

Préface

Cet ouvrage présente une étude relativement complète des mécanismes connus sous le nom de manipulateur parallèle. Il s'agit de structure en chaîne cinématique fermée, actionnée, et possédant des caractéristiques particulièrement intéressantes. Les potentialités de tels mécanismes ont suscité ces dernières années un fort engouement. Nous nous sommes fixé pour but de faire un ouvrage de synthèse sur ce sujet en présentant les résultats des recherches les plus récentes mais aussi en montrant que nombre d'applications ont démontré la validité du concept. Bien entendu un tel ouvrage présente le travail d'une communauté de chercheurs, et pas seulement celui de l'auteur même si sa rédaction introduit un biais inévitable. Si un soin très particulier a été apporté à la bibliographie il reste inévitable que, dans un domaine où les supports de publication sont fort divers, certains articles ne soient pas mentionnés : nous espérons cependant que le croisement des références permettra d'obtenir l'ensemble des publications pertinentes à un sujet particulier¹. Un certain nombre de références Internet sont aussi données : vu le caractère éphémère de ce type de média rien ne permet de garantir la pérennité de ces informations. Les codes de certains algorithmes décrits dans ce livre pourront être récupérés par `ftp` anonyme².

Cet ouvrage s'adresse aussi bien aux étudiants qu'aux chercheurs qui y trouveront sans doute matière à réflexion et, nous en sommes convaincu, de nouveaux sujets de recherche. A cet effet nous présentons à chaque fin de chapitre des exercices dont la solution est fournie et des problèmes qui restent encore à résoudre. Ce livre s'adresse également aux ingénieurs qui s'intéresseront dans chaque chapitre aux nombreux résultats pratiques, issus de l'expérience accumulée dans le cadre de l'utilisation et de la conception des prototypes que nous avons réalisés à l'INRIA et de fructueuses discussions avec des chercheurs et industriels ayant réalisé des manipulateurs parallèles.

La progression des chapitres suit un ordre logique et en tête de chaque chapitre est proposé un résumé des résultats qui y sont exposés. La lecture de ces introductions sera, en général, suffisante pour permettre l'étude des chapitres suivants.

Ce livre a fait l'objet d'une relecture attentive. Toutefois des erreurs se

¹Une base de données de références, classées par année, auteurs et thèmes est disponible à l'adresse : <http://www.inria.fr/coprin/personnel/merlet/merlet.html>

²Sauf mention du contraire les codes sont disponibles à l'adresse `zenon.inria.fr`

seront sans doute glissées dans le texte ; l'auteur espère simplement l'indulgence de ses lecteurs.

Cette étude fait appel à des disciplines très variées : mécanique, géométrie, calcul formel, informatique, automatique, etc., et n'aurait pu être conçue sans l'aide dont nous avons pu bénéficier à l'INRIA. La liste des personnes ayant participé de près ou de loin à l'obtention de certains des résultats présentés dans cet ouvrage serait trop longue pour figurer ici, mais nous leur exprimons notre reconnaissance pour leur précieuse aide. Nous tenons aussi à remercier C. Reboulet, pionnier de l'étude des robots parallèles, C. Gosselin, professeur à l'Université Laval de Québec, et J. Angeles, professeur à l'Université McGill de Montréal. De nombreux résultats publiés dans cet ouvrage sont le fruit de leurs travaux et les erreurs, qui pourraient se glisser lors de leur exposé, sont le seul fait de l'auteur.

Ma reconnaissance va aux différents chercheurs et industriels qui m'ont permis d'utiliser des photographies de leurs prototypes ou produits pour illustrer cet ouvrage.

Pour conclure ces remerciements je ne saurais oublier ma compagne Sylvie pour son aptitude à supporter mes retours tardifs et pour bien d'autres choses.

Sophia-Antipolis, 27 juillet 2007

Notation

Les notations suivantes seront employées dans cet ouvrage :

- \wedge : symbole du produit vectoriel.
- \cdot : symbole du produit scalaire.
- \dot{a} : dérivée par rapport au temps de la variable a .
- \mathbf{X} : coordonnées généralisées du robot.
- Θ : coordonnées articulaires du robot
- A_i : centre de l'articulation du segment i , proche de la base.
- $x_{a_i}, y_{a_i}, z_{a_i}$: coordonnées de A_i dans le référentiel absolu.
- B_i : centre de l'articulation du segment i , proche de l'organe terminal.
- $x_{b_i}, y_{b_i}, z_{b_i}$: coordonnées de B_i dans le référentiel mobile.
- O : centre du référentiel absolu. En général ce point sera le barycentre des points d'articulation proches de la base.
- x, y, z : axes du référentiel absolu lié à la base. L'axe y sera l'axe de symétrie de la base si elle en possède un.
- C : centre du référentiel mobile, sert en général à repérer la position de l'organe terminal. Ce sera souvent le barycentre des centres des articulations liées au mobile.
- x_c, y_c, z_c : coordonnées de C dans le repère absolu.
- x_r, y_r, z_r : axes du référentiel lié au plateau mobile. L'axe y_r sera l'axe de symétrie du mobile s'il en possède un.
- ψ, θ, ϕ : angles d'Euler permettant de décrire l'orientation de l'organe terminal. Ces angles sont définis de la manière suivante : partant du repère de référence on tourne d'un angle ψ autour de l'axe z , puis d'un angle θ autour du nouvel axe x et enfin d'un angle ϕ autour du nouvel axe z pour obtenir le repère mobile.
- R : matrice de rotation permettant le passage du référentiel mobile au référentiel absolu.
- ρ_i : longueur du segment relié à l'organe terminal de la chaîne i .
- J : matrice jacobienne du manipulateur.

- J^T : transposée de la matrice jacobienne.
- Ω : vecteur des vitesses angulaires de l'organe terminal ou vecteur instantané de rotation.
- \mathbf{V} : vecteur des vitesses cartésiennes de l'organe terminal.
- \mathbf{W} : torseur cinématique, c'est-à-dire le vecteur composé des vitesses cartésiennes et angulaires.
- τ : vecteur des forces articulaires.
- \mathcal{F} : torseur des forces externes appliquées sur l'organe terminal. Les moments sont calculés en général par rapport au point C .

Pour alléger la présentation on omettra de faire figurer les indices lorsque le contexte ne sera pas ambigu.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Les systèmes mécaniques permettant le déplacement d'un solide (que l'on appellera *l'organe terminal*) par rapport à une base fixe joue un rôle très important dans de multiples applications. Un solide dans l'espace peut effectuer différents types de déplacement, des translations et des rotations que l'on appelle ses *degrés de liberté*. Pour un solide dans l'espace le nombre total de degrés de liberté ne peut excéder 6 (par exemple 3 translations selon des axes perpendiculaires entre eux et 3 rotations autour de ces axes). On repère la position et l'orientation de l'organe terminal (ce que l'on qualifiera de *posture*) par ses *coordonnées généralisées* qui sont généralement les coordonnées d'un point particulier de l'organe terminal et des angles qui définissent son orientation. Dès que l'on peut commander plusieurs degrés de liberté de l'organe terminal par l'intermédiaire d'un système mécanique celui-ci peut être qualifié de *robot*.

On a assisté ces dernières années à un fort développement dans le monde industriel de l'utilisation des robots, principalement en raison de leur flexibilité. Toutefois l'architecture mécanique des robots les plus couramment utilisés s'avère peu appropriée pour certaines tâches. C'est pourquoi depuis quelques années d'autres types d'architecture ont été étudiés et commencent à trouver leur place dans le monde industriel. C'est en particulier le cas des manipulateurs parallèles que nous allons définir dans ce chapitre.

1.1. Caractéristiques des robots classiques

La majorité des manipulateurs existants à l'heure actuelle présente un caractère anthropomorphique marqué avec une forte ressemblance à un bras humain. Il s'agit en fait d'une succession de solides, chacun étant relié à son prédécesseur et à son successeur par une *articulation* à un degré de liberté (*articulation rotoïde* permettant la rotation d'un solide autour d'un axe ou *articulation prismatique* permettant la translation d'un solide par rapport à un autre), architecture que l'on qualifie de *robot série*, par analogie avec les systèmes électriques. Des éléments moteurs, les *actionneurs*, permettent de modifier la valeur du degré de liberté de certaines articulations.

On parle ainsi par exemple de *robots série sphériques* pour les systèmes où une succession de segments conduit de la base à l'organe terminal, chaque segment étant relié à son successeur par une articulation de type rotoïde (si chacune des n articulations est motorisée on pourra alors en général commander n degrés de liberté de l'organe terminal). Un exemple d'architecture de robot série est le «Scara», permettant de commander 4 degrés de liberté de l'organe terminal (figure ??). Les tables ?? et ?? présentent quelques car-

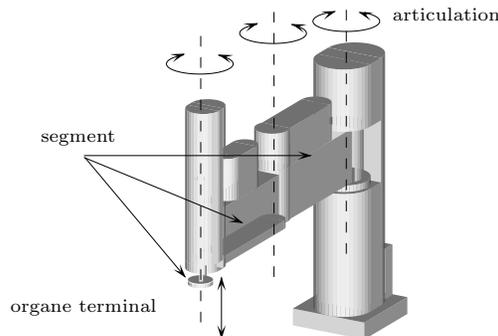


Figure 1.1: Le robot «Scara».

actéristiques générales des robots d'architecture de type Scara et de robots industriels sphériques à 6 degrés de liberté.

Robot	d.d.l.	masse	charge	Répétabilité	charge masse
Adept 3	4	205	25	$\pm 0,025$	0,122
Epson H803N-MZ	4	96	8	$\pm 0,02$	0,0833
GMF A-600	4	120	6	$\pm 0,013$	0,05
Pana Robo HR50	4	52	5	$\pm 0,025$	0,096
Puma RSS4	4	130	5	$\pm 0,05$	0,0384
Sankyo Skilam SR-3C	4	120	6	$\pm 0,05$	0,05
Sony SRX-3CH	4	64	2	$\pm 0,05$	0,0625

Tableau 1.1: Caractéristiques de manipulateurs industriels (type SCARA, masse en kg, répétabilité en mm, selon les notices des constructeurs).

Robot	masse	charge	Répétabilité	$\frac{\text{charge}}{\text{masse}}$
Acma SR 400	430	10	$\pm 0,1$	0,0232
Acma YR500	590	30	$\pm 0,2$	0,0508
ABB IRB L6	145	6	$\pm 0,2$	0,0414
ABB IRB 2000	370	10	$\pm 0,1$	0,027
CM T ³ 646	1500	22	$\pm 0,25$	0,0147
CM T ³ 786	2885	90	$\pm 0,25$	0,0312
GMF Arc Mate	120	5	$\pm 0,2$	0,0417
GMF S 10	200	10	$\pm 0,1$	0,05
Hitachi M6060II	405	6	$\pm 0,2$	0,0148
Hitachi M6100	410	10	$\pm 0,1$	0,0243
Kuka IR 163/65	1700	60	$\pm 0,5$	0,0353
Kuka IR 363/15	290	8	$\pm 0,1$	0,0276
Puma 550	63	4	$\pm 0,1$	0,0634
Puma 762	590	20	$\pm 0,2$	0,0338

Tableau 1.2: *Caractéristiques de manipulateurs industriels (type sphérique, charge et masse en kg, répétabilité en mm, selon les notices des constructeurs).*

Le premier point intéressant, qui apparaît à la lecture de ces tableaux, est la valeur du rapport charge utile/masse du robot. Nous constatons que dans le cas d'un manipulateur sphérique à 6 degrés de liberté, ce rapport n'est pas supérieur à 0,1. Pour une masse transportée de l'ordre de 500 kg, la masse du manipulateur atteindrait alors une valeur approximative de 5 tonnes. Pour les robots de type Scara ce rapport est en général meilleur, en particulier pour les robots dit «à entraînement direct». Mais il n'est jamais supérieur à 0,15 pour les lourdes charges. On obtiendrait donc une masse de 3,33 tonnes pour une charge utile de 500 kg.

Le deuxième point intéressant concerne la précision de positionnement. Dans ce domaine on distingue deux types de valeur: la *précision absolue* qui est l'écart entre la consigne et la position réelle de l'organe terminal et la *répétabilité* qui est l'écart mesurée entre les positions successives de l'organe terminal lorsqu'on lui applique plusieurs fois la même consigne pour des positions de départ différentes. La mesure de précision fournie par les constructeurs est en général la répétabilité, bien meilleure que la précision absolue, qui est pourtant la quantité intéressante pour l'utilisateur. A la lumière des tableaux on se rend compte que même la répétabilité n'est pas excellente. Quant à la précision absolue elle est conditionnée par divers facteurs: qualité des capteurs internes (proprioceptifs) du manipulateur, jeux des réducteurs, flexions des segments, qualité de la réalisation géométrique (par exemple perpendicularité ou parallélisme des axes de rotation). Il est communément admis que, dans la plupart des cas, la précision absolue d'un robot série est médiocre.

La faible charge transportable et la précision médiocre sont intrinsèquement liées à l'architecture mécanique des manipulateurs existants, en particulier à la disposition en série des segments. Chacun d'entre eux doit supporter, en plus de la charge, le poids des segments suivants : ils sont donc soumis à des forces et des moments de flexion importants, ce qui impose de les rigidifier et, par conséquent, de les alourdir.

La précision de positionnement souffre, bien entendu, des déformations de flexion qui ne sont pas mesurées par les capteurs internes du robot. De plus

l'ampleur du bras de levier fait qu'une petite erreur de mesure sur les capteurs internes des premiers segments entraîne une erreur rapidement importante sur la position de l'organe terminal (pour un bras d'un mètre, une erreur de mesure de 0,06 degré peut entraîner une erreur de 1 mm sur la position de l'organe terminal). De surcroît la présence de réducteur induit un jeu qui joue un rôle très néfaste pour la précision. Le non-respect des contraintes géométriques constitue également une source importante d'erreurs de positionnement. Ainsi un léger défaut de perpendicularité entre les deux premiers axes d'un manipulateur conduira à des erreurs dans tous les mouvements verticaux, qui, vu l'amplitude des déplacements, seront appréciables.

Notons aussi que la disposition successive des segments ainsi que la nécessité de les rigidifier vont faire que la partie mobile du robot sera d'une masse appréciable. En conséquence lors de mouvement à grande vitesse le manipulateur est soumis à des forces perturbatrices (inertie, forces centrifuge et de Coriolis) qui vont rendre complexe la commande du robot.

Mentionnons enfin que le mode de fonctionnement des robots série les rend peu apte à fonctionner à des échelles de taille faibles. En effet leur principe moteur est la force inertielle qui doit dominer les forces de friction. Or cette force inertielle varie avec le carré des longueurs alors que les forces de friction sont beaucoup moins sensibles aux dimensions. Ainsi pour réaliser un micro-robot série il ne suffit pas de diviser les dimensions d'un robot série fonctionnant convenablement par le facteur de taille approprié, puisqu'à partir d'une certaine échelle les forces de friction deviendront prépondérantes.

On voit donc qu'un robot de type série est peu approprié pour des tâches requérant soit la manipulation de charges lourdes soit une bonne précision de positionnement soit enfin un fonctionnement satisfaisant à des échelles de taille différentes.

1.2. Autres types d'architecture

Pour introduire d'autres types d'architecture mécanique pour robot il est nécessaire de présenter quelques notions formelles qui permettront de distinguer des éléments clés pour la caractérisation des robots. Ces éléments sont repris de la thèse de C. Gosselin [123].

Pour chaque segment d'un manipulateur le *degré de connexion* est le nombre de solides attachés à ce segment par des liaisons mécaniques. On définit alors les *chaînes cinématiques simples* comme étant celles dont chaque membre possède un degré de connexion inférieur ou égal à deux. Les manipulateurs série peuvent alors être définis comme des chaînes cinématiques simples dont les segments ont un degré de connexion 2 à l'exception de deux : la base et l'organe terminal. Dans ce cas on parle aussi de *chaînes cinématiques ouvertes*. A l'opposé on parle de *chaîne cinématique fermée* lorsque l'un des segments du robot, différent de la base, possède un degré de connexion supérieur ou égal à

3. Notons que ces éléments apparaissent clairement si l'on représente la chaîne cinématique à l'aide d'un graphe (*graphe de connexion* [49, 341] ou *graphe d'agencement* [356]) qui est plus lisible qu'une description de la mécanique. Une autre notion importante en théorie des mécanismes est la notion de *mobilité* qui est tout simplement le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal et sur laquelle nous reviendrons ultérieurement.

Pour résoudre par la mécanique une partie des problèmes qui sont apparus avec les manipulateurs série une solution possible est de distribuer la charge sur des segments c'est-à-dire de relier l'organe terminal du robot au sol par un ensemble de chaînes qui, en conséquence, ne supportent qu'une fraction de la charge totale. L'utilisation de chaîne cinématique fermée pour les manipulateurs paraît donc digne d'intérêt et cette voie a d'ailleurs été explorée bien avant que l'on emploie le terme de robot. Certains problèmes théoriques liés à ce type de structure ont été abordés dès 1645 par Christopher Wren, puis en 1813 par Cauchy [46], en 1867 par Lebesgue [242] et en 1897 par Bricard [45]. Un problème théorique central, les déplacements sphériques, a même fait l'objet au début des années 1900 d'un concours, le prix Vaillant, organisé par l'Académie des Sciences et attribué conjointement à Borel [40] et à Bricard [44].

Du point de vue pratique un ingénieur écossais du nom de Gough [142] a établi en 1947 les principes de base d'un mécanisme en chaîne cinématique fermée (figure ??) permettant de positionner et d'orienter une plate-forme mobile dans le but de tester l'usure de pneumatiques, machine dont il a construit un prototype en 1955 [143]. Dans cette structure l'élément mobile est un plateau hexagonal dont chacun des sommets est connecté par une rotule à un segment. L'autre extrémité du segment est relié à la base par un joint de Cardan. Un vérin permet de modifier la longueur totale du segment. Ce mécanisme est donc une chaîne cinématique fermée, motorisée par 6 actionneurs linéaires.

Nous reviendrons en détail sur le mode de fonctionnement de ce type de mécanisme mais admettons, pour le moment, que les actionneurs permettent de commander les 6 degrés de liberté de la plate-forme mobile. Nous constatons immédiatement l'intérêt que représente cette structure pour ce qui concerne le rapport charge utile/masse. En effet, lorsque la structure occupe sa position centrale, les actionneurs supportent approximativement seulement le sixième de la charge utile. De plus les sollicitations en flexion sur les segments sont réduites puisque les articulations leur imposent uniquement des contraintes de traction-compression.

Ces deux facteurs permettent de diminuer la masse de la structure mobile en permettant l'usage d'actionneurs de plus faible puissance et en autorisant l'utilisation de segments de plus faible dimension. L'emploi d'actionneurs à déplacement linéaire est intéressant dans la mesure où l'on dispose d'éléments de ce type possédant de très bonnes caractéristiques de masse, de vitesse, d'accélération et d'amplitude de mouvement (vérins hydrauliques par exemple). Intuitivement on imagine également que la précision de positionnement est

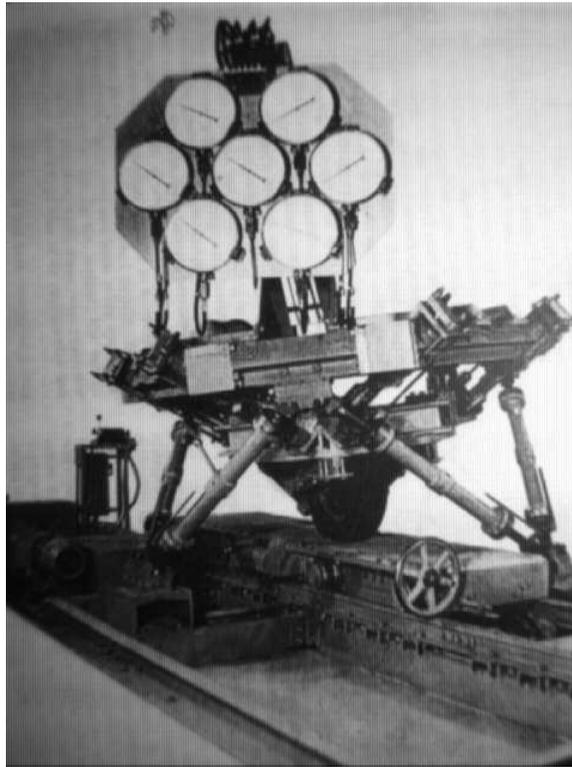


Figure 1.2: *La machine de Gough (1947). Le plateau mobile, auquel est liée un pneumatique, est relié au sol par 6 segments de longueur variable. A une extrémité de chaque segment se trouve un joint de Cardan et à l'autre une rotule. En faisant varier la longueur des segments on modifie la position et l'orientation de la plate-forme mobile, donc de la roue. Cette roue est entraînée par un tapis roulant et l'on peut ainsi tester l'usure du pneumatique dans différentes conditions (d'après Gough [142]).*

bonne ceci pour deux raisons:

- les déformations des segments dues à la flexion (donc non mesurables) sont réduites.
- les erreurs sur les capteurs proprioceptifs (mesure des longueurs des segments) n'affecte l'erreur sur la position de la plate-forme que de manière faible. Par exemple si tous les capteurs ont la même erreur le calcul de la position de la plate-forme ne donnera qu'une erreur sur l'axe vertical, sensiblement de même amplitude que l'erreur sur les capteurs.

L'utilisation de ce type de mécanisme n'a en fait connu une expansion remarquable qu'à partir de la construction des premiers *simulateurs de vol*. Dans les années soixante le développement de l'industrie aéronautique, l'accroissement des coûts de formation des pilotes et la nécessité de tester hors-vol les nouveaux appareils ont motivé une recherche sur les mécanismes à plusieurs degrés de liberté susceptibles d'animer une plate-forme lourdement instrumentée (par exemple avec un cockpit complet d'avion) avec une dynamique élevée. La masse du manipulateur est importante pour la dynamique car les effets perturbateurs (force de Coriolis, inertie. . .) sont d'autant plus réduits que la masse de l'équipage mobile est faible. Toutes ces contraintes rendent difficile l'utilisation des manipulateurs série possédant en général une faible bande passante.

En 1965 Stewart [418] a proposé d'utiliser pour les simulateurs un mécanisme présenté en figure ???. Dans cette structure l'élément mobile est

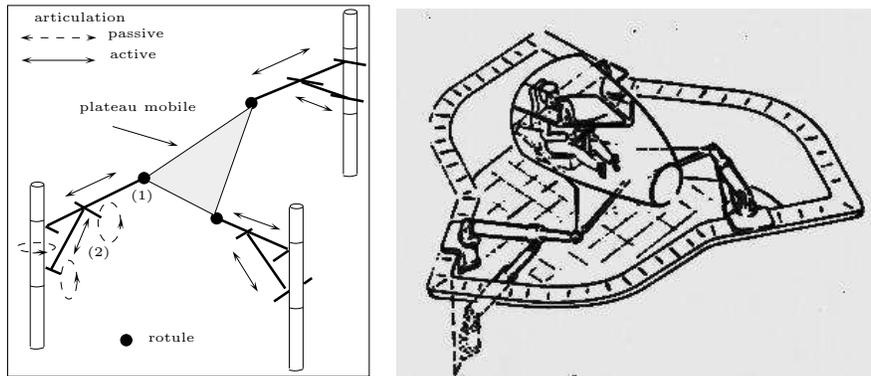


Figure 1.3: Le mécanisme de Stewart (1965). Les déplacements du plateau mobile sont obtenus en modifiant la longueur de six segments articulés.

un plateau triangulaire dont chacun des sommets est connecté par une rotule à un sous-mécanisme constitué de deux vérins (1,2), disposés eux aussi de façon triangulaire. Une extrémité de chacun de ces vérins est liée par une articulation rotoïde à un segment d'axe vertical qui peut tourner autour de son axe.

