \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) >_{\mathsf{pop}*} \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\quad x \;))$$

$$\mathsf{half}^\sharp > \mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2 \quad \mathsf{bits}^\sharp > \mathsf{c}_3, \mathsf{c}_4$$
$$\mathsf{safe}(\mathsf{s}) = \{1\}, \mathsf{safe}(\mathsf{half}^\sharp) = \mathsf{safe}(\mathsf{bits}^\sharp) = \varnothing$$

Example

$\mathcal{U} := \mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}))$

$$0 \gtrsim_{\mathsf{pop}*} 0$$
$$\mathsf{s}(0) \gtrsim_{\mathsf{pop}*} 0$$
$$\mathsf{s}(\mathsf{s}(x)) \gtrsim_{\mathsf{pop}*} \mathsf{s}(\quad x \ )$$

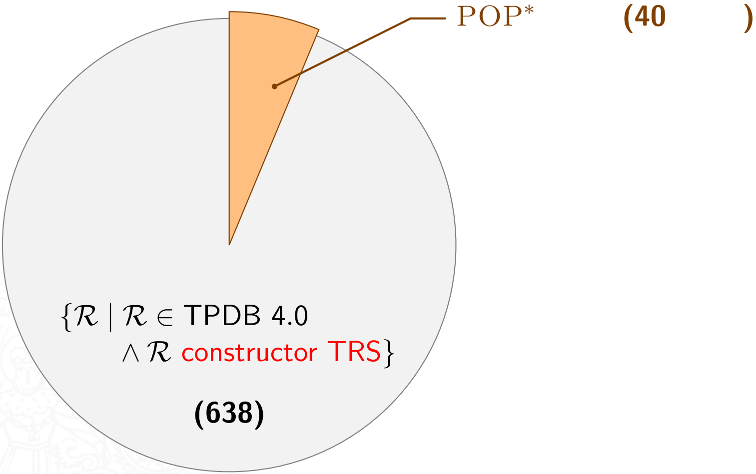
$\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R}_{\mathsf{bits}})$

$$\mathsf{half}^\sharp(0) >_{\mathsf{pop}*} \mathsf{c}_1 \qquad \mathsf{bits}^\sharp(0) >_{\mathsf{pop}*} \mathsf{c}_3$$
$$\mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(0)) >_{\mathsf{pop}*} \mathsf{c}_2 \qquad \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(0)) >_{\mathsf{pop}*} \mathsf{c}_4$$
$$\mathsf{half}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) >_{\mathsf{pop}*} \mathsf{half}^\sharp(x) \qquad \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) >_{\mathsf{pop}*} \mathsf{bits}^\sharp(\mathsf{s}(\quad x \ ))$$