L'autre extrémité d'un des deux vérins est solidaire de la rotule du plateau mobile, alors que celle de l'autre vérin est liée par une articulation rotoïde au corps de son homologue. Dans la toute dernière section de son papier Stewart mentionne la possibilité de confondre les extrémités des vérins en un point lié à la plate-forme, retrouvant ainsi le mécanisme de Gough.

Il se trouve que l'un des commentateurs du papier de Stewart était Gough qui rappelait l'existence de sa structure, dont l'intérêt n'avait d'ailleurs pas échappé aux autres commentateurs de la publication de Stewart qui proposaient même de l'utiliser pour des plate-formes de forage ou des fraiseuses (ce qui constitue une excellente vision de l'avenir comme on le verra). Le mécanisme de Stewart n'a, à notre connaissance, pas reçu d'application mais l'emploi de celle de Gough est, au contraire, très fréquente. Mais par une ironie de l'histoire le mécanisme bien antérieur de Gough est le plus souvent connu sous le nom de plate-forme de Stewart. . .

Des simulateurs de vol de toutes sortes utilisent l'architecture de la plate-forme de Gough [26, 218, 346]. Mais elle a trouvé un emploi dans bien d'autres simulateurs parfois fort surprenants : conduite d'engin [53], comportement d'engins spatiaux [147], voyage au sein de molécule [267], simulateur équestre de l'École Nationale d'Équitation ou le cinéma Cinaxe de La Villette. Nous reviendrons sur quelques unes de ces applications ultérieurement.

1.3. Les besoins en robotique

L'utilisation des positionneurs dans les simulateurs impose des contraintes spécifiques (que l'on pourra trouver dans [280]) qui sont toutefois loin de couvrir l'ensemble de celles que l'on peut imposer à un mécanisme de positionnement. Ainsi les besoins en robotique sont différents.

Nous pouvons avoir par exemple une contrainte de précision, qui est une exigence majeure pour beaucoup de tâches (par exemple l'assemblage), étant entendu qu'il ne s'agit pas de répétabilité mais bien de précision de positionnement absolu. Dans ce type de tâche, l'amplitude des mouvements à effectuer avec une grande précision reste très faible : de l'ordre de quelques millimètres au plus pour l'assemblage par exemple.

La dynamique est aussi importante, en particulier lorsque le manipulateur est appelé à entrer au contact de l'environnement. Citons, comme exemple de telles tâches dans l'industrie manufacturière, la réalisation d'opérations mécaniques comme l'ébavurage, le polissage ou la mise en forme de matériaux. La dynamique est aussi très importante pour les mécanismes exécutant des mouvements très rapides avec une grande précision (par exemple pour les opérations de transfert), qui ne peuvent être obtenue qu'en jouant sur la légèreté de l'équipage mobile. On parlera alors de *manipulateurs rapides*.

Un autre point important est la notion de *complaisance*¹. D'une manière générale, si l'on soumet l'organe terminal d'un manipulateur à l'arrêt à un torseur d'efforts, sa position subit de légères variations : c'est le phénomène de complaisance. Pour un manipulateur série ces variations de position sont dues aux flexions des segments, aux jeux dans les réducteurs et sont donc non observables par les capteurs internes du robot : il s'agit donc d'une *complaisance passive*, la commande du robot n'intervenant pas. Dans de nombreuses tâches (par exemple dans le domaine de la machine-outil) cette complaisance est nuisible surtout si l'on ne peut pas la mesurer, ce qui est le cas pour les robots série. La raideur des chaînes cinématiques fermées est en général beaucoup plus élevée que celle des chaînes ouvertes et les déformations dues à la complaisance passive pourront souvent être mesurées. On pourra même rajouter volontairement des élasticités et faire agir les asservissements des actionneurs pour obtenir un modèle de comportement fixé (par exemple être d'une grande raideur selon une certaine direction et être «souple» dans les deux directions orthogonales à celle-ci) : ce type de commande est appelé *complaisance active* dans la mesure où elle fait intervenir activement les asservissements du manipulateur.

Nous allons maintenant définir plus formellement le type de mécanismes que nous allons étudier au long de cet ouvrage.

1.4. Définition des manipulateurs parallèles

1.4.1. Manipulateurs parallèles généralisés

Nous définissons tout d'abord les *manipulateurs parallèles généralisés* comme suit :

Un manipulateur parallèle généralisé est un mécanisme en chaîne cinématique fermée dont l'organe terminal est relié à la base par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes.

1.4.2. Manipulateurs parallèles

La définition des manipulateurs parallèles généralisées est très ouverte : elle inclut par exemple les *mécanismes redondants* dont le nombre d'actionneurs est supérieur au nombre de degrés de liberté commandés de l'organe terminal ainsi que les manipulateurs travaillant en coopération.

Dans cet ouvrage nous nous intéresserons plutôt aux mécanismes ayant les caractéristiques suivantes :

¹Nous avons choisi de traduire le terme anglo-saxon «compliance» par le mot de «complaisance», qui est parfois utilisé en mécanique pour désigner l'inverse de la raideur. Cette traduction est recommandée par l'ISO.

- le nombre de chaînes supportant l'organe terminal est au moins égal à deux. Chacune de ces chaînes contient au moins un actionneur simple (à un degré de liberté). Un capteur adéquat permet de mesurer la valeur des *variables articulaires* associées à la motorisation (angle de rotation des moteurs ou déplacement linéaire des vérins).
- le nombre d'actionneurs est le même que le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal.
- la mobilité du manipulateur est nulle lorsque les actionneurs sont bloqués.

L'intérêt que nous portons à ce type de mécanisme se justifie par les points suivants:

- un minimum de deux chaînes permet de bénéficier de l'effet de parallélisme pour la charge transportée.
- le nombre d'actionneurs est minimal.
- le nombre de capteurs nécessaire à la commande en boucle fermée du mécanisme est minimal.
- lorsque les actionneurs sont bloqués le manipulateur reste dans sa position (aspect sécuritaire pour certaines applications comme la robotique médicale).

Nous adopterons donc la définition suivante des manipulateurs parallèles:

Un manipulateur parallèle est constitué d'un organe terminal à n degrés de liberté et d'une base fixe, reliés entre eux par au moins deux chaînes cinématiques indépendantes, la motorisation s'effectuant par n actionneurs simples.

1.4.3. Manipulateurs pleinement parallèles

Les manipulateurs parallèles dont le nombre de chaînes est strictement égal au nombre de degrés de liberté de l'organe terminal sont appelés *manipulateurs pleinement parallèles* [123, 356].

Gosselin caractérise les manipulateurs pleinement parallèles par la relation:

$$p(n - 6) = -6 \quad (1.1)$$

où p est le nombre de chaînes et n le nombre de solides dans une chaîne.

Earl [98] a aussi défini un indice de parallélisme d par la formule:

$$d = \frac{k}{l - 1} \quad (1.2)$$

où k est le nombre de boucles indépendantes (c'est-à-dire la différence entre le nombre d'articulations à un degré de liberté et le nombre de corps mobiles) et l le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal. Cet indice est compris entre 0 et 1 et vaudra 1 pour un robot pleinement parallèle et, à l'opposé, 0 pour un robot série. Notons toutefois que dans certains cas un manipulateur non pleinement parallèle peut avoir un indice de parallélisme de 1 (voir le chapitre « Architecture »).

1.4.4. Analyse des manipulateurs pleinement parallèles

La définition des manipulateurs pleinement parallèles va nous permettre d'en caractériser les chaînes. Nous allons distinguer deux cas : les robots plans (trois degrés de liberté dans le plan) puis les robots dont les déplacements ne se font pas dans un plan.

1.4.4.1. Robots plans

Un manipulateur pleinement parallèle plan va avoir un organe terminal à trois degrés de liberté² : deux translations et une orientation. En conséquence trois chaînes supportent l'organe terminal. Les chaînes seront attachées à l'organe terminal en trois points : on peut donc considérer que génériquement l'organe terminal est un triangle.

Pour caractériser les chaînes on va utiliser le fait que la mobilité est nulle lorsque les actionneurs sont bloqués et qu'elle est de 3 en rajoutant le degré de liberté des actionneurs.

Un critère général de mobilité est délicat à définir dans le cas des chaînes cinématiques fermées comme l'ont fait remarquer Hunt [178] et Lerbet [253], les formules de mobilité classiques pouvant conduire à ignorer des degrés de liberté. On utilise toutefois de manière générale la formule de Grübler qui donne la mobilité m d'un mécanisme plan par :

$$m = 3(l - n - 1) + \sum_{i=1}^n d_i \quad (1.3)$$

où l est le nombre total de solides du mécanisme (incluant la base), n le nombre total d'articulations et d_i le nombre de degrés de liberté de l'articulation i .

Pour simplifier on suppose que les trois chaînes sont identiques. Si n_1 est le nombre de solide d'une chaîne il y a un minimum de $n_1 + 1$ articulation à un degré de liberté les connectant, dont une sera actionnée. On a donc :

$$l = 2 + 3n_1 \quad n = 3(n_1 + 1) \quad \sum_{i=1}^n d_i = 3(n_1 + 1)$$

²Les robots plans à moins de 3 degrés de liberté seront seulement brièvement mentionnés dans cet ouvrage

on doit donc avoir:

$$3 = -6 + 3(n_1 + 1)$$

soit $n_1 = 2$. Une chaîne est donc constituée de deux solides reliés par une articulation. Chacun de ces solides est relié par une articulation soit à la base, soit à l'organe terminal. Nous aurons donc trois articulations indépendantes dans la chaîne.

Notons que si l'articulation motorisée est bloquée on a:

$$l = 5 \quad n = 6 \quad \sum_{i=1}^n d_i = 6$$

En conséquence la mobilité du mécanisme est bien nulle.

1.4.4.2. Cas général

On s'intéresse aux robots pleinement parallèles à m degrés de liberté qui ont donc m chaînes supportant l'organe terminal, chaînes que l'on va supposer identiques. La formule de Grübler pour les mécanismes tridimensionnels s'écrit:

$$m = 6(l - n - 1) + \sum_{i=1}^n d_i \quad (1.4)$$

L'utilisation de cette formule purement combinatoire peut parfois conduire à des erreurs car elle ne prend pas en compte les relations géométriques entre les articulations, les plus célèbres contre-exemples étant le joint de Cardan, les mécanismes de Bennet et de Goldberg. Diverses méthodes ont été proposées pour prendre en compte la géométrie comme celle d'Angeles [11] ou de Hervé [166] mais sans qu'elles soient d'application tout à fait générale. Toutefois la formule de Grübler suffira pour une analyse préliminaire.

Si n_1 est le nombre de corps de chaque chaîne et n_2 le nombre d'articulations à un degré de liberté de chaque chaîne on a:

$$m = 6 + 6 m n_1 - 5 m n_2$$

On recherche les solutions entières de cette équation pour différentes valeurs de la mobilité, solution avec n_2 minimal (la réduction du nombre d'articulations permet de diminuer les erreurs sur le positionnement de l'organe terminal). On n'obtient des solutions que pour les triplets (m, n_1, n_2) suivant: (2, 3, 4), (3, 4, 5), (6, 5, 6).

On peut aussi facilement montrer que dans ces cas la mobilité du mécanisme devient nulle lorsque l'actionneur de chaque chaîne est bloqué. On remarque donc qu'il ne sera pas possible de construire des manipulateurs pleinement parallèles à chaînes identiques si la mobilité désirée est 4 ou 5. Dans ce cas il sera nécessaire d'introduire des chaînes de type différent.

1.5. Plan de l'ouvrage

Cet ouvrage s'articule autour de différents problèmes qui se posent pour la conception et l'utilisation des manipulateurs parallèles.

Dans le premier chapitre, «**Architecture**» nous exposerons les différentes architectures mécaniques possibles pour un manipulateur parallèle, ce que nous illustrerons en décrivant les prototypes présentés dans la littérature. On y présentera également des exemples typiques d'applications.

Dans le chapitre suivant, «**Modèle géométrique inverse et Jacobiennes**» nous établirons comment la donnée de la position de l'organe terminal permet de calculer les variables de commande. Nous établirons ensuite des relations similaires entre les dérivées par rapport au temps de ces variables, puis on s'intéressera au problème du calibrage des manipulateurs parallèles.

On étudiera la relation permettant de passer des variables de commande à la posture de l'organe terminal dans le chapitre «**Modèle géométrique direct**».

Puis dans le chapitre «**Configurations singulières**» on étudiera des postures spéciales des manipulateurs parallèles où la rigidité structurale inhérente à l'architecture mécanique des manipulateurs parallèles est perdue.

Le chapitre «**Espace de travail**» sera consacré au calcul des bornes sur les déplacements possibles d'un manipulateur parallèle lorsqu'il est soumis à des limitations sur les variables de commande et à des contraintes sur ses articulations. On s'intéressera aussi dans ce chapitre à la planification de trajectoires à l'intérieur de l'espace de travail.

Dans le chapitre «**Cinématique**» nous établirons comment la donnée de la vitesse de l'organe terminal permet de calculer les vitesses des actionneurs, ainsi que la relation inverse. On fera de même pour les accélérations. Puis dans le chapitre «**Statique**» on explicitera les relations entre les forces exercées sur l'organe terminal et les forces exercées par les actionneurs ainsi que la relation inverse. Dans ce même chapitre on s'intéressera à la raideur des manipulateurs parallèles.

Le chapitre «**Dynamique**» aura pour but de montrer comment calculer les forces que doivent exercer les actionneurs pour que l'organe terminal atteigne une vitesse et une accélération données. La relation inverse sera aussi étudiée. Un ouvrage sur les mécanismes ne serait pas complet sans un chapitre sur la conception optimale et la synthèse qui seront traités dans le chapitre «**Conception**». Les solutions des exercices sont finalement données dans le chapitre «**Solutions**».

Nous avons volontairement omis un chapitre, celui consacré à la commande : la diversité des approches, très souvent liées à un manipulateur ou une application particulière, nous ont imposé de disséminer les considérations sur la commande dans l'ensemble des chapitres.

Dans les différents chapitres seront indiqués des temps de calcul de diverses

caractéristiques des manipulateurs parallèles : ces temps ont été établis sur un SUN 4 de type IPX 4/50 avec 40 Mo de mémoire.

1.6. Exercices

Exercice 1.1: Montrer que la mobilité des robots pleinement parallèles spatiaux à chaînes identiques est nulle lorsque les actionneurs de chaque chaînes sont bloqués.

Exercice 1.2: Montrer qu'il n'existe pas de robots pleinement parallèles à chaînes identiques ayant une mobilité de 4 ou 5 en utilisant la formule de Gosselin (équation ??).

Table des matières

Chapitre 2

Architectures mécaniques

Dans ce chapitre nous présentons une énumération relativement exhaustive des architectures mécaniques pour manipulateurs parallèles décrit dans la littérature¹. Elle est ordonnée par nombre de degrés de liberté croissant (de 2 à 6). Des principes généraux pour la synthèse seront introduits.

Des exemples d'utilisation des manipulateurs parallèles dans des domaines applicatifs très divers sont présentés. Le type de manipulateur parallèle qui a été choisi plus spécialement comme sujet d'étude est introduit.

2.1. Introduction

Suite aux déficiences constatées des robots séries certains chercheurs se sont penchés sur la création de nouvelles structures de robot. Les précurseurs dans ce domaine ont été Minsky [307] en 1972 et Hunt [178] en 1978, qui proposaient des structures parallèles. En 1983, Earl [98] a tenté de définir une méthode systématique pour la construction d'architectures différentes des robots série. Sa méthode reste cependant très intuitive même si certains concepts d'architecture qu'il propose vont se retrouver dans les manipulateurs que nous examinerons. Plus récemment des approches systématiques plus rigoureuses ont été proposées par Hervé [168] à partir des générateurs des groupes des déplacements, par Danescu [77] à partir de représentation binaire des articulations et de la définition d'opérations de composition sur ces représentations et par Yufeng [473] qui, à partir de formules de mobilité, a pu

¹Actualisée en http://www.inria.fr/coprin/personnel/merlet/Archi/archi_robot.html

synthétiser 225 structures de robots à 6 degrés de liberté avec les actionneurs sur la base.

Nous avons choisi dans ce chapitre de présenter la conception des manipulateurs parallèles en examinant tout d'abord le cas des robots plans puis en généralisant au cas des robots à déplacement dans l'espace.

2.2. Les robots plans

Par convention on note R les articulations rotoïde et par P les articulations prismatiques. Les articulations motorisées sont soulignées.

2.2.1. Architecture des robots à 2 degrés de liberté

Nous nous intéressons ici aux manipulateurs plans à 2 degrés de liberté en translation. Nous ne considérerons que les robots constitués d'articulation de type rotoïde et prismatique. La combinatoire des architectures possibles a été étudiée par McCloy [284] qui a montré qu'il pouvait y avoir 20 architectures différentes. Ce nombre se réduit à 6 si l'on suppose que les actionneurs sont attachés au sol, qu'il n'y a pas d'articulation prismatique passive et qu'aucun actionneur ne supporte le poids d'un autre actionneur. Les combinaisons se réduisent alors à \underline{RPRPR} , \underline{RRRPR} , \underline{RPRRP} , \underline{RRRRR} , \underline{RRRRP} , \underline{PRRRP} . Ces architectures sont présentées en figure ??.

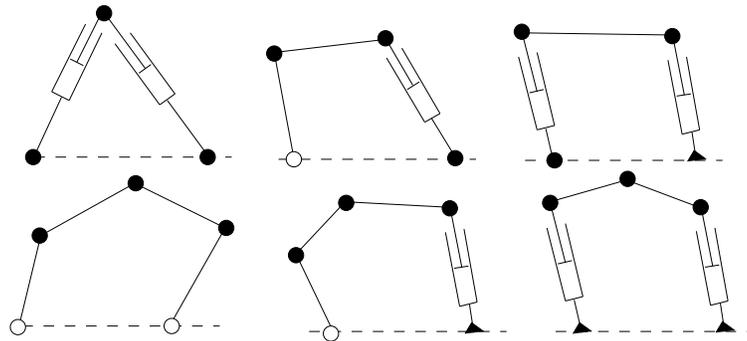


Figure 2.1: Les robots plans à deux degrés de liberté (d'après McCloy [284]). Les articulations rotoïdes sont les cercles blancs pour celles actionnées et noirs pour les passives.

chitectures plus exotiques comme le double tétraèdre de Zsombor-Murray [100] (figure ??).

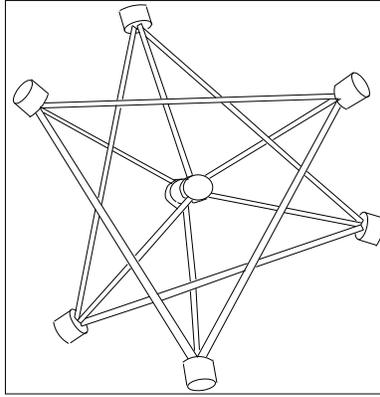


Figure 2.2: *Le double tétraèdre de Zsombor-Murray. Les deux tétraèdres sont imbriqués et les arêtes en contact de chacun d'entre eux peuvent glisser l'une sur l'autre (d'après Zsombor-Murray [100]).*

2.2.2. Architecture des robots à 3 degrés de liberté

Dans le plan nous considérons une plate-forme mobile dont on veut pouvoir commander les trois degrés de liberté : les deux translations selon les axes x, y d'un repère de référence et l'orientation θ autour de l'axe z perpendiculaire au plan. Nous recherchons une structure de robot pleinement parallèle, donc possédant trois chaînes cinématiques indépendantes motorisées par 3 actionneurs conformément à la définition que nous avons donnée.

Chacune de ces chaînes devant être liées à la fois au sol et à la plate-forme mobile nous aurons donc trois points d'attache au sol et sur la plate-forme mobile. On peut donc considérer sans perte de généralité une plate-forme mobile triangulaire. Nous avons vu dans le chapitre précédent que sous ces conditions chacune des chaînes est constituée de deux solides reliés par une articulation et qu'elle a un total de trois articulations.

On peut décrire une chaîne par la séquence de ces trois articulations en partant de la base. On aura comme possibilité pour les chaînes les séquences suivantes : $RRR, RPR, RRP, RPP, PRR, PPR, PRP, PPP$ (figure ??). Il faut cependant rappeler que les articulations doivent être indépendantes, ce qui exclu la séquence PPP .

On peut noter que par simple échange de la base et du plateau mobile les robots de type RRP sont équivalents aux PRR et les RPP équivalents au PPR . Nous n'avons volontairement pas spécifié l'articulation motorisée qui peut être indifféremment l'une des trois. On évitera cependant en général de placer la motorisation sur l'organe terminal pour alléger l'équipage mobile. Il faut aussi remarquer qu'il est tout à fait possible de concevoir des robots dont les chaînes sont de nature différente.

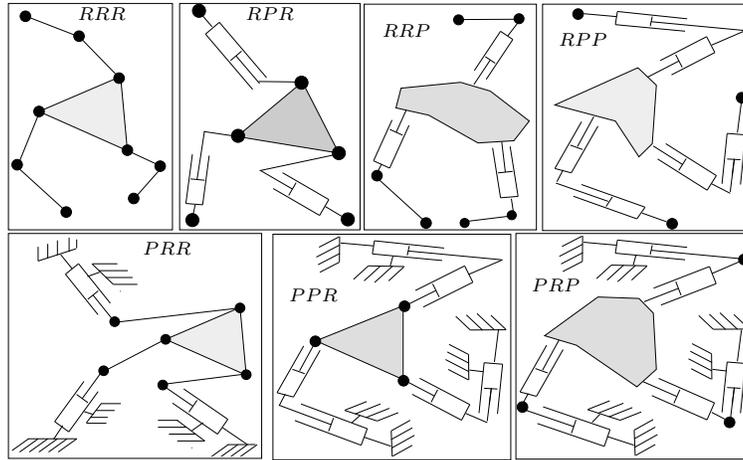


Figure 2.3: Les différents robots pleinement parallèles plans à 3 degrés de liberté et chaînes identiques.

Tous ces manipulateurs n'ont pas fait l'objet d'une étude. Les robots 3- \underline{RRR} ont été mentionnés par Rooney [386] et étudié sous le nom de «Crawdad» à l'Université d'Oklahoma [428]. Une étude complète de ces robots a été réalisée à l'Université McGill de Montréal [123, 268] et cette architecture a été mentionnée par Hunt [180]. Shirkhodaie [406] s'est aussi intéressé à ce mécanisme et à sa synthèse en montrant que l'on pouvait trouver la géométrie du manipulateur en précisant jusqu'à 17 points de passage (position de l'organe terminal et variables articulaires correspondantes).

Les robots de type 3- \underline{RPR} ont été étudiées dans [294]. Le remplacement des chaînes \underline{RPR} par des câbles a été étudié par Ming [305] et Higuchi [170], qui se sont aussi intéressé à la conception et à la commande de ce type de robot parallèle. Les robots de type 3- \underline{PRR} ont été mentionnés par Hunt [179] et certaines de leurs caractéristiques ont été étudiées dans [139] et [294].

Daniali et Zsombor-Murray [78] propose un manipulateur de type 3- \underline{PRP} dont un triangle constitue la base fixe et la plate-forme mobile est un autre triangle (figure ??). La base et la plate-forme sont liées en trois points R_i qui peuvent coulisser chacun le long d'une des arêtes des triangles et un pivot en R_i permet à la plate-forme de tourner. Trois actionneurs linéaires permettent d'ajuster les distances ρ_i entre les points R_i et les sommets du triangle de base qui leur sont associés. Notons aussi la possibilité mentionnée par Lösch [265] de construire des robots plans redondants à partir des chaînes normales d'Assur.

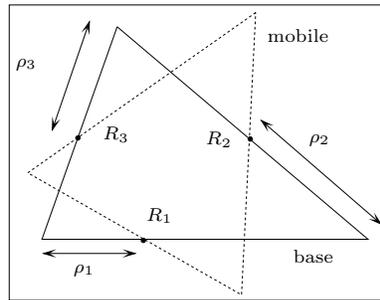


Figure 2.4: Le robot plan de Daniali. En commandant les longueurs ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 on peut ajuster la position du triangle mobile par rapport au triangle de base (d'après Daniali [78]).

2.3. Les robots à mouvements spatiaux

2.3.1. Les articulations

Les articulations les plus utilisées pour les manipulateurs parallèles sont, par degrés de liberté croissant, les articulations rotoïdes, prismatiques puis les joints de Cardan et les rotules. Des articulations de ce type avec des jeux extrêmement réduit sont en effet disponibles commercialement à moindre coût. Il subsiste toutefois un problème avec les rotules dont les modèles courants ne permettent pas la rotation de plusieurs corps autour du même point comme le nécessiteraient certaines architectures. Diverses solutions à ce problème ont été proposées. Hamlin [151] présente une articulation, dite *CMS*, permettant la rotation autour d'un point d'un nombre quelconque de segments. Le CMS utilise des treillis articulés pour permettre la rotation de plusieurs segments autour d'un même point (figure ??). Zanganeh [478] a aussi proposé l'utilisation d'articulation de Clevis pour la connexion d'un nombre élevé de segments alors que Bernier [34] a proposé un système de rotulage triple. Ces solutions restent cependant peu utilisées dans la pratique.

2.3.2. Les actionneurs

Pour les manipulateurs utilisant des actionneurs rotoïdes le consensus s'est fait sur l'utilisation de moteurs électriques. Par contre, pour ceux utilisant des actionneurs linéaires, différentes options sont possibles : pneumatique, électrique, piézo-électrique, hydraulique voire magnétique et magnétostrictif. Les avantages des actionneurs pneumatiques [430, 390] sont la légèreté et une très bonne dynamique mais leur commande s'avère délicate : en effet il semble que les servo-valves nécessaires à la commande et disponibles sur le marché, soient d'une fiabilité douteuse. De plus les phénomènes d'échauffement qui apparaissent après une utilisation prolongée posent des problèmes de commande non

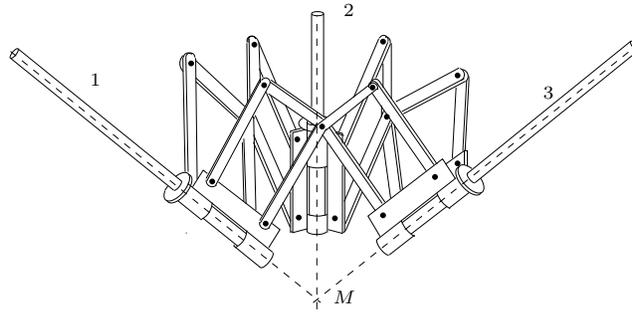


Figure 2.5: *L'articulation CMS. Les segments 1, 2, 3 peuvent tourner indépendamment autour du point M (d'après Hamlin [151]).*

triviaux, exposés par Berthomieu [35] et Maeda [274].

Les actionneurs hydrauliques sont ceux utilisés pour les simulateurs de vol dont la charge nominale est très élevée. Si leur dynamique est très bonne, leur encombrement et leur complexité de mise en œuvre en réduisent l'intérêt pour la robotique ou, au moins, en réservent l'utilisation à des manipulateurs de grande dimension. Un exemple d'utilisation d'actionneur hydraulique et une description des problèmes rencontrés pourront être trouvés dans les papiers de Dubowsky [94], de Masory [279], de Harris [156], de Kosuge [228] et de Salcudean [389].

La commande des actionneurs électriques est relativement facile et a été largement étudiée dans la littérature. Dans les prototypes que nous avons réalisés nous avons d'ailleurs toujours privilégié les actionneurs électriques pour cette raison. Pour les vérins électriques il faut malheureusement remarquer que les composants disponibles sur le marché ne répondent qu'imparfaitement aux besoins au niveau dynamique et encombrement.

Nakamura [320] a proposé l'utilisation d'actionneurs magnétiques : l'intérêt en est une élimination (au moins partielle) des problèmes de frottement mais ils présentent les inconvénients majeurs d'avoir une gamme de déplacements faible, un poids important et conduisent à des manipulateurs à faible rigidité.

Les actionneurs piézo-électriques ont été utilisés avantageusement pour la construction de micro-robots en raison de leur faible encombrement et gamme de déplacement [17, 252, 421]. S'ils présentent l'avantage d'être très puissants ils nécessitent des tensions élevées de fonctionnement (de l'ordre d'une centaine de volts). Les déplacements des actionneurs sont en général mesurés par des jauges de contraintes qui permettent d'obtenir des très bonnes précisions de mesure.

Haynes [162] a aussi proposé des micro-actionneurs utilisant un matériau magnétostrictif, le terfenol-D, dont la longueur varie en fonction du champ magnétique qui lui est appliqué.

2.3.3. Classification des manipulateurs parallèles

Une première approche de classification des manipulateurs parallèles se fait en fonction de leur utilisation. Nous verrons que généralement le volume de l'espace de travail d'un robot parallèle est sensiblement plus faible que celui des robots série. Pour remédier à cet inconvénient deux approches sont possibles :

- développer un manipulateur parallèle indépendant, positionné aux alentours d'un robot série. Celui-ci réalise les mouvements de grande amplitude et, lorsque le besoin s'en fait sentir, travaille en coopération avec le manipulateur parallèle. Dans ce cas le manipulateur parallèle est appelé, par convention, une *main gauche*.
- associer un manipulateur parallèle et un robot série. Le plus souvent on remplace les trois derniers degrés de liberté du robot série par le manipulateur parallèle que l'on l'appelle alors un *poignet actif*, alors que le robot série porte le nom de *robot porteur*.

Ces deux solutions ont chacune des avantages et des inconvénients. Dans le premier cas l'on n'a aucune contrainte de masse et d'encombrement pour la «main gauche» mais les opérations de précision (ou celles nécessitant l'utilisation des caractéristiques propres du manipulateur parallèle) ne peuvent se faire que dans une zone donnée de l'espace de travail du système. Dans le second cas l'on a, au contraire, de fortes contraintes de masse et d'encombrement, mais les caractéristiques du poignet actif peuvent être employées dans tout l'espace de travail du robot porteur. Dans ce cas on parle d'ailleurs souvent de *micro-manipulateur* et de système *macro-micro manipulateur*, dont la conception et la commande ont été étudiées par de nombreux auteurs [35, 216, 376]. Mais dans ces deux types d'utilisation on peut, bien sûr, utiliser la même architecture mécanique de base.

2.3.4. Synthèse d'architectures

Dans cette section les articulations seront notées de la manière suivante :

- H : glissière hélicoïdale P : articulation prismatique
- P_a : parallélogramme R : articulation rotoïde S : rotule

Nous avons vu dans le chapitre «Introduction» comment une analyse combinatoire permettait de caractériser les chaînes des robots pleinement parallèles en fonction du nombre de degrés de liberté désiré. Mais cette analyse ne permet pas de déterminer la nature des articulations pour obtenir un ensemble donné de degrés de liberté. Il n'existe pas à l'heure actuelle de méthode général de synthèse. Dans cette section nous présentons cependant l'approche

de Hervé [168] reposant sur la théorie du groupe des déplacements et qui a conduit à des résultats intéressants. Une autre approche digne d'intérêt est celle proposée par Danescu [77] qui repose sur la théorie des vis. Le principe en est que la combinaison en série ou en parallèle de certains groupes de visseurs conduit à un visseur du groupe et ces opérations de combinaison peuvent être facilement faite sur des représentations binaires des visseurs. Pour créer un mécanisme ayant un mouvement donné il suffit alors d'examiner quelles sont les combinaisons binaires (qui décrivent donc à la fois des articulations et leurs dispositions) qui conduisent aux mouvements désirés.

2.3.4.1. Combinaison et intersection de générateurs

Chaque articulation permet des déplacements qui sont un sous-ensemble du groupe des déplacements. Parfois ce sous-ensemble possède lui-même la structure d'un groupe et constitue un sous-groupe du groupe des déplacements. La *composition* des articulations d'un sous-groupe (c'est-à-dire leur mise en série) peut conduire lui aussi à un sous-groupe. Ainsi le sous-groupe $\{T\}$ des translations dans l'espace peut être obtenu en composant 3 liaisons de type prismatique si certaines contraintes sont respectées sur les axes des liaisons.

Un sous-groupe important est $\{X(\mathbf{w})\}$ qui contient tous les déplacements de translation et de rotation autour de tout axe parallèle à l'axe \mathbf{w} . Ce sous-groupe est obtenu en composant 4 articulations choisies dans les types rotoïde, prismatique, glissière hélicoïdale si certaines contraintes sur les axes des articulations sont respectées. Hervé [168] donne une liste exhaustive des combinaisons possibles de ces articulations permettant l'obtention d'un générateur de $\{X(\mathbf{w})\}$.

L'opération la plus importante pour notre propos est l'*intersection* des liaisons, obtenue par leur mise en parallèle (les liaisons agissent sur le même corps). Des règles simples régissent cette opération ; ainsi un générateur du groupe des déplacements $\{D\}$ avec un générateur du sous-groupe des translations dans l'espace $\{T\}$ donne un générateur de $\{T\}$ alors que l'intersection de deux générateurs de $\{D\}$ donne un élément de $\{D\}$. Cette dernière règle permet de comprendre pourquoi les manipulateurs parallèles à 6 degrés de liberté seront constitués de six liaisons appartenant à $\{D\}$. Un cas d'intersection remarquable est celui de l'intersection de deux générateurs des groupes $\{X(\mathbf{w})\}$ et $\{X(\mathbf{w}')\}$ avec $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}'$ qui donne un générateur du sous-groupe $\{T\}$.

2.3.4.2. Générateur du groupe des déplacements

Les générateurs de ce type vont jouer un rôle important dans les possibilités d'architecture pour les manipulateurs parallèles. Il est donc nécessaire que nous en fassions un inventaire au moins succinct. Nous supposons que seules sont utilisées des articulations simples du type R, P, S .

Les générateurs de $\{D\}$ peuvent alors être classés en quatre grands types $RRPS$, $RPRS$, $PRRS$, $RRRS$ (figure ??) avec des contraintes sur les positions des axes des articulations.

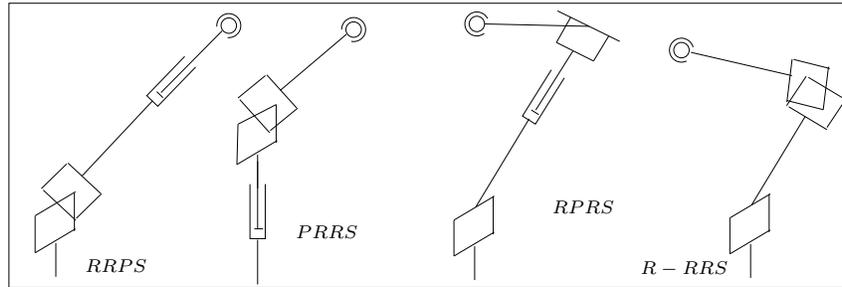


Figure 2.6: Les générateurs du groupe des déplacements $\{D\}$ utilisant des articulations de type R, P, S .

Le type $RRPS$ est constitué d'un joint de Cardan suivi d'une articulation prismatique elle même suivie d'une rotule. Le type $RPRS$ est formé d'une articulation rotoïde sur l'axe de laquelle est montée une articulation prismatique suivie d'une articulation rotoïde suivie de la rotule. Le générateur $PRRS$ se compose d'une articulation prismatique suivie d'un joint de Cardan à l'extrémité duquel se trouve une rotule. Enfin le type $RRRS$ est formé par une articulation rotoïde suivie d'un joint de Cardan sur lequel on monte une rotule.

2.3.5. Manipulateurs à 3 degrés de liberté

2.3.5.1. Manipulateurs pour translations

Les manipulateurs à 3 degrés de liberté en translation présentent un intérêt important pour les opérations de transfert. En conséquence différents prototypes ont été proposés. Chacune des architectures que nous allons présenter utilise le principe de l'intersection de 3 générateurs du sous-groupe $\{X(\mathbf{w})\}$ qui conduit à un mécanisme générateur de $\{T\}$.

Le plus connu des robots à trois degrés de liberté en translation est le «Delta» développé initialement à l'École Polytechnique de Lausanne (EPFL²) par l'équipe du Pr. Clavel [61] et commercialisé par la société Demarex³ (figure ??). Chacune des chaînes cinématiques de ce robot est du type RRP_aR : le moteur, en partie haute, entraîne en rotation selon un axe \mathbf{w} une articulation de type rotoïde. Sur cette articulation se trouve un levier au bout duquel se trouve un autre articulation de type R , d'axe parallèle à \mathbf{w} . Sur celle-ci est fixé un

²http://dmtwww.epfl.ch/imt/misc_robot/parallel_robot.html

³Demarex, CH-1032 Romanel s/Lausanne, Suisse

parallélogramme P_a permettant les translations selon des directions parallèles à \mathbf{w} . Au bout de ce parallélogramme se trouve une articulation de type R , d'axe parallèle à \mathbf{w} , lié à l'organe terminal. Une telle chaîne constitue un générateur de $\{X(\mathbf{w})\}$ et en conséquence l'intersection de trois de ces générateurs, d'axes non parallèles, va permettre d'obtenir un générateur du sous-groupe $\{T\}$ des translations dans l'espace. Notons que que l'on pourrait remplacer la partie actionneur rotatif et levier par un actionneur linéaire comme l'ont proposé Tsai [442] et Clavel [62]. Le manipulateur «Delta» est conçu pour le transfert rapide (trois transferts par seconde) de charges légères (10 à 30 gr) sur un espace de travail de 200 mm. Clavel [62] expose les différentes architectures permettant d'obtenir un robot parallèle à 3 degrés de liberté en translation et cite quelques applications réalisées avec ce robot : manipulation dans l'industrie alimentaire, application dans le domaine médical où le «Delta» est utilisé comme support de microscope. Un robot de ce type, pouvant supporter son propre poids a été proposé par Dunlop [96]. Il faut noter que le «Delta» a comme ancêtre un

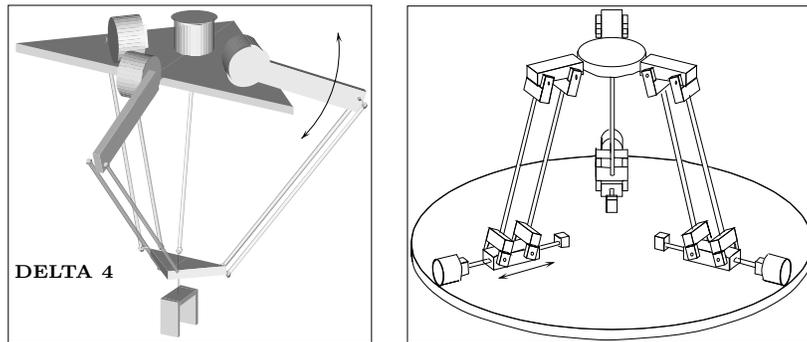


Figure 2.7: Robots à 3 degrés de liberté en translation. A gauche le «Delta» utilisant des actionneurs rotatifs en partie haute (d'après Clavel [61]). A droite le «Star» : les actionneurs rotatifs entraînent l'écrou d'une vis sans fin sur lequel est articulé un parallélogramme. L'autre extrémité du parallélogramme est reliée par une articulation rotoïde à l'organe terminal (d'après Hervé [167]).

mécanisme décrit en 1942 par Pollard [362] destiné à la peinture de véhicule automobile (figure ??). Dans ce mécanisme trois actionneurs rotoïdes orientent trois bras donc chaque extrémité est reliée à la nacelle par trois segments articulés. Parmi les variantes du «Delta» mentionnons le robot proposé par Mitova [308] où les actionneurs sont linéaires, placés après les parallélogrammes qui sont passifs (figure ??). Hervé [167] propose quant à lui d'utiliser plutôt trois chaînes de type RHP_aR , constituant aussi un générateur du sous-groupe $\{X(\mathbf{w})\}$ et a conçu le robot «Star» comme générateur de translation dans l'espace (figure ??). Ce même auteur a aussi proposé le «robot H» [168] qui utilise trois vis lisses à axe parallèle qui entraînent en translation des parallélogrammes (Clavel a aussi envisagé cette possibilité qu'il qualifie de «Delta

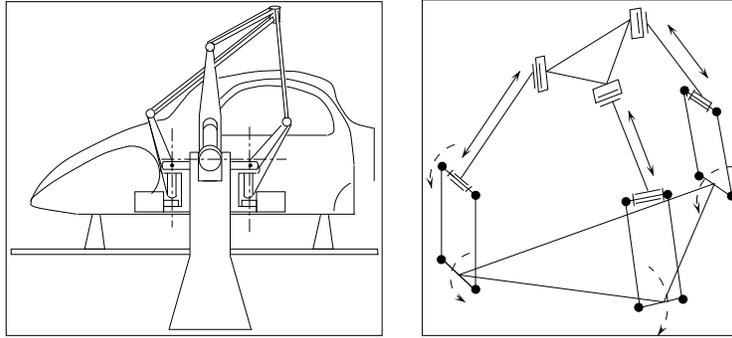


Figure 2.8: A gauche le mécanisme de Pollard (d'après Pollard [362]) et à droite le mécanisme de Mitova (d'après Mitova [308]).

linéaire») ainsi qu'une autre variation, le «prism robot» (figure ??).

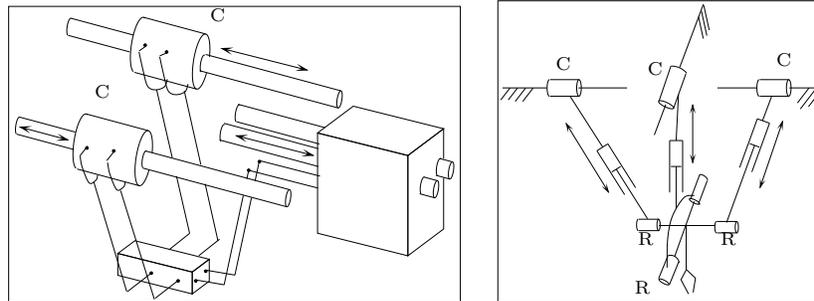


Figure 2.9: Le «robot H» et à droite le «prism robot» (d'après Hervé [168]).

Reboulet [375] propose un mécanisme, le «Speed-R-Man» de structure sensiblement comparable à celui du «Delta» mais où les actionneurs rotatifs sont remplacés par deux actionneurs linéaires agissant sur le même point. Il s'agit donc d'un mécanisme redondant présentant des caractéristiques de vitesse intéressantes. Ce manipulateur a plus spécialement été étudié par Nombrail [332].

Le positionneur proposé par Millies et Kokkinis [223] (figure ??) utilise trois actionneurs rotatifs agissant sur un levier à l'extrémité duquel se trouve un joint de Cardan. L'organe terminal (E) est connecté à une des chaînes par un joint de Cardan et, pour les deux chaînes restantes, par des rotules reliant un levier au joint de Cardan. Les trois articulations sur l'organe terminal ont la propriété d'être alignées. Kokkinis [224] propose une architecture redondante reposant sur le même principe mais avec une motorisation de chacun des axes des joints de Cardan. L'intérêt de la redondance est évidemment d'apporter une amélioration de la manœuvrabilité et la possibilité de diminuer les forces articulaires pour une force externe donnée.

Mianowski [300] fait justement remarquer qu'un générateur du groupe des translations de l'espace peut être réalisé à partir de trois générateurs de $\{D\}$, le groupe des déplacements, si ceux-ci agissent sur le même point. On peut ainsi construire un translateur en faisant agir trois actionneurs linéaires soit sur une triple rotule, soit sur une structure équivalente (figure ??). Le problème de la

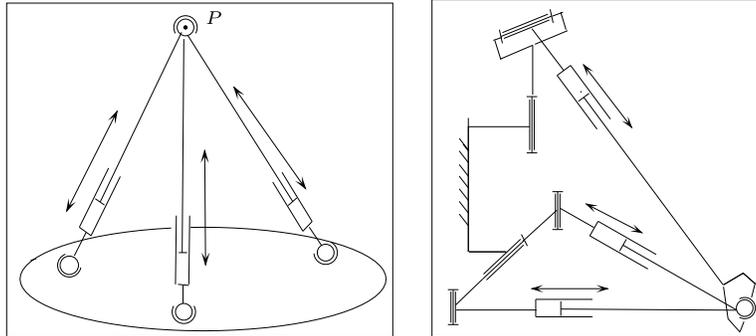


Figure 2.10: *Les prototypes de Mianowski. A gauche trois générateurs de $\{D\}$ agissent directement sur le point à déplacer. A droite deux actionneurs linéaires sont montés en tandem sur un joint de Cardan et agissent sur une double rotule alors qu'un troisième actionneur linéaire monté sur cardan permet de commander le dernier degré de liberté (d'après Mianowski [300]).*

triple rotule a été résolu dans le prototype breveté par Neumann [326]. Dans ce mécanisme, l'organe terminal comporte une tige libre de ses déplacements selon son axe. Cette tige est reliée à la base par un joint de Cardan et trois chaînes de type $RRPS$ agissent sur l'organe terminal (figure ??).

La société Marconi⁴ a conçu le «Tetrabot» (figure ??), un robot hybride série-parallèle, pour l'assemblage de pièces, de grande dimension [97, 440]. Il s'agit en fait d'un positionneur de Neumann couplé à un poignet classique. Sa charge nominale est de 6 kg, pour une vitesse de 1 m/s. Ce manipulateur a une enveloppe de travail assez importante en raison de sa taille (environ deux fois la hauteur d'un homme). Notons que la société Comau a proposé en 1994 le «Tricept HP1», un robot reposant sur le même principe.

Machida [272] propose lui aussi un manipulateur parallèle à trois degrés de liberté en translation. Dans ce robot trois segments avec des actionneurs linéaires commandent les translations alors que trois segments passifs permettent de maintenir l'orientation de l'organe terminal.