$\mathcal{R}_{\mathsf{bits}}$ admits polynomial (innermost) runtime complexity ✓

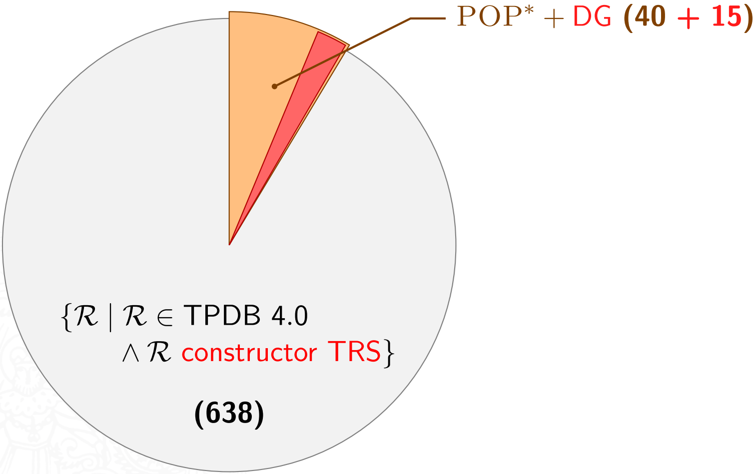
Experimental Results

Number of Yes-Instances



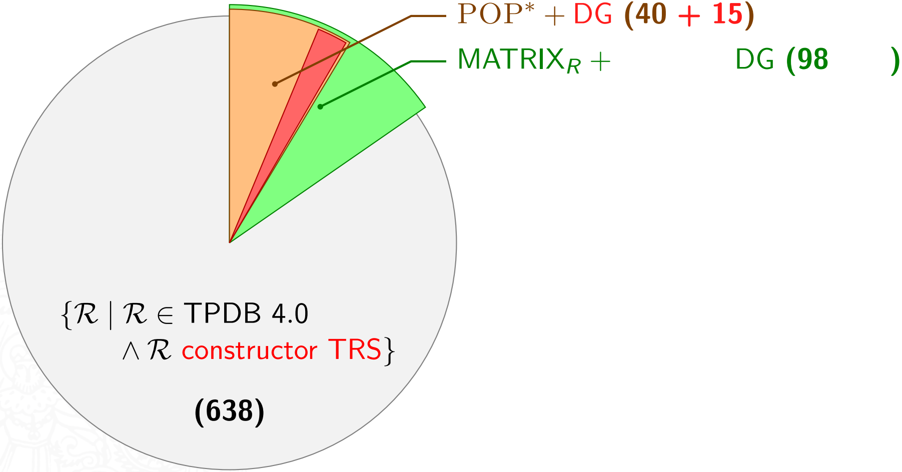
Experimental Results

Number of Yes-Instances



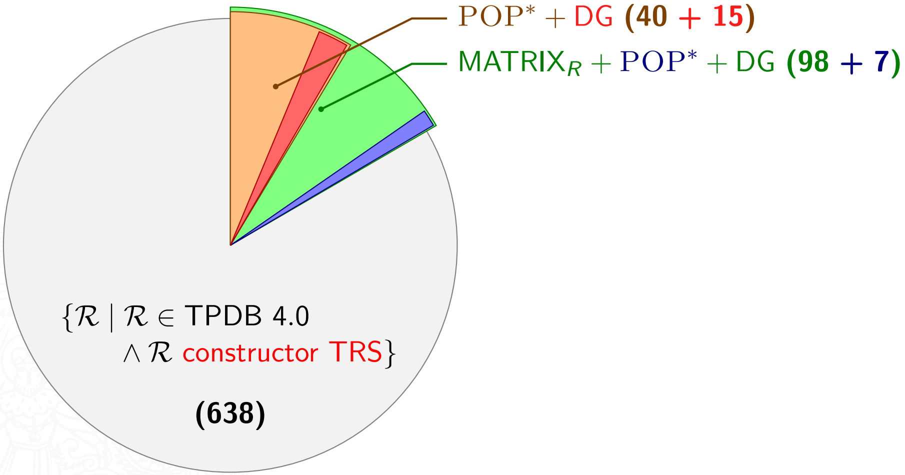
Experimental Results

Number of Yes-Instances



Experimental Results

Number of Yes-Instances



Polytime Computability

Polytime Computability

Theorem

let $\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R})$ *and* $\mathcal{U} := \mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}))$, *and suppose*

- $\mathcal{P}$ *is non-duplicating*
- $\mathcal{U} \subseteq >_{\mathcal{A}}$ *for some strongly linear interpretation* $\mathcal{A}$

then

$$\mathcal{P} \subseteq >^{\pi}_{\mathsf{pop}*},\ \mathcal{U} \subseteq \gtrsim^{\pi}_{\mathsf{pop}*} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{rc}^{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \text{ polynomially bounded}$$

Polytime Computability

Theorem

let $\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R})$ *and* $\mathcal{U} := \mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}))$, *and suppose*

- $\mathcal{P}$ *is non-duplicating*
- $\mathcal{U} \subseteq >_{\mathcal{A}}$ *for some strongly linear interpretation* $\mathcal{A}$

then

$$\mathcal{P} \subseteq >^{\pi}_{\mathsf{pop}*}, \ \mathcal{U} \subseteq \gtrsim^{\pi}_{\mathsf{pop}*} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{rc}^{\mathsf{i}}_{\mathcal{R}} \text{ polynomially bounded}$$

can we say something about
the complexity of the
functions computed by $\mathcal{R}$?

Polytime Computability

Theorem

let $\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R})$ *and* $\mathcal{U} := \mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}))$, *and suppose*

- $\mathcal{P}$ *is non-duplicating*
- $\mathcal{U} \subseteq >_{\mathcal{A}}$ *for some strongly linear interpretation* $\mathcal{A}$
- $\mathcal{R}$ *is based on a simple signature*

then

$$\mathcal{P} \subseteq >^{\pi}_{\mathsf{pop}*},\ \mathcal{U} \subseteq \gtrsim^{\pi}_{\mathsf{pop}*} \quad \Rightarrow$$

functions computed by $\mathcal{R}$ *are polytime-computable*

Polytime Computability

Theorem

let $\mathcal{P} := \mathsf{WIDP}(\mathcal{R})$ *and* $\mathcal{U} := \mathcal{U}(\mathsf{WIDP}(\mathcal{R}))$, *and suppose*

- $\mathcal{P}$ *is non-duplicating*
- $\mathcal{U} \subseteq >_{\mathcal{A}}$ *for some strongly linear interpreta...*
- $\mathcal{R}$ *is based on a simple signature*

terms grow only polynomial in size

then

$$\mathcal{P} \subseteq >^{\pi}_{\mathsf{pop}*},\ \mathcal{U} \subseteq \gtrsim^{\pi}_{\mathsf{pop}*} \quad \Rightarrow$$

functions computed by $\mathcal{R}$ *are polytime-computable*

Example

- s_1 : Word $\rightarrow$ Word ✓
- (:) : a $\times$ List(a) $\rightarrow$ List(a) ✓
- node : Tree $\times$ Tree $\rightarrow$ Tree ✗

Conclusion

Complexity Analysis By Rewriting

1. use rewriting as model of computation
2. estimate number of rewrite steps

   modular ☺, from termination proofs
3. conclude polytime-computability of functions defined by TRS

Conclusion

Complexity Analysis By Rewriting

1. use rewriting as model of computation
2. estimate number of rewrite steps

   modular ☺, from termination proofs
3. conclude polytime-computability of functions defined by TRS

Related Work

☞ Jean-Yves Marion and Romain Péchoux
Characterizations of polynomial complexity classes with a better intensionality
In Proc. PPDP '08, LNCS, pp. 79–88, 2008

$3 \wedge \neg 2$