Il existe bien sûr des solutions hybrides à ce problème comme celle proposée par Cheng [52] pour le robot qu'il a conçu dans le cadre d'une étude pour le service postal américain UPS. Dans ce robot (figure ??) les translations des

⁴Marconi Research Centre, West Hanningfield road, Great Baddow, Chelmsford, Essex CM2 8HN

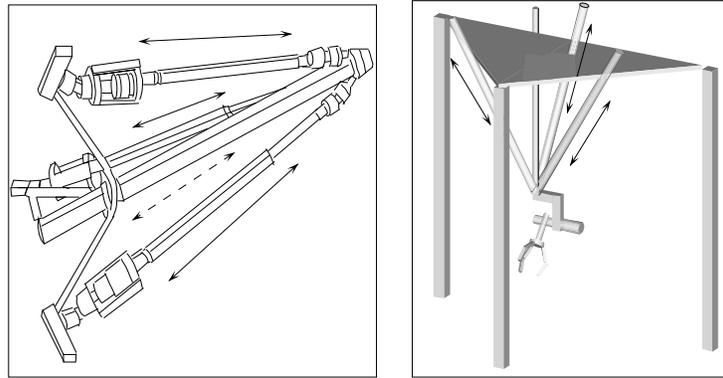


Figure 2.11: *A gauche le prototype de Neumann. Une tige montée sur cardan, de longueur variable, lie l'organe terminal à la base (d'après Neumann [326]). Trois actionneurs linéaires permettent de modifier la position de l'organe terminal. A droite le « Tetrabot » de Marconi à 6 degrés de liberté : les 3 translations sont contrôlées par le mécanisme de Neumann et les 3 orientations par un poignet classique.*

points A_1, A_2 permettent de placer l'organe terminal dans une position quelconque dans un plan alors que l'actionneur 3 permet de changer son élévation.

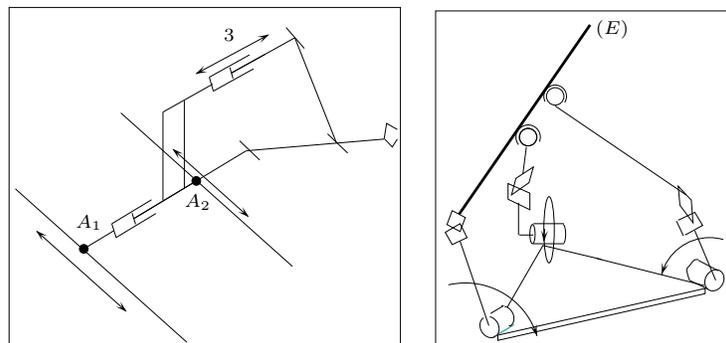


Figure 2.12: *A gauche le mécanisme de translation de Cheng : les translations des points A_1, A_2 permettent de placer l'organe terminal dans une position quelconque dans un plan alors que l'actionneur 3 permet de changer son élévation (d'après Cheng [52]). A droite le positionneur de Millies et Kokkinis : les articulations sur l'organe terminal sont alignées et trois actionneurs rotatifs sont utilisés (d'après Kokkinis [223]).*

2.3.5.2. Manipulateurs pour orientation

Les manipulateurs permettant les trois rotations autour d'un point constituent une alternative intéressante au poignet utilisé classiquement pour les robots série (avec trois articulations rotoïdes à axes concourants).

Une première méthode pour assurer uniquement des déplacements en rotation autour d'un point consiste à associer quatre générateurs. L'un d'entre eux est un générateur passif de mouvement de rotation autour d'un point. En vertu du principe d'intersection il suffit de choisir n'importe quel générateur du groupe des déplacements $\{D\}$ pour chacune des trois chaînes restantes pour obtenir un générateur de rotation autour d'un point.

Le générateur de mouvement de rotation autour d'un point le plus simple est constitué d'un mât central, relié à la base, et comportant en son sommet une rotule sur laquelle vient s'articuler le plateau mobile. La figure ?? présente ainsi des poignets utilisant le principe du mât central avec des générateurs de $\{D\}$ de type $RRPS$, $PRRS$, $RRRS$. Pour le premier cas (chaîne $RRPS$) l'actionneur permet la modification de la longueur de la chaîne. Dans le cas des chaînes $PRRS$ un actionneur prismatique déplace le centre d'un joint de Cardan sur lequel s'articule un segment de longueur fixe. Enfin dans le cas de la chaîne $RRRS$ un moteur entraîne en rotation un levier au bout duquel se trouve un joint de Cardan sur lequel s'articule un segment de longueur fixe.

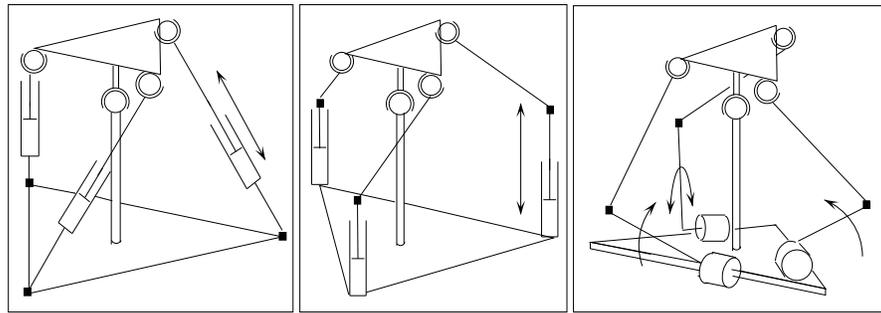


Figure 2.13: *Différents poignets parallèles avec le plateau mobile articulé sur une rotule placée sur un mât central. Les chaînes parallèles sont du type $RRPS$, $PRRS$, $RRRS$. Les joints de Cardan sont représentés par un carré noir.*

Toujours en utilisant le principe du mât central Hayward [163] propose une structure très inspirée de l'anatomie (figure ??). Son architecture utilise quatre actionneurs linéaires placés de manière similaire à des tendons. L'intérêt d'avoir plus d'actionneurs que nécessaire est de permettre de s'affranchir des singularités, dont nous parlerons dans un chapitre ultérieur.

Une variante du principe du mât central a été proposée par Agrawal [3] (figure ??). Il est aussi possible de se servir du mât central comme actionneur. C'est ce que propose Cheng [52] pour le poignet qu'il a conçu dans le cadre

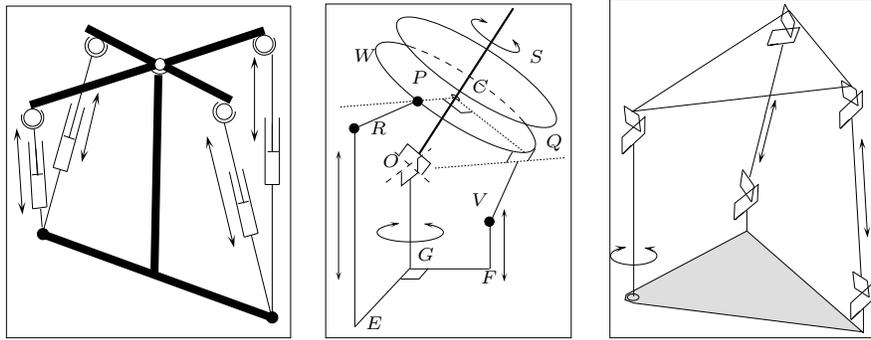


Figure 2.14: *A gauche le poignet redondant de Hayward : quatre actionneurs linéaires permettent d'orienter un plateau monté sur rotule (d'après Hayward [163]). Au milieu le poignet de Agrawal : la rotation autour de OG permet d'assurer la rotation complète du plateau supérieur S alors que les translations de V, R assurent les deux degrés de liberté en orientation restant (d'après Agrawal [3]). A droite le poignet de Cheng : le mât central est monté sur une articulation rotoïde actionnée et les deux autres actionneur prismatiques permettent de commander les autres rotations (d'après Cheng [52]).*

d'une étude pour le service postal américain UPS. Dans ce poignet le mât central est monté sur une articulation rotoïde de même axe que le mât alors que deux actionneurs prismatiques permettent d'obtenir les autres rotations (figure ??).

Une autre possibilité pour la conception de poignet est d'utiliser des chaînes qui sont des générateurs de mouvement de rotation autour d'un point. L'utilisation de chaînes sphériques pour ce type de générateur a été mentionnée par Asada [22]. Gosselin et son équipe ont étudié de manière exhaustive la réalisation d'un poignet reposant sur ce principe [123, 135, 397] dans le but d'en faire un système de pointage («œil agile»⁵). Ce manipulateur utilise trois chaînes sphériques motorisées à l'aide d'actionneurs rotatifs dont les axes sont concourants en un point qui sera le centre de rotation (figure ??). Le robot de Gosselin a été aussi étudié par Alizade [7] et une adaptation a été proposée par Takeda [435] : le principe de motorisation reste le même mais la plate-forme mobile est posée sur une rotule dont le centre de rotation coïncide avec le point d'intersection des axes des actionneurs. Dans une autre variante proposée par Ouerfelli [336] une des chaînes du robot de Gosselin est supprimée, la rotation autour de l'axe z étant obtenue par un actionneur supplémentaire placé sur la plate-forme. Tesar et Marco [275, 439] décrivent des structures utilisant des chaînes sphériques dont toutes les articulations ont la propriété d'être concourants en un seul point (figure ??). Reboulet [377] a même proposé des robots sphériques redondants pour optimiser la dextérité de ce type de manipulateur.

⁵<http://wwwrobot.gmc.ulaval.ca/>

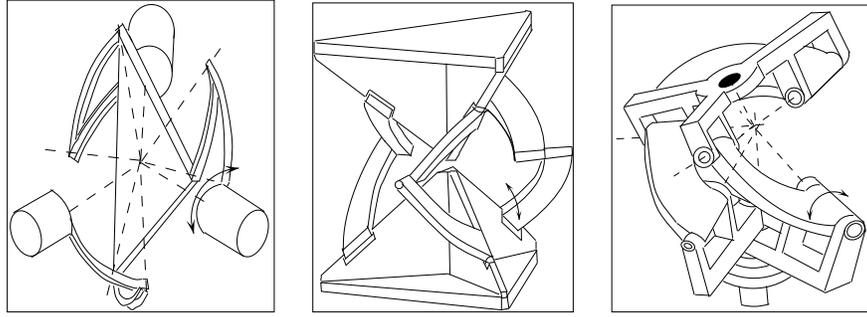


Figure 2.15: *A gauche le poignet sphérique de Gosselin : trois chaînes sphériques sont utilisées avec des actionneurs rotatifs dont les axes sont concourants au centre du plateau mobile (d'après Gosselin [123]). Au milieu les deux prototypes de poignet de Tesar : les actionneurs rotatifs et toutes les articulations rotoïdes ont leur axe concourant en un point (d'après Tesar [439]).*

Mentionnons aussi que Daniali [78] a proposé un équivalent sphérique de son mécanisme plan et que Vischer [446] a proposé le robot «Argos», ayant la même structure que le «Star» d'Hervé, la translation des parallélogrammes étant remplacée par une rotation autour de l'axe des moteurs : la plate-forme tourne alors autour d'un point commun aux trois axes.

2.3.5.3. Manipulateurs à degrés de liberté complexes

Le manipulateur à 3 degrés de liberté de la figure ??, proposé pour la première fois par Hunt [180], a été étudié par différents auteurs : Lee [250], Gosselin [123], Hashimoto [159], Pfreundschuch [354], Waldron [448]. Les articulations des segments avec la base sont rotoïdes, disposées à 120 degrés. Les articulations avec le plateau mobile sont des rotules et des actionneurs prismatiques permettent de faire varier la longueur des segments. Les degrés de liberté sont des translations sur l'axe vertical et les angles de précession et de nutation. Ce robot et une variante ont été utilisés par Zhang [483] pour la compensation des mouvements du bras de la navette spatiale et comme micro-manipulateur (sous le nom d'«Artisan») par Waldron et Khatib. Un prototype de micro-robot à actionneurs piézo-électriques utilisant cette architecture a été réalisé par Lee [252]. Une structure équivalente à celle de Lee a été proposée par Lambert [232] : les actionneurs prismatiques y sont remplacés par un système de segments articulés motorisés à la base par un actionneur rotoïde (figure ??). Elle présente l'avantage d'un espace de travail probablement plus étendu que la structure de Lee, ceci au prix d'un nombre plus important d'articulations passives. Le robot de Lambert a été ultérieurement analysé par Dunlop [96]. Une variation du robot de Lambert est le robot «CSA» de Hui [177] (figure ??). Dans ce robot les trois actionneurs rotatifs de la base sont liés par une rotule à un segment lui

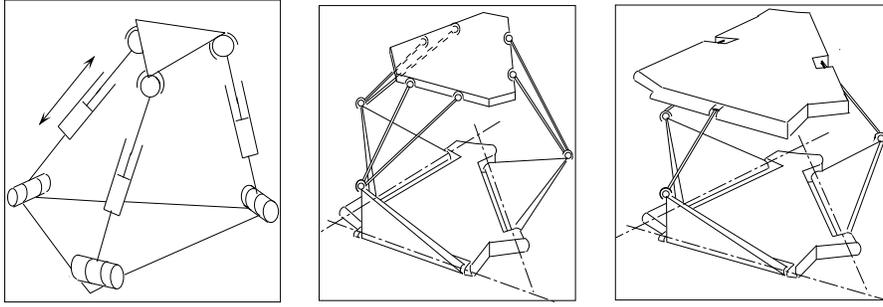


Figure 2.16: *A gauche le manipulateur à 3 degrés de liberté de Lee. Les articulations des segments avec la base sont rotoïdes, disposées à 120 degrés. Les articulations avec le plateau mobile sont des rotules et des actionneurs prismatiques permettent de faire varier la longueur des segments. Les degrés de liberté sont des translations sur l'axe vertical et les angles de précession et de nutation (d'après Lee K-M. [250]). Au milieu l'équivalent de Lambert : les triangles articulés proches de la base sont motorisés (d'après Lambert [232]). A droite le mécanisme « CSA » de Hui (d'après Hui [177]).*

même connecté à la plate-forme par une articulation rotoïde. En utilisant un plate-forme congruente à la base le modèle géométrique direct est très simple.

Dans le mécanisme de Lande [233] (figure ??) deux vérins déplacent verticalement des tiges articulées auxquels sont reliés des segments par des cardans. L'autre extrémité des segments est liée à la plate-forme mobile par des cardans. Le troisième degré de liberté est obtenu par rotation d'une chaîne articulée par des cardans, libre selon son axe, qui permet de commander la rotation de l'organe terminal autour de la normale de la plate-forme. On pourrait construire selon ce principe des mécanismes au nombre de degrés de liberté plus élevé. Notons cependant qu'une telle architecture conduit à un nombre important d'articulations (18 pour un manipulateur à 6 degrés de liberté).

L'ajout de lien passif permet de jouer avec une grande liberté sur la nature et le nombre de degrés de liberté résultant. Un exemple en est donné dans la figure ?. Ce robot est constitué d'un plateau mobile sur lequel viennent agir 3 actionneurs linéaires. Il est de plus soumis à une contrainte passive car il est lié par une rotule à une barre, elle-même soumise à des contraintes. En effet une extrémité de cette barre est liée à un chariot guidé en translation et passe par un orifice d'un obstacle : elle peut donc tourner librement autour du centre de cet orifice et se translater librement selon son axe. Selon le même principe Reboulet a mentionné une architecture où la contrainte passive est exercée par une barre extensible liée à la base par un cardan mais ne pouvant pas tourner autour de son axe (figure ?).

Un peu à part dans notre étude citons un mécanisme intéressant proposé par Landsberger [234, 236] qui utilise des câbles comme segments, un mât

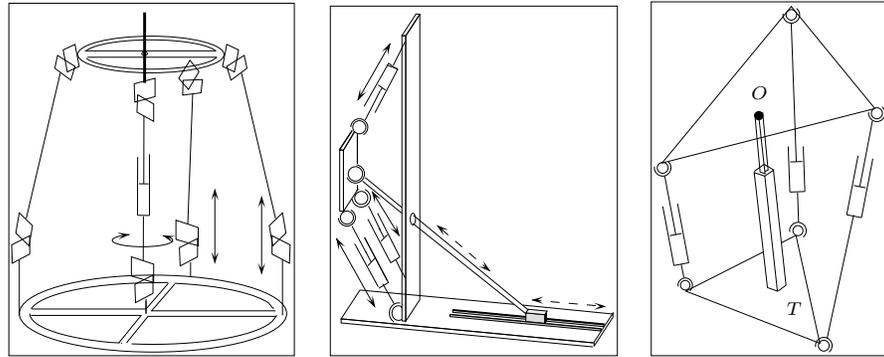


Figure 2.17: Robots à 3 degrés de liberté avec des contraintes passives. A gauche les vérins assurent un déplacement des points d'articulation : la rotation autour de la normale au plateau mobile est obtenue par une tige articulée avec des cardans, libre selon son axe (d'après Lande [233]). A droite une architecture proposée par Reboulet : la barre OT , reliée à la base par un cardan en O , est extensible mais ne peut tourner autour de son axe.

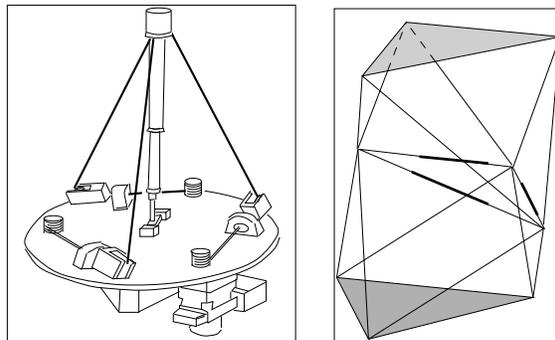


Figure 2.18: A gauche le robot à 3 degrés de liberté de Landsberger : les segments sont des câbles qui peuvent s'enrouler sur des tambours. La tension des câbles est assurée par le mât central qui exerce une poussée passive vers le haut (d'après Landsberger [236]). A droite le robot de Arun : trois actionneurs linéaires permettent de modifier les longueurs des côtés de la face triangulaire commune aux deux octaèdres.

central assurant leur mise en tension (figure ??). Ce type de robot présente des avantages de légèreté mais pose le problème de la conservation de la tension des câbles.

Mentionnons aussi le robot de Arun [21] constitué de deux octaèdres empilés dont la face triangulaire commune comporte des actionneurs linéaires permettant de modifier les longueurs des côtés (figure ??). Ce robot a été étudié pour la NASA et par l'Université de Toronto [165].

Dans ces manipulateurs complexes il n'est pas toujours aisé de déterminer quels sont les degrés de liberté de la plate-forme. Pour résoudre ce problème Huang [174, 175], propose une méthode reposant sur les visseurs et l'a appliqué au robot de Lee et aux robots sphériques.

2.3.6. Manipulateurs à 4 degrés de liberté

Des mécanismes à 4 degrés de liberté ont été proposés très tôt dans la littérature. Ainsi en 1975 Koevrmans [221] a présenté un mécanisme pour un simulateur de vol utilisant des actionneurs linéaires, le plateau mobile étant soumis à des contraintes passives (figure ??). Les degrés de liberté sont les trois rotations et une translation selon l'axe z . Plus récemment une généralisation

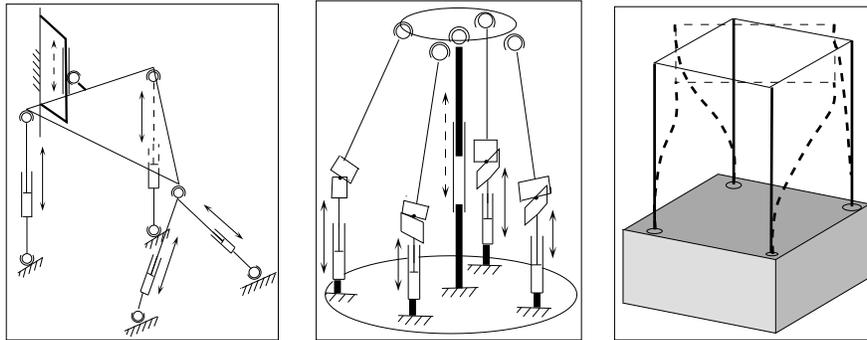


Figure 2.19: Manipulateur à 4 degrés de liberté. A gauche une contrainte passive assure que les seuls degrés de liberté sont les rotations et une translation selon l'axe z (d'après Koevrmans [221]). Au milieu un robot proposé dans le cadre du projet VAP (d'après Reboulet [373]). A droite le manipulateur de Rebman utilisant des tiges déformables (d'après Rebman [370]).

du poignet à chaîne $PRRS$ étudié à l'INRIA a été proposée dans le cadre du projet VAP (Véhicule Autonome Planétaire) [373]. Il s'agit d'un mécanisme à 4 degrés de liberté utilisant 4 chaînes $PRRS$ avec un mât central laissé libre selon sa direction et sur lequel s'articule l'organe terminal par l'intermédiaire d'une rotule (figure ??). Les degrés de liberté de ce robot sont donc les trois rotations autour de la rotule et la translation selon l'axe du mât central. Enfin, citons le manipulateur proposé par Rebman [370] qui utilise des tiges déformables

(figure ??).

2.3.7. Manipulateurs à 5 degrés de liberté

Austad [23] a proposé une architecture hybride, c'est-à-dire mélangeant robot parallèle et robot série, pour un manipulateur à 5 degrés de liberté (figure ??). Un premier positionneur parallèle place un point de l'organe terminal dans l'espace et un deuxième mécanisme parallèle permet d'assurer deux rotations du plateau mobile.

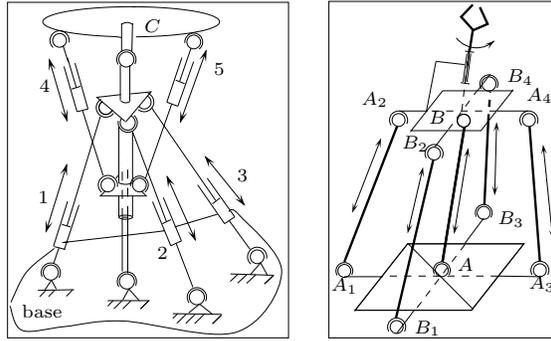


Figure 2.20: *A gauche le manipulateur à 5 degrés de liberté de Austad : un premier positionneur parallèle, utilisant les actionneurs 1, 2, 3, place le point C dans l'espace et un deuxième mécanisme parallèle, utilisant les actionneurs 4, 5 permet d'assurer deux rotations du plateau mobile (d'après Austad [23]). A droite un robot proposé par Zamanov : le sixième degré de liberté, la rotation autour de la normale au plateau mobile, est obtenue par un mécanisme supplémentaire (d'après Zamanov [476]).*

Zamanov [476] a proposé une architecture de manipulateur parallèle à 5 degrés de liberté (figure ??). Cette architecture repose sur le couplage de deux manipulateurs parallèles plans ($A_1A_2ABA_3A_4$, $B_1B_2ABB_3B_4$) ayant une chaîne (AB) en commun. Une telle structure permet la commande des degrés de liberté de la plate-forme à l'exception de la rotation autour de la normale de la plate-forme. Ce dernier degré de liberté peut par ailleurs être commandé par l'intermédiaire d'un actionneur supplémentaire placé sur la plate-forme.

2.3.8. Manipulateurs à 6 degrés de liberté

Les réalisations de manipulateurs pleinement parallèles à 6 degrés de liberté reposent sur l'utilisation de six générateurs du groupe des déplacements $\{D\}$ tels que décrit dans les sections précédentes. On va donc retrouver des chaînes de type $RRPS$, $RPRS$, $PRRS$, $RRRS$. Il existera aussi des mécanismes non pleinement parallèle présentant des structures plus complexes.

2.3.8.1. Robots à chaînes $RRPS$

Cette architecture est représentée dans la figure ?? et nous appellerons ce type de manipulateur un *robot général*. C'est la plus répandue et elle a été utilisée dans de nombreux laboratoires pour la réalisation de prototypes [13, 109, 155, 225, 274, 321, 328, 371] et correspond à celle utilisée dans la plupart des simulateurs de vol.

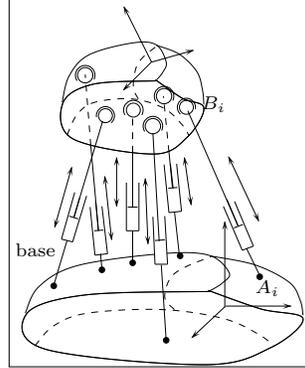


Figure 2.21: La structure générale d'un manipulateur parallèle à 6 degrés de liberté avec des chaînes de type $RRPS$. La plate-forme est reliée à la base par 6 segments. La liaison d'un segment avec la base se fait usuellement avec un joint de Cardan et la liaison avec la plate-forme mobile par une rotule. Un actionneur prismatique permet de faire varier la longueur des segments.

Historiquement il semble que la première réalisation d'un manipulateur parallèle de ce type puisse être attribuée au Pr. McCallion de l'Université de Christchurch [271] pour une station d'assemblage robotisée (figure ??). Dans ce prototype des moteurs placés sur une base fixe entraînent en rotation par l'intermédiaire d'un joint de Cardan des vis sans fin placées dans les segments. Ces vis sans fin font varier la longueur des segments reliant la base au plateau mobile. Dès les années 80 Fichter [107, 108] entrevoyait un certain nombre de problèmes théoriques que posaient ce type de mécanisme et ses applications potentielles. Le concept de McCallion a été repris dans le brevet de Shelef [403] avec la différence que les moteurs sont reliés à la base par l'intermédiaire de joint de Cardan et restent donc toujours alignés avec les vis sans fin (figure ??).

Un pionnier dans la construction de ce type de manipulateur est C. Reboulet du CERT-DERA qui a développé un prototype dès 1985 [372]. Il s'agit d'un poignet actif dont les actionneurs sont des vérins pneumatiques. Une version de ce prototype a été commercialisée, toutefois sans succès, sous le nom de «Space».

A partir des travaux de Reboulet, l'INRIA a développé un prototype de «main gauche» (figure ??), de structure comparable à celui du CERT, mais

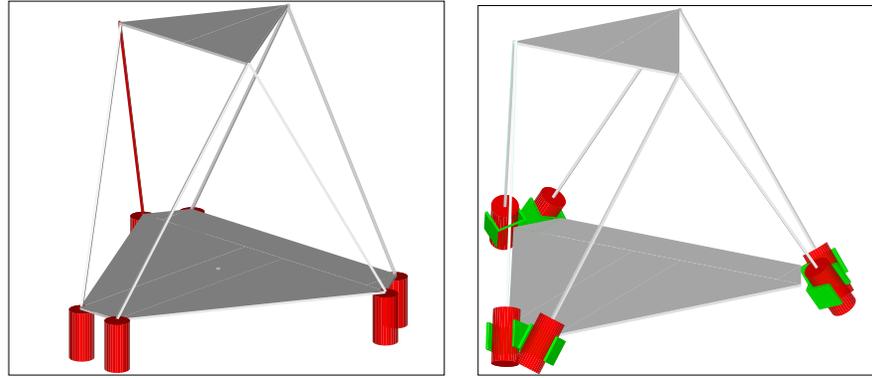


Figure 2.22: *A gauche le prototype du Pr. McCallion : les moteurs entraînent en rotation les vis sans fin par l'intermédiaire d'un joint de Cardan, ce qui fait varier la longueur des segments (d'après McCallion [271]). A droite le prototype de Shelef : les moteurs faisant varier la longueur des segments sont reliés à la base par l'intermédiaire de joint de Cardan (d'après Shelef [403]).*

à motorisation électrique [288]. Les plateaux sont des hexagones symétriques plans avec une répartition régulière des articulations par paire à 120 degrés. En position nominale ces deux plateaux sont placés tête-bêche. Les vérins ont une longueur de déplacement d'environ 2 cm, ce qui conduit à un espace de travail de ± 8 cm pour les déplacements horizontaux et 2 cm pour les déplacements verticaux. Les rotations autour de l'axe vertical sont comprises entre $\pm 60^\circ$, $\pm 15^\circ$ pour les rotations autour des axes horizontaux. Le poids du manipulateur est de 35 kg. Ce robot est équipé de capteurs de forces dans chacun des segments ce qui permet de mesurer les 6 composantes d'un torseur de forces externes. La force articulaire maximale, limitée par les capteurs d'effort est de 30 daN, ce qui conduit dans l'espace de travail à une charge maximale de l'ordre de 100 kg si la charge repose sur le plateau. La précision absolue de positionnement mesurée est de 10 μm . La vitesse articulaire maximale est de 1,5 cm/s. La hauteur est d'environ 53 cm pour des segments ayant une longueur morte de 45,45 cm. Les rotules sont simplement constituées de joint de Cardan, la base du joint pouvant tourner autour d'un axe engagé dans deux roulements miniatures de précision, montés en duplex et précontraints. Remarquons aussi qu'il serait possible de considérer des manipulateurs de type « main gauche » mais dont les vérins entraînent en translation une pièce dont l'axe n'est pas colinéaire avec celui du vérin : dans ce cas il devient important de bloquer la rotation propre des vérins.

Le micro-robot d'Arai [17, 421] utilise l'architecture du robot général : les actionneurs sont des éléments piézo-électriques dont la course est de 8 mi-

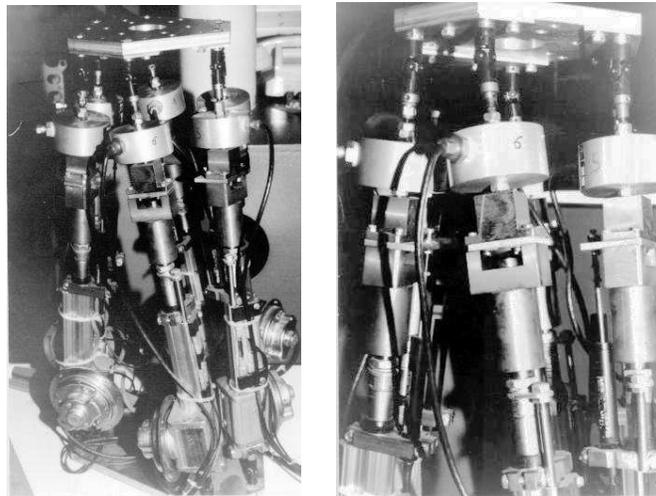


Figure 2.23: La « main gauche » de L'INRIA, manipulateur parallèle à segments de longueur variable avec une motorisation électrique.

cromètres⁶. Les variations de longueur sont mesurées par des jauges de contrainte, ce qui permet d'avoir une précision d'environ 30 nanomètres. Dans les prototypes les plus récents les articulations passives sont des poutres flexibles. Cet exemple illustre bien le fait que par son concept même un robot parallèle est beaucoup moins sensible au facteur d'échelle qu'un robot série.

Le remplacement des segments rigides par des câbles a été proposé par Albus et son équipe [5] du National Institute of Standard and Technology (NIST)⁷ pour la réalisation d'un élément de grue. Dans ce système deux plateaux en forme de triangle équilatéral sont connectés par 6 câbles qui peuvent être enroulés et déroulés, l'ensemble étant placé à l'extrémité d'une grue classique. On obtient ainsi un mécanisme rigide qui permet un contrôle en translation mais aussi, à l'opposé des palans classiques, un contrôle en rotation. Une des applications visée est la manipulation d'éléments de navire et un prototype a été utilisé dans le domaine de la construction pour l'assemblage de poutres [447]. Un autre robot à câbles, le « Falcon » a été proposé par Kawamura [213] pour l'assemblage ultra-rapide (figure ??). Un autre type de robot à câbles a été proposé par Geng [121] pour la mesure de la posture d'un objet.

Parfois il a été proposé des dispositions spéciales pour les points d'articulation comme dans le robot « Toro » conçu par le Pr. Zamanov [474] avec des double rotules sur le plateau mobile. C'est aussi le cas du robot minier proposé par Arai [14] (figure ??) dont la disposition croisée des points d'articulation

⁶<http://www.aist.go.jp/MEL/mainlab/kiso/kis08e.html>

⁷<gopher://gopher-server.nist.gov/1>

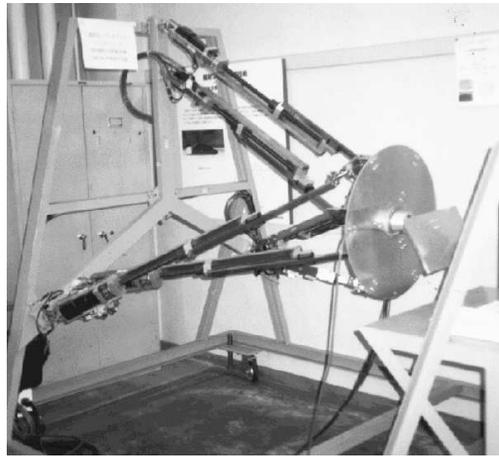


Figure 2.24: *Le robot minier d'Arai.*

a pour but d'optimiser la précision du robot dans sa position nominale. Une disposition spéciale des points d'articulation a aussi été proposée dans un brevet de Griffis [146] : la plate-forme et la base constituent des triangles, chacun de leur côté ayant trois points d'articulation (figure ??).

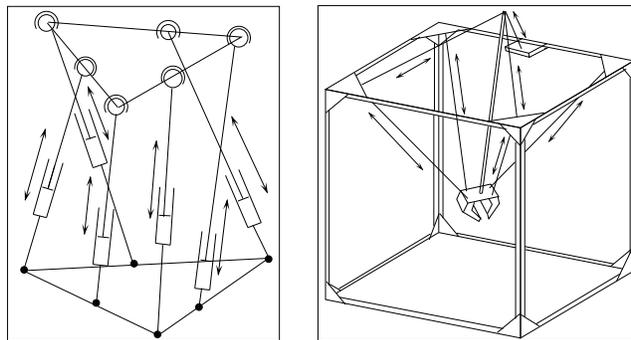


Figure 2.25: *A gauche la «main gauche» spéciale de Griffis (d'après Griffis [146]). A droite le robot à câbles «Falcon» (d'après Kawamura [213]).*

Du point de vue commercial, la société Marconi semble avoir été la première à proposer un manipulateur de ce type. Il s'agit d'un manipulateur visant le transport et l'assemblage de composants électroniques, développé sous le nom de «Gadfly» [365, 364]. Il semblerait cependant que ce prototype n'ait pas connu de commercialisation, même si une nouvelle version (Mk 2) semble avoir vu le jour [276].

2.3.8.2. Robots à chaînes $\underline{P}RRS$

Les manipulateurs parallèles de cette catégorie sont apparus plus récemment. Dans le prototype de poignet actif breveté de l'INRIA [290] une articulation prismatique motorisée verticale est reliée à un segment de longueur fixe par un joint de Cardan. L'autre extrémité du segment est reliée au plateau mobile par une rotule et l'on utilise un système de double rotule pour faire partager le même centre de rotation à deux segments. Il y a donc seulement trois articulations sur le plateau mobile [311].

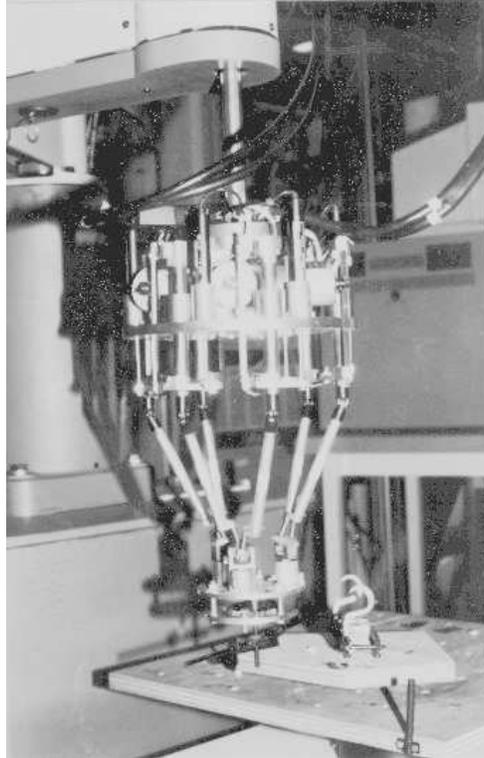


Figure 2.26: Un poignet actif à 6 degrés de liberté monté sur un robot SCARA dont les articulations près de la base se déplacent selon la verticale en utilisant une chaîne de type $\underline{P}RRS$ (brevet INRIA). Les segments ont une longueur fixe, les moteurs sont en partie basse.

Ce manipulateur (figure ??) utilise des moteurs couples au samarium-cobalt entraînant par l'intermédiaire d'un réducteur un ensemble pignon crémaillère. Les capteurs de déplacement des vérins sont du même type que ceux de la «main gauche». Les avantages d'une telle structure sont un centre de masse très bas, une grande légèreté de l'équipage mobile et des risques de collision

faibles entre les segments. Notons que la disposition de l'axe des actionneurs prismatiques peut être quelconque : ainsi Bernier [34] propose un manipulateur, le «Nabla 6», dont les axes sont horizontaux (figure ??). Ce manipulateur a de plus des particularités intéressantes : il n'existe que 3 axes d'articulations prismatiques distinctes, certains des points A_i glissant sur le même axe. De plus 3 des points B_i s'articulent sur une triple rotule et sont donc confondus : on peut donc commander la position de ce point avec les trois actionneurs associés alors que les trois autres servent à commander l'orientation de la plate-forme. On obtient donc ainsi un robot découplé. Dans le robot «Hexaglidle» de l'École

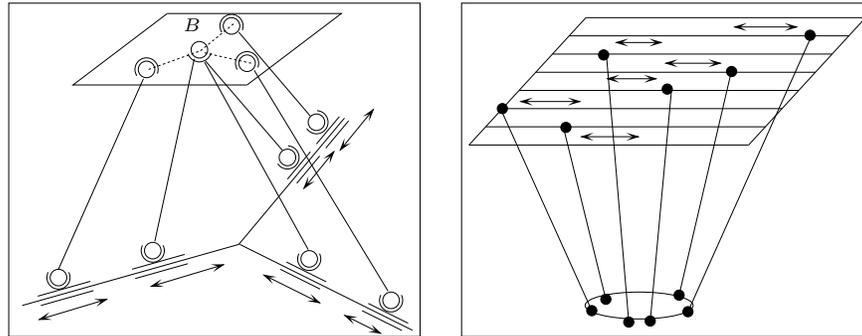


Figure 2.27: *A gauche le «Nabla 6», un robot découplé de Bernier : les trois actionneurs prismatiques horizontaux des segments intérieurs permettent de commander la position de B_1 alors que les trois autres permettent de contrôler l'orientation de la plate-forme (d'après Bernier [34]). A droite le robot «Hexaglidle» de l'École Polytechnique fédérale de Zürich.*

Polytechnique fédérale de Zürich⁸ les axes des articulations prismatiques sont horizontaux et parallèles (figure ??).

2.3.8.3. Robots à chaînes \underline{RRRS}

Dès 1983 Hunt [180] avait proposé une architecture de robot utilisant ce type de chaîne (figure ??). Le prototype que nous présentons en figure ?? a été construit par le Pr. Zamanov sur ce principe.

Le principe du «Delta» a été étendu par Pierrot au LIRMM et par Uchiyama pour proposer un robot à 6 degrés de liberté, l'«Hexa» [356, 443]. Ce mécanisme⁹ ne diffère de l'architecture de Hunt que par la disposition des axes des articulations rotoïdes sur la base et la position des centres des articulations sur la plate-forme mobile (figure ??). Mais cette différence permet de retrouver le fonctionnement du «Delta» si l'on fait fonctionner de manière identique les

⁸<http://www.ifr.mavt.ethz.ch/projects/indRob/hexaglidle/hexaglidle.html>

⁹<http://www.lirmm.fr/~pierrot/para.html>

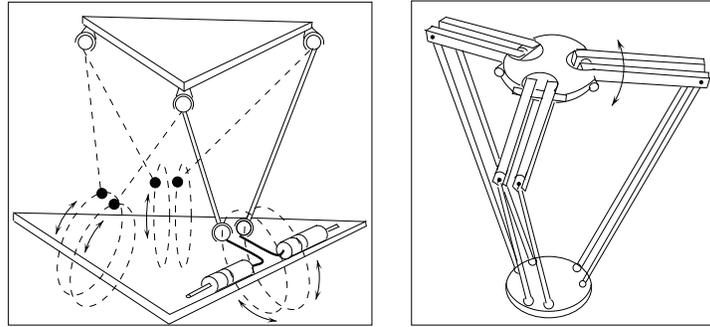


Figure 2.28: A gauche le robot utilisant des chaînes de type \underline{RRRS} proposé par Hunt en 1983 (d'après Hunt [180]). Au milieu le robot «Hexa» de Pierrot, une généralisation du concept du «Delta» (d'après Pierrot [356]).

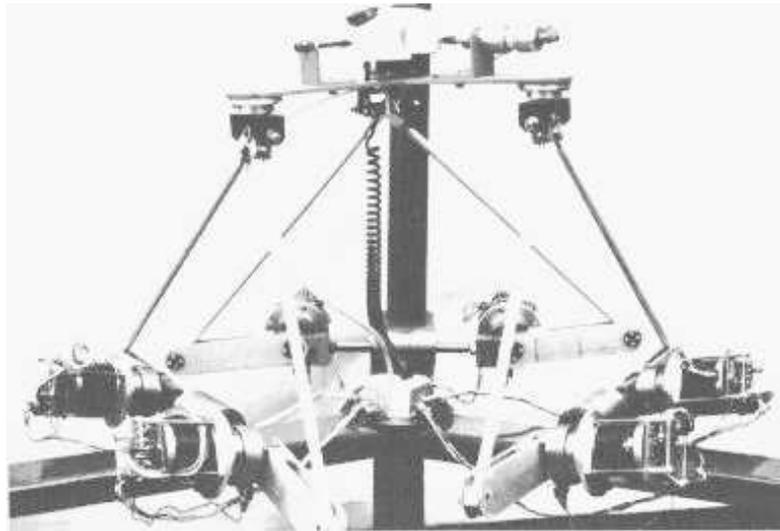


Figure 2.29: Un prototype du Pr. Zamanov, reposant sur une architecture imaginée par Hunt où les points d'articulation se déplacent sur des cercles (photographie due à l'amabilité du Pr. Zamanov).

segments d'une paire. Ce robot est en cours de commercialisation par la société Toyota. Notons qu'il n'est pas nécessaire que le déplacement des leviers motorisés se fassent dans un plan vertical : on pourrait par exemple construire une version où le plan serait horizontal. Des variantes du robot «Hexa» ont été proposées par Mimura [304] et Bénéa [32], avec des axes des moteurs horizontaux et concourants, et par Sarkissian [394] avec des axes moteurs verticaux.

2.3.8.4. Robots à chaînes exotiques

Dans cette catégorie nous placerons les manipulateurs proposés dans la littérature dont le principe de motorisation ne permet pas de les rattacher directement à une des classes présentées précédemment.

Un exemple en est le manipulateur complexe de Han, Hudgens et Tesar [153], où ce sont des mécanismes à 4 barres qui sont utilisés pour déplacer les points d'articulation (figure ??). Le même principe est utilisé par Tsai [441] et Tahmasebi [432] : deux actionneurs rotatifs permettent de changer la position des points d'articulation (figure ??).

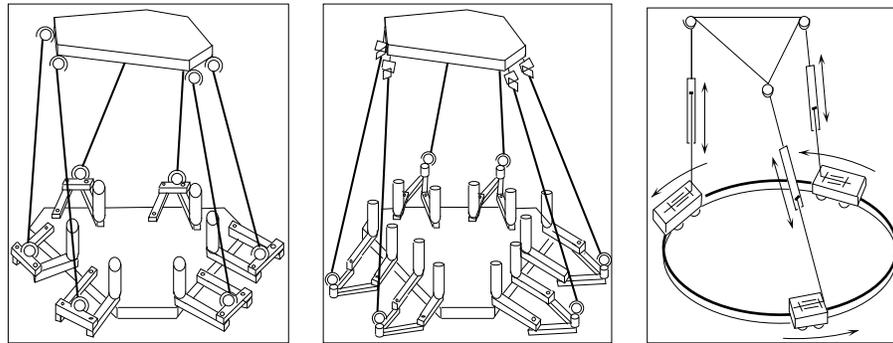


Figure 2.30: *A gauche le manipulateur de Han : des mécanismes à 4 barres sur la base, actionnés par des moteurs électriques, permettent de déplacer les points d'articulation des segments (d'après Han C.S. [153]). Au milieu le robot de Tahmasebi : deux actionneurs rotatifs placés en D_i permettent de contrôler la position du point C_i (d'après Tahmasebi [432]). A droite le prototype d'Alizade (d'après Alizade [6]).*

Dans la même catégorie mentionnons le manipulateur d'Alizade [6]. Pour ce robot (figure ??) trois chariots se déplacent sur un rail circulaire ; à ces chariots sont liés par une articulation rotoïde un segment muni d'un actionneur prismatique lui même attaché à la plate-forme mobile par une rotule.

Citons pour mémoire les mécanismes proposés par Kohli [222], Zhang [484] ou Behi [31], qui utilisent des actionneurs doubles : linéaires et rotatifs ou linéaire et linéaire (figure ??). Nous pouvons enfin noter l'existence de projets où l'architecture est hybride, mélangeant manipulateurs série et parallèle

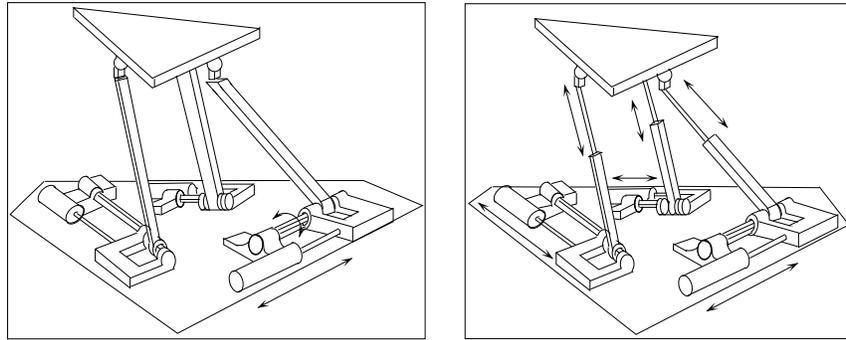


Figure 2.31: *A gauche le prototype de Kohli, avec des actionneurs doubles, linéaire et rotatif (d'après Kohli [222]) et à droite le prototype de Behi, avec des actionneurs doubles, linéaire-linéaire (d'après Behi [31]).*

comme celle de Podhorodeski [361] avec trois branches parallèles contenant deux actionneurs par branche. Dans cette catégorie la structure proposée et réalisée par Parushev [347], très inspirée de l'anatomie, est présentée dans la figure ???. Deux structures parallèles à mât central permettent d'obtenir un robot à 6 degrés de liberté. Cette structure fait partie d'un large éventail d'architectures utilisant des modules linéaires, qui a fait l'objet d'un travail de synthèse présenté par Chakarov [48]. Le principe de superposition de

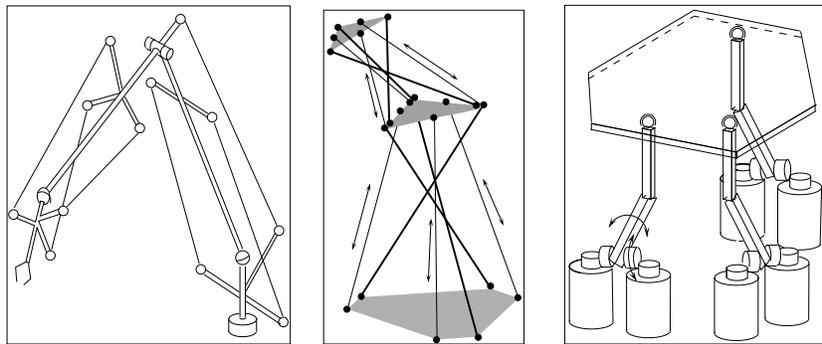


Figure 2.32: *A gauche 2 manipulateurs parallèles à câbles permettent d'obtenir un robot à 6 degrés de liberté (d'après Parushev [347]). Au milieu un premier module est constitué de deux plateaux reliés par 6 segments dont 3 ont une longueur fixe (en traits épais) et les 3 autres sont de longueur variable. Une structure identique relie le plateau supérieur à l'organe terminal (d'après Shahinpoor [402]). A droite le robot « Smartee » : le mécanisme différentiel permet de commander deux degrés de liberté du premier segment de chacune des trois chaînes (d'après Cleary [64]).*

deux robots parallèles a été aussi utilisé pour le robot de Shahinpoor et de Pang [339, 402] représenté en figure ??.

Mentionnons le manipulateur parallèle à 6 degrés de liberté «Smartee» proposé par Cleary [64] et commercialisé par Hughes Stx¹⁰. L'organe terminal de ce robot est lié à la base par trois chaînes cinématiques constituées de deux segments. Le segment attaché à l'organe terminal est lié au segment précédent par une articulation rotoïde passive et un mécanisme différentiel permet de commander deux degrés de liberté du segment lié à la base (figure ??).

Pour certaines tâches comme l'assemblage il est important que la raideur du mécanisme (nous reviendrons sur cette notion) soit identique dans toutes les directions. La figure ?? présente une architecture dénommée «Limbro» proposée par Artigue [19] et étudiée par Dafaoui [73] et Amirat [9] permettant d'atteindre ce but. Dans ce mécanisme les actionneurs linéaires sont liés de

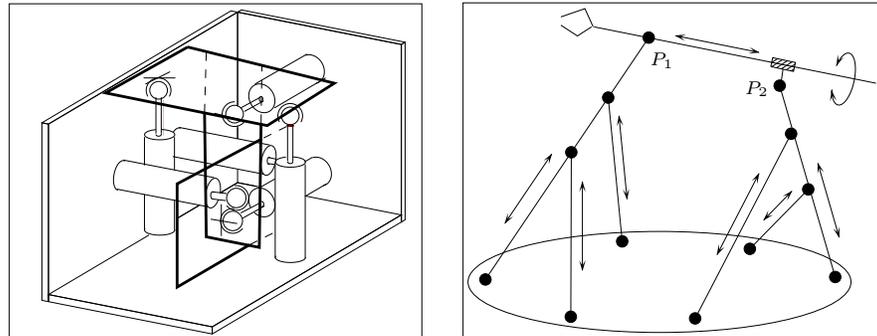


Figure 2.33: A gauche une architecture de manipulateur parallèle proposée par Artigue, le «Limbro», permettant d'avoir une matrice de raideur diagonale : les actionneurs linéaires, liés rigidement à la base, comportent à leur autre extrémité une rotule liée au plateau mobile par une articulation glissière permettant les translations dans un plan (d'après Artigue [19]). A droite une structure redondante, le «double tripode» de Merkle : les groupes de 3 actionneurs linéaires permettent de déplacer les points P_1, P_2 dans l'espace. Un mécanisme permet d'assurer la rotation de l'axe terminal autour de son axe (d'après Merkle [287]).

manière rigide à la base mais leur extrémité comporte une rotule qui est liée au plateau mobile par une articulation glissière permettant les translations dans un plan. Mentionnons aussi dans le même laboratoire le robot «Space» à 6 degrés de liberté et trois segments [92]. Dans ce manipulateur les trois segments reliés à la base par des joints de Cardan comportent des vérins permettant d'en faire varier les longueurs et de surcroît un des axes des joints de Cardan est motorisé.

Citons le «robot de Turin» développé par Romiti et Sorli [47, 414], dans

¹⁰<http://tron.stx.com/ince/SMARTee.html>

lequel quatre parallélogrammes motorisés assurent le déplacement dans un plan d'une rotule, liée au plateau mobile, montée sur une glissière d'axe perpendiculaire au plan du parallélogramme (figure ??). Trois de ces ensembles rotule-parallélogrammes permettent d'assurer le positionnement du plateau mobile.

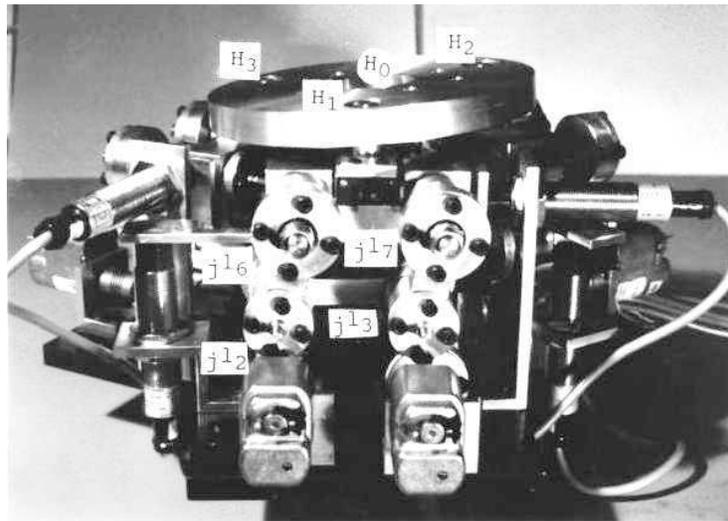


Figure 2.34: *Le prototype de Romiti (photographie due à l'amabilité du Pr. Romiti).*

Un autre mécanisme intéressant est le prototype de l'Université de Tokyo [201] développé par le Pr. Inoue. Il s'agit d'un poignet actif dans lequel l'utilisation de parallélogrammes permet d'obtenir des segments virtuels dont les longueurs ont une plage de variation plus importante que dans les mécanismes classiques, au détriment de la précision, en raison de l'ajout d'articulations. Ce type de mécanisme a été utilisé par Iwata [202] pour le développement d'un pantin utilisé dans un système de réalité virtuelle¹¹. L'étude complète de ce mécanisme a été réalisée par Collins [68].

Le robot «Tetra2» proposé par Hamlin [151] fait partie de ces robots à chaînes exotiques. Son architecture repose sur l'utilisation de l'articulation «CMS», qui permet de faire tourner plusieurs segments indépendamment autour d'un même point. Il est constitué de 6 segments de longueur variable dont la disposition est celle de deux tétraèdres qui partagent une face.

La redondance peut être utilisée pour augmenter l'espace de travail des robots parallèles. Ainsi Merkle [287]¹² propose une architecture appelée le

¹¹<http://intron.kz.tsukuba.ac.jp/HM/txt.html>

¹²<http://nano.xerox.com/nanotech/6dof.html>

«double tripode» : deux tripodes à actionneurs linéaires donnent cinq degrés de liberté à l'organe terminal et un système de vis permet d'assurer la rotation autour de l'axe de l'organe terminal (figure ??).

2.3.8.5. Robots découplés

Nous pouvons remarquer que dans les manipulateurs présentés jusqu'ici chaque actionneur joue un rôle à la fois sur la position et sur l'orientation de la plateforme mobile. Du point de vue de la commande il est intéressant de concevoir un manipulateur où trois actionneurs permettraient de commander les translations et les trois restants de commander les orientations. On obtiendrait ainsi un *robot découplé*.

Une architecture présentant cette caractéristiques a été proposée par Innocenti [187], Patarinski et Uchiyama [349] et Wohlhart [462]. Cette struc-

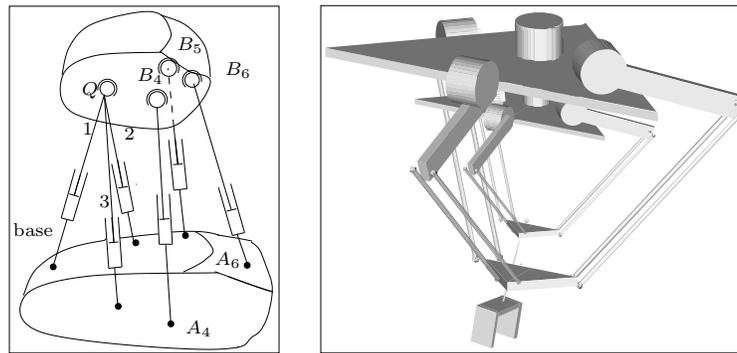


Figure 2.35: Manipulateurs parallèles découplés. À gauche le robot d'Innocenti : trois actionneurs permettent de déplacer le point Q , les trois autres permettant de commander les rotations autour de ce point (d'après Innocenti [187]). À droite le robot «2-Delta» de Lallemand (d'après Lallemand [141])

ture est présentée en figure ?? : on voit que trois des segments partagent une rotule commune et la modification des longueurs de ces segments permet de commander la position du centre de cette rotule. La commande de la longueur des trois segments restant permet alors de gérer les rotations de la plateforme mobile autour de cette rotule.

D'autres possibilités de robot découplé de ce type ont été proposées par Uchiyama [349], en remplaçant au moins partiellement les segments de type $R\underline{P}R$ par des segments de type $\underline{R}RR$ où la première articulation rotoïde est motorisée. Comme l'a fait remarquer Uchiyama le point délicat dans la réalisation pratique de ce manipulateur est la construction de la triple rotule.

Un autre type de robot découplé a été présenté par Zlatanov [491]. Il s'agit d'un robot à 6 degrés de liberté avec trois chaînes du type RRR , les

axes des articulations rotoïdes étant perpendiculaires. La motorisation en partant de la base vers le plateau mobile est distribuée de la manière suivante : $(\underline{RRR}), (RR\underline{R}), (R\underline{RR})$.

Une possibilité pour la création d'un robot découplé est de combiner deux robots permettant d'obtenir des translations : c'est ainsi que Lallemand [141] a proposé le «2-Delta»¹³, constitué de deux robots de type «Delta» imbriqués (figure ??).

Selon le même principe Lee [248] propose d'utiliser un premier mécanisme à 3 degrés de liberté, avec mât central, surmonté d'un autre mécanisme à 3 degrés de liberté. Enfin rappelons l'existence du robot découplé de Bernier [34] (figure ??).

2.4. Treillis articulés

Bien que notre propos ne concerne pas les robots redondants il apparaît clairement que les caractéristiques des manipulateurs parallèles les rendent attractifs dans ce domaine.

Une première possibilité d'architecture redondante consiste simplement à empiler des manipulateurs parallèles. C'est ce qu'a réalisé la société Logabex avec son robot «LX4» présenté en figure ?? . Ce type de manipulateur présente l'intérêt d'être extrêmement redondant, d'avoir un espace de travail important et un bon rapport charge utile/masse : le «LX4» a une masse de 120 kg pour une charge transportable de 75 kg et sa hauteur varie entre 2 m et 2,7 m environ [49]. Mais un tel robot est difficilement commandable.

Mentionnons le principe du treillis proposé par Koliskor [225] et repris par Chirikjian [56], constitué d'un empilement de manipulateurs parallèles de type «main gauche» mais dont la caractéristique est que les actionneurs fonctionnent en tout ou rien, ce qui justifie son nom de *robot binaire*. En plaçant par exemple cinq modules de ce type le nombre de positions atteignables par l'organe terminal atteint 2^{30} . . . au prix d'une complexité accrue du modèle géométrique comme le mentionne Ebert-Uphoff [99] et Lee [244, 245].

Dans le domaine de ces manipulateurs en treillis et à géométrie variable (appelé «VGT» pour *Variable Geometry Truss* dans la littérature anglo-saxonne) citons les nombreux travaux des Pr. Tanaka de L'Université d'Osaka [436] et Seguchi [400]. Leur type de treillis est constitué d'un empilement d'octaèdres articulés et dans chacun des octaèdres trois des 6 segments sont de longueur variable (figure ??). Ce type de structure permet de construire des manipulateurs de grande extension, légers et fortement redondants mais dont la modélisation géométrique [203], la synthèse [456] et la commande [401] posent des problèmes intéressants.

¹³<http://www2.univ-poitiers.fr/spi/mds/robot/delta.html>

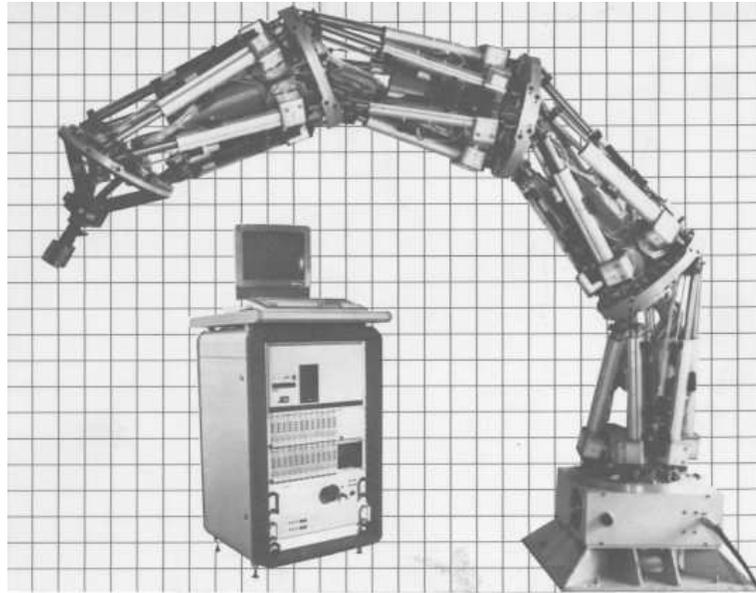


Figure 2.36: Le robot Logabex «LX4», constitué d'un empilement de «main gauche» (photographie aimablement fournie par la société Logabex).

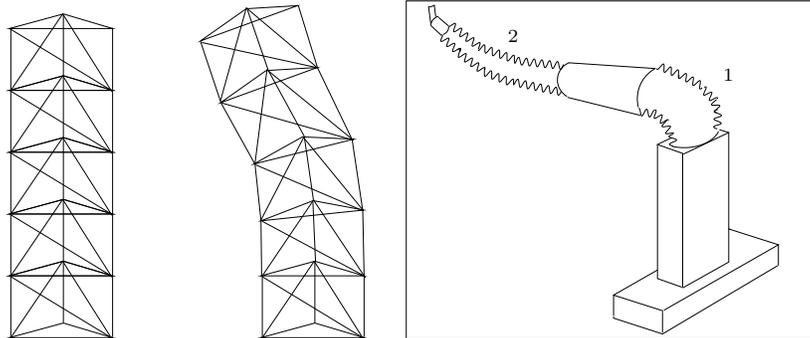


Figure 2.37: A gauche une structure en treillis du Pr. Seguchi. Chaque module a une structure octaédrique avec trois segments de longueur variable (d'après Seguchi [401]). A droite le robot de peinture «Spine» dont deux segments (1-2) sont constitués de treillis articulés (d'après Grunewald [148]).

Mentionnons les treillis de l'Université de Toronto [407], celui de Shahinpoor [402], celui de Subramanian [424] et enfin ceux du Pr. Miura [309]. Ces derniers se présentent sous la forme d'un empilement de modules octaédriques dont les faces triangulaires inférieures et supérieures ont des côtés de longueur variable. Padmanabhan [338] a proposé comme treillis d'accoupler deux ou quatre robots de type «main gauche» avec des plateaux mobiles triangulaires. Les actionneurs ne modifient pas les longueurs des segments mais les longueurs des côtés des triangles. Une telle structure est similaire à celle développée à la NASA¹⁴ et étudiée par Reinholtz [379] ainsi qu'à celle proposée par Stoughton [423]. Un autre type de treillis pour les applications spatiale a été étudié par Sarma [396]. Zhao a proposé d'empiler trois robots à 3 degrés de liberté du type de Lee pour obtenir un treillis à 9 degrés de liberté [488].

Bien entendu la forte redondance des treillis articulés en font des instruments de prédilection dans les applications de peinture comme le démontre le robot «Spine» [148]. Ce robot, dit en «trompe d'éléphant», permet l'accès aux zones les plus reculées d'un véhicule automobile. Il est constitué de trois segments rigides connectés par des segments constitués d'éléments sphériques emboîtés qui sont maintenus ensemble par quatre câbles dont la longueur est réglable (figure ??). On peut ainsi faire varier la torsion de chacun de ces segments. L'organe terminal est un poignet classique à axes concourants.

2.5. Exemples d'applications

2.5.1. Applications spatiales

Les applications dans le spatial des manipulateurs parallèles peuvent être divisées en deux catégories : les dispositifs terrestres destinés à la simulation d'apesanteur et les dispositifs embarqués.

Dans la première catégorie on peut citer un simulateur permettant le test d'un dispositif d'accostage de la station Columbus avec l'avion spatial Hermès [59, 147]. Le manipulateur est équipé de capteurs d'efforts et cette information est utilisée pour le faire évoluer conformément à un modèle dynamique de la station soumis à l'impact. Un autre prototype intéressant est le robot général «CKCM» étudié pour le Goddard Space Flight Center de la NASA par Nguyen et ses collaborateurs [328], dont les spécifications matérielles sont décrite par Smith [410] et dont la commande des actionneurs électriques est présentée dans [330]. Il est particulièrement destiné à l'étude de l'assemblage robotisé dans l'espace. L'utilisation de manipulateurs parallèles à actionneurs hydrauliques a été proposé par Masory [279] pour la simulation des mouvements d'un manipulateur dans l'espace. Corrigan [70] et Dubowsky [94] ont

¹⁴<http://tag-www.larc.nasa.gov/tops/tops95/exhibits/str/str-18-95/str01895.html>,
<http://ixeb3.larc.nasa.gov/vgt.html>,
<http://sseb4.larc.nasa.gov/Currentproj/vgt.html>

élaboré un simulateur, le «VES», où un robot parallèle est utilisé pour simuler le comportement d'un robot série en apesanteur¹⁵ et pour étudier les impacts entre un objet libre dans l'espace et une structure [471]. L'utilisation de treillis articulés pour l'aide à la construction de grandes structures spatiales a été aussi envisagé [91, 429, 463]. Le faible poids des manipulateurs parallèles ainsi que



Figure 2.38: *Un exemple d'utilisation d'un manipulateur parallèle pour la commande de l'orientation des antennes. A noter la faible dimension des actionneurs par rapport à la taille de la parabole.*

leur efficacité énergétique pourraient en faire un objet d'attraction pour les dispositifs embarqués. Il faut dire que l'utilisation de mécanismes parallèles est une vieille histoire dans le domaine spatial puisqu'on en avait étudié l'application pour le train d'atterrissage du module lunaire [381]. Mentionnons la possibilité envisagée dans le cadre du projet VAP (Véhicule Autonome Planétaire) d'utiliser un manipulateur parallèle redondant comme poignet d'un manipulateur embarqué sur un porteur explorant la surface de Mars [373]. Enfin il est clair que les structures en treillis mentionnées précédemment seraient partic-

¹⁵<http://www.me.mtu.edu/primers/mfged/machttool/altstruc/res5.html>

ulièrement adaptées à la construction de structures spatiales reconfigurables. Un peu en marge des activités spatiales on pourrait penser à l'utilisation des manipulateurs parallèles comme positionneur d'antenne (figure ??), comme se propose de le faire un groupe de l'Université de Canterbury¹⁶.

Toujours comme système de pointage un robot parallèle est envisagé pour l'expérience SAGE III¹⁷ décrite par Bernelli [33] pour la détermination de la composition de l'atmosphère terrestre. Un hexapode développé par le Max-Planck-Institut für Astronomie Heidelberg est par ailleurs utilisé sur le télescope UKIRT pour les mouvements lents de focus¹⁸. Mentionnons aussi l'utilisation d'un manipulateur parallèle comme poignet d'un manipulateur dans le projet «SPAM» (Stewart Platform Augmented Manipulator¹⁹).

2.5.2. Applications médicales

Wendlandt [458] a construit une tête active d'endoscope constituée d'un robot à 3 degrés de liberté²⁰ motorisé par des câbles. Homma [173] a proposé un robot d'assistance aux mouvements des bras d'un handicapé qui utilise deux robots parallèles à câbles.

Le robot «Delta» est actuellement utilisé comme support de microscope à l'hôpital Necker. Dans le système «Crigos» de Brandt [43] un robot parallèle est utilisé pour des opérations de chirurgie orthopédique. Le poignet actif de l'INRIA a été employé avec succès pour des opérations de chirurgie ophtalmologique sur des chiens [144, 205] et un robot parallèle est utilisé dans le simulateur «Cellsim»[267] destiné à l'exploration des molécules.

2.5.3. Applications industrielles

La précision de positionnement et la raideur élevée des robots parallèles devraient en faire des instruments utiles dans des domaines variés de l'industrie. L'assemblage²¹ et le suivi de contour sont des applications favorites des manipulateurs parallèles et de nombreuses démonstrations de faisabilité ont été faites par Begon [30], Pierrot [358], Reboulet [376] et Romiti [384] et nous même [288].

Certaines structures spéciales de manipulateurs parallèles, comme le «Delta», ont été utilisées pour des tâches de dépose rapide [62]. Citons l'utilisation d'un robot général comme support pour une buse de peinture d'un mini robot se déplaçant à l'intérieur de conduites [262].

¹⁶<http://www.mech.canterbury.ac.nz/research/robot.htm>

¹⁷<http://sseb4.larc.nasa.gov/Currentproj/sage.html>

¹⁸<http://sun1.mpia-hd.mpg.de/MPIA/Projects/UKIRT/>

¹⁹http://www.ssl.umd.edu/ssl_html/projects/SPAM.html

²⁰<http://robotics.eecs.berkeley.edu/~sastry/singapore/page2.html>

²¹Un exemple d'assemblage est présenté en <http://tron.stx.com/ince/RWSMee.html>

Il faut bien évidemment mentionner la première fraiseuse²² reposant sur le principe d'une plate-forme de Gough proposé par la société Giddings & Levis²³ sous le nom de « Variax », réalisant ainsi la vision des commentateurs du papier de Stewart. Elle a constitué le clou de l'exposition de la machine-outils à Chicago en 1994. D'après son constructeur, outre le fait que la machine possède 6 degrés de liberté, elle serait 5 fois plus rigide qu'une machine classique et aurait des vitesses d'avance bien supérieures. Cette machine est en évaluation au NIST qui se propose d'étudier l'utilisation de micro-actionneur piézo-électrique pour améliorer la précision et la robustesse vis-à-vis des vibrations²⁴. La concurrence a d'ailleurs réagit rapidement : la société Ingersoll²⁵ proposant elle aussi la fraiseuse « Octahedral Hexapod » et la société Geodetics mettant sur le marché la « G1000 ». Après cette période d'engouement ces sociétés ont été confrontées à des problèmes pour rendre ces machines réellement opérationnelles. Pour les résoudre les Sandia National Laboratories ont réuni un consortium pour mettre au point un hexapode²⁶ destiné à remplacer certaines fraiseuses. Ce projet a déjà abouti à la commercialisation d'une machine dénommée « Tornado 2000 » par la société Hexel²⁷ qui revendique une raideur de 300N/micromètre et une précision meilleure que 25 micromètres. La même démarche a été faite en Italie au sein du projet « Acrobat » réunissant l'ITIA et le CIMSI²⁸. L'Université du Texas à Arlington a proposé d'utiliser un robot parallèle pour une perceuse²⁹ et un centre d'usinage³⁰ alors que l'Université d'Urbana-Champaign propose dans son projet « Smartcuts » d'utiliser plusieurs robots parallèles à 3 degrés de liberté pour des opérations d'usinage³¹. Un projet de fraiseuse est en cours de développement au laboratoire Lawrence Livermore³². Notons aussi le projet anglais « LME »³³, dont le but est la construction d'une fraiseuse de faible coût pour les PME.

Des applications des robots à câbles ont été proposées dans le domaine de la construction. Ainsi Ming [305] et Higuchi [170] proposent d'utiliser un tel

²²<http://www.me.mtu.edu/~vsaxena/Research.html>

²³<http://quoll.maneng.nott.ac.uk/Research/rmc/index.html>

²⁴<http://isd.cme.nist.gov/brochure/Hexapod.html>

²⁵<http://hawkeye.me.utexas.edu/~melingo/art/new/hex.html>

²⁶<http://java.ca.sandia.gov/int1/hexapod/hexapod.html>

²⁷<http://www.hexel.com/>

²⁸<http://ttsnetwork.com/acrobat/>

²⁹<http://www.me.mtu.edu/primers/mfged/machtool/altstruc/res6.html>

³⁰<http://arrirs02.uta.edu/arri/acs.html>

³¹<http://mtamri.me.uiuc.edu/ucrc.projects/96-28.html>

³²<http://www.llnl.gov/eng/MMED/tool/mtd-pod.shtml>

³³<http://www.i-way.co.uk/~storrs/lme/LMEHexapodMachine.html>

robot pour assurer la maintenance des façades d'immeubles.

2.5.4. Pantins

L'utilisation de manipulateurs parallèles, actionnés ou non, comme pantin est souvent mentionnée ³⁴ [15, 80, 202], ³⁵, [231, 303, 481], même si le robot général n'a pas forcément l'espace de travail le plus approprié [419]. Un exemple d'utilisation de manipulateur parallèle comme pantin ³⁶, développé par V. Hayward de l'Université McGill, est présenté dans la figure ??.

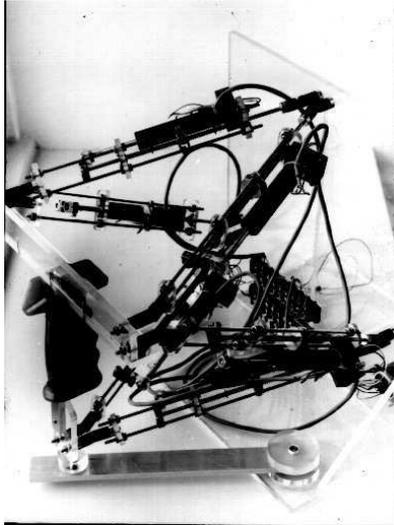


Figure 2.39: *Un prototype du Pr. Hayward, à cinématique partiellement découplée, employé ici comme pantin (Photographie : George Zimbel).*

2.5.5. Simulateurs

Les développements de manipulateurs parallèles dans le cadre d'une utilisation pour les simulateurs de vol sont bien sûr très nombreux [26, 218, 221, 346]. Un exemple de tel simulateur est présenté sur la photographie ?? et les fabricants en sont nombreux : CAE³⁷, Frasca³⁸, Kawasaki, Thomson (cette liste est non

³⁴http://www-wbk.mach.uni-karlsruhe.de/piq/vr/vr_sa_da/da_vdhar/pages/stewart.htm

³⁵<http://intron.kz.tsukuba.ac.jp/HM/txt.html>

³⁶<http://www.cim.mcgill.ca/~haptic/grouphome.html>

³⁷http://deeditis1.ai.iit.nrc.ca/~martin/talks/robotics_in_canada/robotics_in_canada_1a/slide_12.html

³⁸<http://www.frasca.com/>

exhaustive). La recherche est encore active sur ce thème comme le montre



Figure 2.40: *Le simulateur de l'Airbus A340 (réalisation THOMSON-CSF, photographe P. Palomba).*

les projets de l'Université de Delft (SIMONA³⁹), du NLR d'Amsterdam⁴⁰, de l'UTIAS de Toronto⁴¹ et le CMF (*Cockpit Motion Facility*) de la NASA⁴². On peut même trouver sur Internet des descriptifs de simulateur utilisés par la compagnie United Airlines⁴³.

Un manipulateur parallèle, le «Turret Motion Based Simulator» (TMBS) a été construit par le centre d'étude des chars de l'armée américaine (TACOM) [164, 337] et sa commande étudiée. Les actionneurs sont hydrauliques, la charge

³⁹<http://dutlsb3.lr.tudelft.nl/SIMONA/simona.html>

⁴⁰<http://www.nlr.nl/public/fac/fac-nsf/nsf&rsf.html>

⁴¹<http://www.utias.utoronto.ca/flsimfac.htm>

⁴²<http://bigben.larc.nasa.gov/facility/cmf.html>

⁴³<http://www.ualftctr.com/>

utile est de 25 tonnes avec des accélérations verticales de l'ordre de 4-6 g. Le but est de tester l'ergonomie de l'intérieur du char et d'étudier les systèmes de stabilisation d'armement. Dans la catégorie simulateur pour tâche dangereuse citons aussi le simulateur hydraulique de Salcudean [389].

Un simulateur surprenant est «Persival» de l'École Nationale d'Équitation (figure ??) : il a pour but d'assurer une formation préalable des cavaliers débutants sans que soit remis en cause l'éducation d'un bon cheval.



Figure 2.41: *Simulateur équestre «Persival» de l'École Nationale d'Équitation construit en collaboration avec l'ENAC (photographie E.N.E.).*

On ne peut aussi manquer de citer les simulateurs de véhicule comme celui de Daimler-Benz présenté par Drosdol [93] et les simulateurs de conduite comme l'IDS de l'Université d'Iowa⁴⁴, celui de l'Institut des Transports Suédois (VTI), le National Advanced Driving Simulator (NADS)⁴⁵, le projet SARA de

⁴⁴<http://www.ccad.uiowa.edu/media/still/index.html>

⁴⁵<http://www.nhtsa.dot.gov/people/perform/nads/geninfo.htm>

l'INRETS⁴⁶, et le simulateur de Yang [466],

2.5.6. Applications spéciales

Notons les travaux du MEL de Tsukuba portant sur des tailles extrêmes de manipulateurs : un robot de grande taille (figure ??) destiné à être utilisé comme robot minier et, à l'opposé, un micro-robot pour des applications médicales avec des actionneurs linéaires piézo-électriques [421].

Les positionneurs fins sont évidemment parmi les applications favorites des robots parallèles. On peut ainsi trouver chez Physik Instrumente l'hexapode M-800, une plate-forme de Gough ayant une résolution meilleure que 1 micromètre⁴⁷. Mentionnons aussi les positionneurs de l'European Synchrotron Radiation Facility (ESRF). Le synchrotron de l'ESRF est utilisé pour produire un faisceau de rayon X très finement ajusté en fréquence sur lequel sont interposées des chambres d'expériences. Ce rayonnement est focalisé à l'aide d'une optique spécifique dont le positionnement doit être extrêmement précis. Il est donc nécessaire qu'elle soit placée sur un positionneur à 6 degrés de liberté. Le poids d'une optique peut atteindre 500 kg à une tonne et les déplacements doivent être fait avec une précision inférieure au micromètre dans un espace restreint (typiquement cube de quelques centimètres de côté). Notre étude a montré que ce cahier des charges pouvaient être satisfait et ESRF a réalisé plusieurs prototypes dont la répétabilité, mesurée avec une charge de 230 kg, est meilleure que 0,1 micromètre et 1 μ rad, avec un pic dans la bande passante à 61 Hz [69].

L'industrie des loisirs trouve aussi parfois des applications inattendues aux manipulateurs parallèles. Mentionnons la salle de cinéma «Cinaxe» de La Villette où 60 spectateurs sont agités au rythme d'un film projeté sur un écran hémisphérique. Une autre application originale est celle présentée par Takanobu [434] pour un robot simulant la mastication.

On trouve aussi des robots parallèles employés pour le contrôle des vibrations ou d'oscillations de structures ou d'objets, par exemple dans le domaine spatial [91, 113, 171, 429, 463], pour un navire [160] ou à usage général [162]. Un exemple intéressant est le VISS (*Vibration, Isolation, Suppression and Steering System*) développé par l'armée de l'air américaine pour isoler les moyens de mesure embarqués (optique, laser...) du corps d'un satellite⁴⁸.

Dans le domaine maritime mentionnons l'utilisation d'un manipulateur parallèle comme grue par la société August Design Inc.⁴⁹ pour le chargement de

⁴⁶<http://www.inrets.fr/html/Labos/SARA/SARAProject.html>

⁴⁷<http://www.physikinstrumente.com/pages/news/linrota.htm>,
<http://www.polytecpi.com/hexapod.htm>

⁴⁸<http://www.te.plk.af.mil/tsx5home/frame.htm>

⁴⁹<http://pages.prodigy.com/AUGUST/aacts.htm>,
<http://pages.prodigy.com/AUGUST/isb.htm>



Figure 2.42: *Le positionneur de l'European Synchrotron Radiation Facility. Ce robot permet de déplacer des charges jusqu'à 500 kg avec une précision meilleure que le micromètre.*

navires, en particulier le transfert de conteneur (système « AACTS » : *Automated All-weather Cargo Transfer System*).

Pour conclure cette section mentionnons l'existence d'un ensemble éducatif, le EX 800, distribué par la société DeltaLab⁵⁰, constitué d'une plate-forme de Gough avec des vérins électriques, commandable par un PC et d'une maquette permettant de changer aisément la position des articulations passives.

2.6. Notion de manipulateurs standards

Pour illustrer les problèmes des manipulateurs parallèles nous limiterons le plus souvent notre étude aux robots de type robot général.

Trois cas particuliers de ce type de robot retiendront parfois notre attention (figure ??). Ils ont en commun d'avoir une base et un plateau mobile plan et

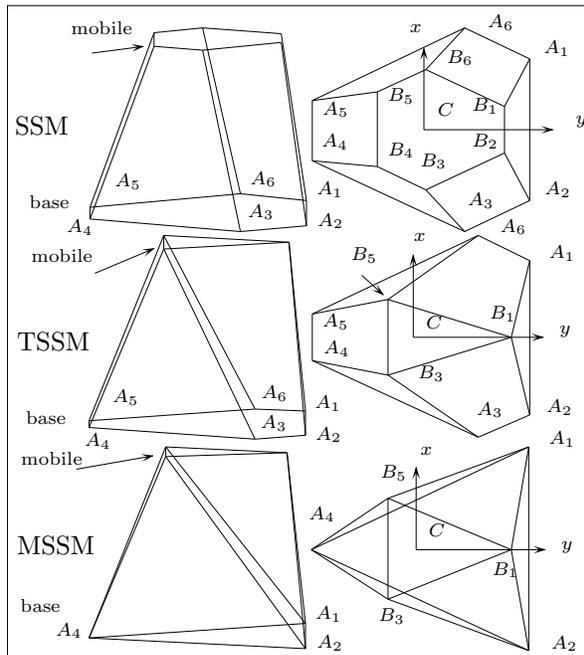


Figure 2.43: *Les manipulateurs plus spécialement étudiés dans cet ouvrage : SSM, TSSM, MSSM, en perspective et vue de dessus.*

se distinguent par la disposition des points d'articulation. Le premier, désigné sous le nom de MSSM, sera celui dont la base et l'organe terminal sont des triangles (comme l'octaèdre articulé de Bricard [45]). Le second, du nom de

⁵⁰DeltaLab, 38340 Voreppe

TSSM, aura comme organe terminal un triangle et une base hexagonale. Le dernier cas est celui du SSM où les deux plateaux sont des hexagones.

Pour illustrer nos propos sur les manipulateurs avec des chaînes de type \underline{PRRS} nous utiliserons principalement l'architecture du poignet actif développé à l'INRIA représenté en figure ??, que nous désignerons simplement sous le nom de poignet actif.

2.7. Exercices

Exercice 2.1: Montrer que le robot plan de Daniali (figure ??) est en fait un cas particulier de robot de type 3- \underline{PRP} .

Exercice 2.2: Montrer que le manipulateur à 3 degrés de liberté de la figure ?? a un indice de parallélisme au sens de Earl de 1.

Exercice 2.3: Montrer comment la prise en compte de la géométrie influe sur le calcul de la mobilité du robot de Lambert (figure ??).

Exercice 2.4: Calculer la mobilité du robot sphérique de Gosselin présenté en figure ??.

Exercice 2.5: Montrez que le robot de Lee (figure ??) est un manipulateur pleinement parallèle au sens de Earl.

Exercice 2.6: Montrer que la plate-forme de Stewart a un indice de parallélisme au sens de Earl de 1 bien que ce ne soit pas un robot pleinement parallèle.

Exercice 2.7: Montrer que le robot «Hexa» est pleinement parallèle au sens de Gosselin.

Problème 2.1: Existe-t-il une méthode de synthèse des manipulateurs parallèles permettant d'obtenir une architecture à degrés de liberté spécifiés?

Problème 2.2: Existe-t-il une architecture de robot à 6 degrés de liberté pleinement parallèle découplé sans triple rotule?

Table des matières

Chapitre 3

Modèle géométrique inverse et jacobien

Dans ce chapitre nous examinons les relations existant entre les coordonnées articulaires d'un manipulateur parallèle et la configuration de l'organe terminal. Nous étudions le passage de cette configuration aux coordonnées articulaires c'est-à-dire le *modèle géométrique inverse*.

Puis on établira les relations entre les vitesses généralisées et les vitesses articulaires, c'est-à-dire que l'on déterminera les *matrices jacobienne et jacobienne inverse*. Nous montrons qu'en général les formules inverses sont simples mais qu'en revanche les formules directes sont complexes.

3.1. Modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse consiste à établir la valeur des variables articulaires des chaînes en fonction de la configuration de l'organe terminal.

3.1.1. Méthode générale d'obtention

Si l'on considère chacune des chaînes liant la base au plateau mobile on va noter A l'extrémité de la chaîne reliée à la base et B celle liée au plateau mobile. Par construction les coordonnées de A dans le repère de base sont connues et celles de B peuvent être déterminées à partir de la position et de l'orientation du plateau mobile. Si l'on note par \mathbf{X} les coordonnées généralisées du plateau

mobile on a donc :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AO} + \mathbf{OB} = \mathbf{H}_1(\mathbf{X}) \quad (3.1)$$

Dans la chaîne reliant A à B nous connaissons maintenant les positions des points extrêmes de la chaîne et nous voulons calculer ses variables articulaires (souvent seulement la variable de l'articulation motorisée). On s'est donc ramené au calcul du modèle géométrique inverse d'une chaîne seule. On peut déjà remarquer que pour une chaîne donnée les seules variables qui interviennent sont les coordonnées généralisées du plateau mobile et les variables articulaires de la chaîne considérée mais pas celles des autres chaînes : la résolution peut donc se faire en parallèle pour chacune des chaînes. Les coordonnées articulaires Θ de la chaîne permettent la détermination de \mathbf{AB} avec l'aide éventuelle de \mathbf{X} .

$$\mathbf{AB} = \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta) \quad (3.2)$$

Le calcul des variables articulaires va donc se faire en résolvant l'équation :

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta)$$

Dans le cas le plus général (par exemple pour une chaîne série 6 – R) cette résolution pourrait être complexe. Fort heureusement comme le fait remarquer Bouanane [41] les chaînes utilisées pour les robots parallèles sont en général très simples et la résolution ne pose pas de problème. L'établissement du modèle géométrique inverse est évidemment essentielle pour la commande en position des robots parallèles.

Pour éclairer notre propos nous allons calculer le modèle géométrique inverse de quelques architectures de robot comportant différentes chaînes.

3.1.1.1. Manipulateurs plans

On considère le robot plan à 3 degrés de liberté de type 3 – \underline{RRR} (figure ??).

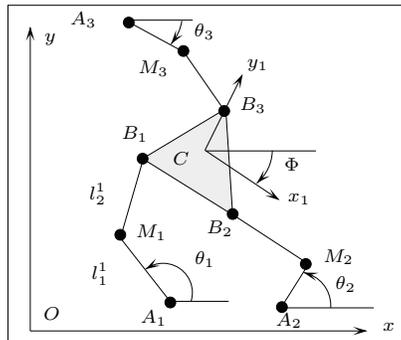


Figure 3.1: Le robot plan de type 3 – \underline{RRR}

La donnée de la position de C et de l'angle de rotation Φ (qui permet de calculer la matrice de rotation R) permet de calculer la position des points B_i . On a :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AO} + \mathbf{OC} + R\mathbf{CB}_r = \mathbf{H}_1(\mathbf{X}) \quad (3.3)$$

On écrit ensuite que B_i appartient au cercle centré en M_i (dont les coordonnées dépendent des angles θ_i qui sont les coordonnées articulaires) de rayon l_2^i :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AO} + \mathbf{OM}_i(\theta_i) + l_2^i \mathbf{n} = \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta) \quad (3.4)$$

où \mathbf{n} est un vecteur unitaire arbitraire. On voit alors que le modèle géométrique inverse obtenu en écrivant $\mathbf{H}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta)$ revient à la détermination des coordonnées des M_i , chacun étant à l'intersection de deux cercles : il existera donc huit solutions au modèle géométrique inverse.

3.1.1.2. Manipulateurs à chaînes de type $RR\underline{PS}$

Dans le cas des manipulateurs avec ce type de chaîne, l'actionneur agit sur l'articulation P (comme, par exemple, pour le SSM avec ces deux plateaux hexagonaux reliés par 6 segments A_iB_i , figure ??). Il s'agit donc de déterminer la longueur ρ du segment AB . On peut écrire :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AO} + \mathbf{OC} + R\mathbf{CB}_r = \mathbf{H}_1(\mathbf{X}) \quad (3.5)$$

où les vecteurs \mathbf{AO} , \mathbf{CB}_r sont déterminés par la géométrie de la base. Si \mathbf{n} est

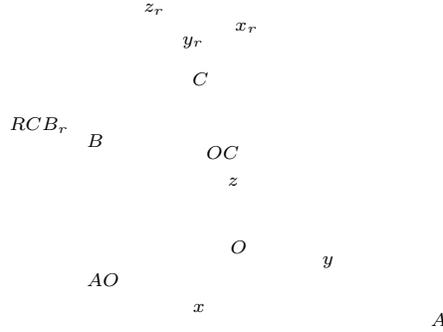


Figure 3.2: Les vecteurs fondamentaux pour l'établissement du modèle géométrique inverse d'un robot à chaîne de type $RR\underline{PS}$.

le vecteur unitaire du segment on a :

$$\mathbf{AB} = \rho \mathbf{n} = \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta) \quad (3.6)$$

Les coordonnées articulaires ρ_i sont donc déterminées par :

$$\rho_i = \|\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i\| = \|\mathbf{A}_i\mathbf{O} + \mathbf{OC} + R\mathbf{CB}_{i_r}\| \quad (3.7)$$

On peut constater que la quantité d'opérations nécessaires à ce calcul est relativement faible. Comme prévu nous remarquons que la longueur d'un segment ne dépend que de la configuration de l'organe terminal et pas de la longueur des autres segments. A titre d'idée les temps de calcul du modèle géométrique inverse pour diverses entrées et sorties sont donnés dans la table ??.

Sortie/Entrée	position, R	position, angles d'Euler
longueurs segments	0,08	0,155
longueurs segments, \mathbf{n}	0,11	0,17
longueurs,orientation segments	0,27	0,36

Tableau 3.1: Temps de calcul du modèle géométrique inverse en ms pour les chaînes $RRPS$.

Remarque

A partir de l'équation (??) le carré de la longueur d'un segment s'écrit :

$$\rho^2 = \|\mathbf{AO}\|^2 + \mathbf{CB}_r \cdot \mathbf{CB}_r + 2(\mathbf{AO} + R\mathbf{CB}_r) \cdot \mathbf{OC} + 2\mathbf{AO} \cdot R\mathbf{CB}_r + \mathbf{OC} \cdot \mathbf{OC} \quad (3.8)$$

Nous remarquons que cette expression contient des membres linéaires en terme des coordonnées de C et une partie quadratique en ces mêmes termes, $\mathbf{OC} \cdot \mathbf{OC}$. Ce dernier terme est identique quel que soit le segment considéré. Si l'on effectue la différence entre les carrés des longueurs de deux segments, ce terme quadratique va donc disparaître et seuls subsisteront les termes linéaires. Par conséquent, si l'on effectue cette différence pour trois couples de segment on obtiendra un système linéaire de trois équations à 3 inconnues. On pourra résoudre ce système et obtenir les coordonnées de C uniquement à partir de la matrice de rotation et des longueurs des segments.

3.1.1.3. Manipulateurs à chaînes de type \underline{PRRS}

Dans ce cas la motorisation s'effectue sur l'articulation prismatique, comme dans le cas du poignet actif. L'équation (??) donnant \mathbf{H}_1 reste valide. La distance l du centre du cardan au point B , c'est-à-dire la norme du vecteur \mathbf{AB} , est fixée et le vecteur \mathbf{AO} dépend d'un paramètre unique (figure ??). Supposons que l'axe de l'articulation prismatique soit défini par le vecteur unitaire \mathbf{u} et que la position au repos du vérin soit A_0 .

Si l'on introduit la variable articulaire λ comme déplacement du point A nous pouvons écrire :

$$\mathbf{AO} = \mathbf{AA}_0 + \mathbf{A}_0\mathbf{O} = -\lambda\mathbf{u} + \mathbf{A}_0\mathbf{O} \quad (3.9)$$

ce qui conduit à :

$$\mathbf{AB} = -\lambda\mathbf{u} + \mathbf{A}_0\mathbf{B} = \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta) \quad (3.10)$$

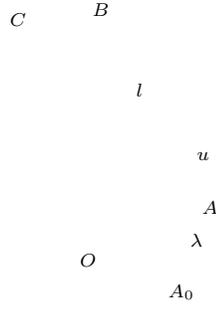


Figure 3.3: Les paramètres pour l'établissement du modèle géométrique inverse des manipulateurs à chaînes PRRS.

où $\mathbf{A}_0\mathbf{B}$ se calcule simplement à partir de la configuration du manipulateur. On peut alors calculer la norme du vecteur \mathbf{AB} par :

$$\|\mathbf{AB}\|^2 = l^2 = \lambda^2 - 2\lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}_0\mathbf{B} + \mathbf{A}_0\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}_0\mathbf{B} \quad (3.11)$$

avec

$$\mathbf{A}_0\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}_0\mathbf{B} = \mathbf{OC}\cdot\mathbf{OC} + \mathbf{A}_0\mathbf{O}\cdot\mathbf{A}_0\mathbf{O} + \mathbf{CB}_r\cdot\mathbf{CB}_r + 2\mathbf{A}_0\mathbf{C}\cdot\mathbf{RCB}_r \quad (3.12)$$

Nous avons donc à résoudre l'équation du deuxième degré (??) pour calculer le déplacement correspondant à une configuration donnée, ce qui conduira généralement à deux solutions. Ces deux solutions correspondent géométriquement aux deux points d'intersection de la sphère centrée en B , de rayon l , sur laquelle se trouve le point A , avec la droite passant par A_0 , de vecteur directeur \mathbf{u} . Il faudra donc effectuer un choix entre ces deux solutions, le plus généralement reposant sur une comparaison avec les courses maximales. Là aussi le calcul du déplacement d'un segment ne dépend que de la configuration de l'organe terminal et pas des déplacements des autres segments. Notons aussi que la remarque de la page ?? est toujours valable.

3.1.1.4. Manipulateurs à chaînes de type RRRS

Dans cette chaîne le point d'articulation A est entraîné en rotation autour d'un axe de vecteur unitaire \mathbf{u} et se trouve sur un cercle de rayon r et de centre A_0 (figure ??). La coordonnée articulaire du segment est alors l'angle β entre le vecteur \mathbf{AA}_0 et un vecteur unitaire arbitraire \mathbf{X}_1 perpendiculaire à \mathbf{u} .

Si l'on pose $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{u} \wedge \mathbf{X}_1$ on peut écrire :

$$\mathbf{AA}_0 = r(\cos \beta \mathbf{X}_1 + \sin \beta \mathbf{Y}_1) \quad (3.13)$$

On a alors :

$$\mathbf{AB} = r(\cos \beta \mathbf{X}_1 + \sin \beta \mathbf{Y}_1) + \mathbf{A}_0\mathbf{B} = \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta) \quad (3.14)$$

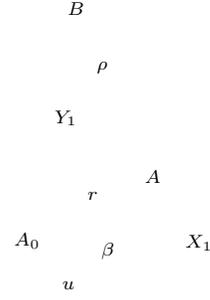


Figure 3.4: Les paramètres pour l'établissement du modèle géométrique inverse des manipulateurs à chaînes RRRS.

On peut calculer la norme du vecteur \mathbf{AB} par :

$$\|\mathbf{AB}\|^2 = \rho^2 = r^2 + 2r \cos \beta \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{A}_0 \mathbf{B} + 2r \sin \beta \mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{A}_0 \mathbf{B} + \mathbf{A}_0 \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_0 \mathbf{B} \quad (3.15)$$

Si l'on pose $x = \tan \frac{\beta}{2}$ et $\mathbf{Y} = \mathbf{A}_0 \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_0 \mathbf{B} - \rho^2 + r^2$, cette équation s'écrit :

$$x^2(\rho^2 - r^2 - \mathbf{Y} + 2r \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{A}_0 \mathbf{B}) - (4r \mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{A}_0 \mathbf{B})x - \mathbf{Y} - 2r \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{A}_0 \mathbf{B} = 0 \quad (3.16)$$

Nous obtenons une fois de plus une équation du deuxième degré en x et donc deux solutions possibles pour β . Géométriquement cela correspond aux deux intersections possibles entre la sphère centrée en B , sur laquelle se trouve A , et le cercle centré en A_0 . Cette résolution conduit cependant parfois à des singularités mathématiques du type 0/0 comme l'a montré Codourey [65] pour le robot «Delta».

3.1.1.5. Manipulateurs sphériques

Le modèle géométrique inverse des manipulateurs sphériques a été étudié par différents auteurs : Craver [72], Gosselin [123] et Innocenti [187]. En accord avec les notations de Gosselin nous appelons $\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i$ les vecteurs des axes des articulations en allant de la base vers l'organe terminal (figure ??). Pour simplifier nous supposons que les axes des moteurs sont coplanaires. L'angle entre $\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i$ est noté α_1 et α_2 désigne l'angle entre $\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i$, ces deux angles étant constants. Lorsque l'orientation de l'organe terminal est fixée les vecteurs \mathbf{v}_i sont connus. On peut poser :

$$\mathbf{u}_i = [\sin \mu_i, -\cos \mu_i, 0]$$

Si θ_i est la variable articulaire correspondant à la rotation des moteurs on a :

$$\mathbf{w}_i = \begin{pmatrix} \cos \mu_i \cos \theta_i \sin \alpha_1 + \sin \mu_i \cos \alpha_1 \\ \sin \mu_i \cos \theta_i \sin \alpha_1 - \cos \mu_i \cos \alpha_1 \\ \sin \theta_i \sin \alpha_1 \end{pmatrix}$$

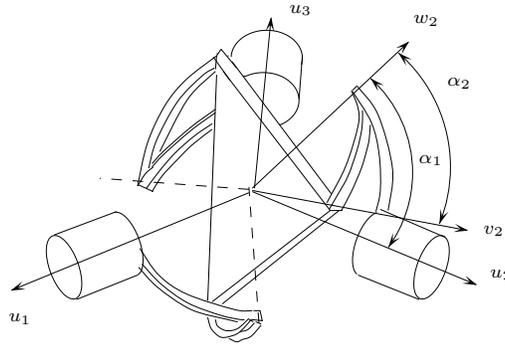


Figure 3.5: Notation pour les robots sphériques.

on a de plus :

$$\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_i = \cos \alpha_2$$

relation qui, une fois développée, donne $\mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta) = 0$. Une manipulation simple permet de déduire de cette relation que les solutions doivent satisfaire une équation quadratique, qui peut donc admettre deux solutions. Ce type de manipulateur présente donc la caractéristique d'avoir au total 8 solutions pour le modèle géométrique inverse.

3.1.2. Extremums des variables articulaires

Lors de la conception d'un robot parallèle il est important de déterminer quelles seront les valeurs minimum et maximum des variables articulaires lorsque l'organe terminal doit pouvoir parcourir un espace de travail connu. Dans cette section nous présentons une méthode de détermination de ces extremums pour un robot général pour tout type *d'espace de travail en translation*.

3.1.2.1. Extremums pour un parallélépipède

Supposons tout d'abord que l'espace de travail est un parallélépipède rectangle. Lorsque le point C se déplace dans ce parallélépipède les points d'articulation B se déplacent dans un parallélépipède de même taille obtenu en translatant le parallélépipède décrit par C par le vecteur \mathbf{CB} , constant puisque l'orientation est fixée. Pour des raisons physiques on peut supposer que ce parallélépipède ne contient pas le point d'articulation A . Dans ces conditions les résultats suivants sont immédiats :

- la longueur maximum des segments est obtenue lorsque le point B occupe l'un des sommets du parallélépipède
- la longueur minimum des segments est le minimum :

- des distances du point A aux sommets du parallélépipède,
- des distances du point A à sa projection A_p^i dans le plan contenant la face i du parallélépipède lorsque A_p^i appartient à la face i .

Pour obtenir les extremums des longueurs des segments il suffit donc de calculer les longueurs des segments pour les 8 sommets du parallélépipède, de trouver les points projection de A sur les faces du parallélépipède (il y en aura au plus deux), puis de calculer la distance de A à ces projections. On aura ensuite à comparer au plus 10 distances.

3.1.2.2. Extremums pour une sphère

Supposons maintenant que l'espace de travail est une sphère. Lorsque le point C se déplace dans sa sphère les points d'articulation B se déplacent dans une sphère S de même rayon obtenue en translatant la sphère décrite par C par le vecteur \mathbf{CB} , constant puisque l'orientation est fixée. Pour des raisons physiques on peut supposer que cette sphère ne contient pas le point d'articulation A . Il est clair que les distances extrémales de A à B sont obtenues pour les points d'intersection de la sphère S avec la droite passant par A et le centre de S .

3.1.2.3. Extremums pour un espace quelconque

Supposons finalement que l'espace de travail soit défini par un ensemble de coupes polygonales horizontales à différentes hauteurs, contenant le même nombre de sommets. Entre deux sections, l'espace de travail est le polyèdre obtenu en joignant les sommets de même numéro des deux polygones (figure ??). Sans perte de généralité on ne va considérer que l'espace de tra-

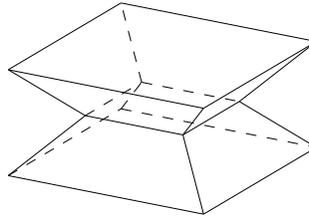


Figure 3.6: *Exemple d'espace de travail défini par des coupes polygonales horizontales.*

vail compris entre deux sections (il suffira de répéter le processus pour chaque couple successif de coupes) et l'on cherche à déterminer les extremums avec une précision ϵ fixée. Cet espace va être décomposé en autant de boîtes que nécessaire pour déterminer les longueurs extrémales. Une liste de boîte, initialisée avec la boîte englobante de l'espace de travail B_0 , est maintenue à jour dans l'algorithme. De plus un tableau est créé pour sauvegarder les longueurs extrémales trouvées lors des itérations de l'algorithme.

A l'itération k l'algorithme effectue les étapes suivantes :

1. si la boîte B_k est complètement en dehors de l'espace de travail on passe à la boîte suivante dans la liste.
2. si la boîte B_k est complètement à l'intérieur de l'espace de travail on calcule les longueurs extrémales pour cette boîte. Le tableau des longueurs extrémales est mis à jour.
3. si la boîte B_k est partiellement à l'intérieur de l'espace de travail on calcule les longueurs extrémales pour cette boîte.
 - (a) si toutes les longueurs sont incluses dans les limites définies dans le tableau des longueurs extrémales on passe à la boîte suivante.
 - (b) sinon si pour chaque segment les écarts entre les longueurs extrémales pour la boîte B_k n'excèdent pas ϵ le tableau des longueurs extrémales est mis à jour avec la valeur moyenne des longueurs extrémales et l'on passe à la boîte suivante.
 - (c) sinon on crée 8 nouvelles boîtes à partir de B_k en divisant chacune de ses dimensions par 2. Ces boîtes sont placées à la fin de la liste et l'on passe à la boîte suivante dans la liste.

L'algorithme stoppe lorsque la liste est vide. Cet algorithme permet de déterminer de manière très efficace les extremums des longueurs des segments, avec une précision arbitraire. Il permet de gérer n'importe quel type de définition de l'espace de travail si l'on dispose d'un test permettant de statuer sur l'appartenance d'une boîte à l'espace de travail.

Les temps de calcul des différents algorithmes s'établissent de la manière suivante : boîte (0,99 ms), sphère (3,4 ms), région avec une précision sur les longueurs extrémales d'au moins 0.02% (3160 ms).

3.2. Matrice jacobienne inverse

Nous avons obtenu dans la section précédente une relation entre les variables articulaires actives (celles des articulations motorisées) et les coordonnées généralisées du type :

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta) - \mathbf{H}_1(\mathbf{X}) = 0$$

Comme le font remarquer Gosselin et Angeles [127] et Ling [257] par simple différentiation on obtient une relation du type :

$$\mathbf{U}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{V}\dot{\Theta} = 0$$

où \mathbf{U} , \mathbf{V} sont des matrices. On peut déduire de cette relation une équation de la forme :

$$\dot{\Theta} = J^{-1} \dot{\mathbf{X}}$$

où J^{-1} est une matrice appelée la *matrice jacobienne inverse*.

La matrice jacobienne inverse peut être définie de deux manières : soit la matrice établissant la relation entre les vitesses cartésiennes et angulaires et les vitesses articulaires, que l'on appellera *matrice jacobienne inverse cinématique* (et dont on notera qu'elle n'est pas une matrice jacobienne au sens mathématique du terme puisqu'il n'existe pas de représentation de l'orientation d'un solide dont la dérivée par rapport au temps corresponde à la vitesse angulaire du solide), soit, après avoir choisi une représentation de l'orientation, la matrice reliant les vitesses cartésiennes de l'organe terminal et les variations de la représentation de l'orientation aux vitesses articulaires. Si l'on a choisi comme représentation de l'orientation de l'organe terminal les angles d'Euler on obtiendra ainsi la matrice J_e que l'on appellera *matrice jacobienne inverse des angles d'Euler*. Notons que la matrice jacobienne inverse cinématique est évidemment essentielle pour la commande en vitesse des robots parallèles.

3.2.1. Jacobienne inverse des angles d'Euler

Les équations fondamentales du modèle géométrique inverse expriment directement les variables articulaires comme fonctions des paramètres de position et d'orientation du plateau mobile. Par simple dérivation on peut en déduire la matrice inverse jacobienne pour toute représentation de l'orientation comme nous allons le montrer sur un exemple.

3.2.1.1. Exemple : manipulateurs à chaînes de type $RRPS$

Notons (x_u, y_u, z_u) les composantes du vecteur \mathbf{AB} . On a donc :

$$\rho^2 = \|\mathbf{AB}\|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \quad (3.17)$$

Ce qui amène à :

$$\rho \Delta \rho = x_u \Delta x_u + y_u \Delta y_u + z_u \Delta z_u \quad (3.18)$$

Remarquons que l'expression de \mathbf{AB} (??) conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{dx_u}{dx_c} &= \frac{dy_u}{dy_c} = \frac{dz_u}{dz_c} = 1 \\ \frac{dx_u}{dy_c} &= \frac{dx_u}{dz_c} = \frac{dy_u}{dx_c} = \frac{dy_u}{dz_c} = \frac{dz_u}{dx_c} = \frac{dz_u}{dy_c} = \frac{dz_u}{d\psi} = 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons que les trois premiers éléments d'une ligne de cette matrice jacobienne inverse sont :

$$\frac{x_u}{\rho}, \frac{y_u}{\rho}, \frac{z_u}{\rho}$$

Pour la partie orientation le terme de l'équation (??) contenant les paramètres d'orientation est le terme $(\mathbf{OC} + \mathbf{AO})R\mathbf{CB}_r$. On en déduit que les trois derniers

éléments d'une ligne de la matrice jacobienne inverse sont :

$$(x_c - x_a) \frac{dx_u}{d\psi} + (y_c - y_a) \frac{dy_u}{d\psi}, (x_c - x_a) \frac{dx_u}{d\theta} + (y_c - y_a) \frac{dy_u}{d\theta} \\ + z_c \frac{dz_u}{d\theta}, (x_c - x_a) \frac{dx_u}{d\phi} + (y_c - y_a) \frac{dy_u}{d\phi} + z_c \frac{dz_u}{d\phi}$$

Le temps de calcul de la matrice jacobienne inverse des angles d'Euler pour un robot général s'établit à 0,12 ms avec comme entrée les positions et les angles d'Euler. Pour les manipulateurs d'architecture différente la dérivation est similaire.

3.2.2. Jacobienne inverse cinématique

Le calcul de la matrice jacobienne inverse cinématique repose sur la formule de résolution du modèle géométrique inverse dont la forme générale est donnée par l'équation (??). La vitesse d'un point B du plateau mobile s'exprime en fonction de la vitesse du point de référence C par :

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_C + \mathbf{B}\mathbf{C} \wedge \boldsymbol{\Omega} \quad (3.19)$$

Considérons une chaîne i avec une extrémité A_i liée à la base et l'autre extrémité B_i liée au plateau mobile. En utilisant la relation précédente on peut écrire :

$$\mathbf{A}_i \dot{\mathbf{B}}_i = \mathbf{V}_C + \mathbf{B}_i \mathbf{C} \wedge \boldsymbol{\Omega} \quad (3.20)$$

Si l'on pose :

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_C \\ \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix}$$

l'équation (??) peut s'écrire sous forme matricielle par :

$$\mathbf{A}_i \dot{\mathbf{B}}_i = U_i \dot{\mathbf{X}} \quad (3.21)$$

où U_i est généralement une matrice de dimension 1×6 . Si l'on note par $\mathbf{A}\dot{\mathbf{B}}$ le vecteur dont les composantes sont les $\mathbf{A}_i \dot{\mathbf{B}}_i$ pour chaque chaîne on peut écrire :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{B}} = U \dot{\mathbf{X}} \quad (3.22)$$

où U est la matrice constituée des lignes U_i . On peut obtenir le même type de relation à partir de l'équation (??) :

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Theta})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} \dot{\boldsymbol{\Theta}} + \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Theta})}{\partial \mathbf{X}} \dot{\mathbf{X}} \quad (3.23)$$

En combinant les équations (??,??) on obtient :

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Theta})}{\partial \boldsymbol{\Theta}}^{-1} \left(U - \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Theta})}{\partial \mathbf{X}} \right) \dot{\mathbf{X}} \quad (3.24)$$

La matrice inverse jacobienne cinématique J^{-1} s'écrit donc :

$$J^{-1} = \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta)^{-1}}{\partial \Theta} \left(U - \frac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{X}, \Theta)}{\partial \mathbf{X}} \right) \quad (3.25)$$

Notons qu'une méthode générale de calcul de l'inverse jacobienne a été proposée par Xu [464]. Chen [51] a aussi essayé de proposer un formalisme plus générique : les contraintes de la tâche (par exemple effectuer un suivi de trajectoire) sont ajoutées aux équations de la cinématique pour aboutir à une inverse jacobienne augmentée qui permet de calculer les vitesses articulaires en moins d'opérations qu'en calculant d'abord la matrice jacobienne inverse puis en introduisant les équations de contraintes.

La matrice inverse jacobienne cinématique permet aussi de caractériser la précision du manipulateur en fonction des erreurs de mesure sur Θ . Si ces erreurs sont bornées ($\Theta \cdot \Theta \leq 1$) par utilisation de la jacobienne inverse on obtient une relation similaire sur les variables cartésiennes généralisées qui sont alors inclus dans un ellipsoïde, *l'ellipsoïde de manœuvrabilité*. La forme, le volume de cette ellipsoïde permettent de caractériser la dextérité du manipulateur.

3.2.2.1. Exemple : manipulateurs à chaînes de type $RR\underline{P}S$

Nous considérons ici le cas du robot général, le modèle géométrique inverse étant décrit par l'équation (??) :

$$\rho^2 = \|\mathbf{AO}\|^2 + \|\mathbf{CB}_r\|^2 + 2(\mathbf{AO} + R\mathbf{CB}_r) \cdot \mathbf{OC} + 2\mathbf{AO} \cdot R\mathbf{CB}_r + \mathbf{OC} \cdot \mathbf{OC} \quad (3.26)$$

Par dérivation de cette équation on obtient :

$$2\rho\dot{\rho} = 2\mathbf{V}_C \cdot (\mathbf{AO} + R\mathbf{CB}_r + \mathbf{OC}) + 2\dot{\mathbf{C}}\mathbf{B} \cdot (\mathbf{AO} + \mathbf{OC}) \quad (3.27)$$

soit :

$$\rho\dot{\rho} = \mathbf{V}_C \cdot \mathbf{AB} + \dot{\mathbf{C}}\mathbf{B} \cdot \mathbf{AC} \quad (3.28)$$

On a :

$$\dot{\mathbf{C}}\mathbf{B} = \mathbf{BC} \wedge \Omega \quad (3.29)$$

On note par \mathbf{n}_i le vecteur unitaire lié au segment i et l'on remarque que :

$$\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{AB}}{\|\mathbf{AB}\|} = \frac{\mathbf{AB}}{\rho} \quad (3.30)$$

En utilisant ces résultats l'équation (??) s'écrit :

$$\dot{\rho} = \mathbf{V}_C \cdot \mathbf{n}_i + (\mathbf{BC} \wedge \Omega) \cdot \frac{\mathbf{AC}}{\rho} \quad (3.31)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\dot{\rho} = \mathbf{V}_C \cdot \mathbf{n}_i + \Omega \cdot \left(\frac{\mathbf{AC}}{\rho} \wedge \mathbf{BC} \right) \quad (3.32)$$

et en utilisant la relation $\mathbf{BC} \wedge \mathbf{BC} = 0$ on obtient finalement :

$$\dot{\rho} = \mathbf{V}_C \cdot \mathbf{n}_i + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{BC}) \quad (3.33)$$

Une ligne de la jacobienne inverse cinématique s'écrit donc :

$$[\mathbf{n}_i \quad (\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{B}_i \mathbf{C})] \quad (3.34)$$

Remarquons tout de suite que cette ligne est la transposée du vecteur de Plücker normalisée de la droite passant par les points A_i, B_i (voir la définition des coordonnées de Plücker d'une droite dans le chapitre « Configurations singulières »). Le temps de calcul nécessaire pour l'obtention de cette matrice s'établit à 0,13 ms.

3.2.2.2. Exemple : manipulateurs à chaînes de type PRRS

Si l'on reprend les équations de la cinématique inverse on peut écrire :

$$\rho_i^2 = \lambda_i^2 - 2\lambda_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_{i0} \mathbf{B}_i + \mathbf{A}_{i0} \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{A}_{i0} \mathbf{B}_i \quad (3.35)$$

En dérivant l'équation précédente on obtient :

$$\dot{\lambda}_i \lambda_i - \lambda_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{V}_{B_i} - \dot{\lambda}_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_{i0} \mathbf{B}_i + \mathbf{A}_{i0} \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{V}_{B_i} = 0 \quad (3.36)$$

où \mathbf{V}_{B_i} représente la vitesse du point B_i . Cette vitesse peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{V}_{B_i} = \mathbf{V}_C + \mathbf{B}_i \mathbf{C} \wedge \boldsymbol{\Omega} \quad (3.37)$$

En regroupant les termes on obtient :

$$-\dot{\lambda}_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{V}_C + (\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \wedge \mathbf{B}_i \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad (3.38)$$

on en déduit :

$$\dot{\lambda}_i = \frac{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i} \cdot \mathbf{V}_C + \frac{(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \wedge \mathbf{B}_i \mathbf{C})}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (3.39)$$

Nous trouvons une fois de plus qu'une ligne de la matrice jacobienne inverse cinématique correspond aux coordonnées de Plücker (non normalisées cette fois) de la droite associée au segment attaché à l'organe terminal de la chaîne. Remarquons que le vecteur des vitesses articulaires est isotrope (toutes les composantes sont identiques) lorsque la vitesse angulaire est nulle et que la vitesse cartésienne est dirigée selon le vecteur \mathbf{u} . En effet, si l'on pose $\mathbf{V}_C = \alpha \mathbf{u}$ l'équation (??) s'écrit simplement $\dot{\lambda} = \alpha$. Ainsi dans le cas du poignet actif, où les axes de translation sont tous verticaux, la troisième colonne de la jacobienne inverse cinématique sera une colonne de 1. Enfin il faut noter un problème de détermination lorsque le segment terminal est perpendiculaire au vecteur \mathbf{u} .

3.2.2.3. Exemple : manipulateurs à chaînes de type \underline{RRRS}

Dans ce cas nous avons montré que le modèle géométrique inverse pouvait s'écrire sous la forme :

$$\rho^2 = r^2 + 2r \cos \beta \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{A}_0 \mathbf{B} + 2r \sin \beta \mathbf{Y}_1 \cdot \mathbf{A}_0 \mathbf{B} + \mathbf{A}_0 \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_0 \mathbf{B} \quad (3.40)$$

En dérivant cette expression et en regroupant les différents termes on obtient :

$$\dot{\beta} = \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{V}_C + (\mathbf{AB} \wedge \mathbf{BC}) \cdot \boldsymbol{\Omega}}{r(\sin \beta \mathbf{X}_1 - \cos \beta \mathbf{Y}_1) \cdot \mathbf{A}_0 \mathbf{B}} \quad (3.41)$$

Ici aussi une ligne de la jacobienne inverse est constituée des coordonnées de Plücker non normalisées de la droite associée au segment attaché à l'organe terminal de la chaîne.

3.2.2.4. Exemple : robots à moins de 6 degrés de liberté

Dans les exemples précédents nous avons plutôt considéré les manipulateurs à 6 degrés de liberté mais, bien entendu, le calcul est identique pour les robots ayant moins de degrés de liberté. Prenons comme exemple le poignet à 3 degrés de liberté en rotation, décrit dans le chapitre « Architecture ». Le plateau mobile est lié à un mât central par l'intermédiaire d'une rotule. Les segments sont de longueur fixe et leur point d'articulation proche de la base se déplace selon un axe défini par le point A et le vecteur \mathbf{u} . On considère un des segments pour introduire le modèle géométrique inverse (figure ??). Avec les notations de la

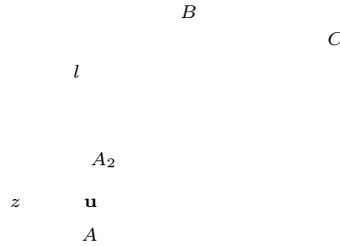


Figure 3.7: Un des segments d'un poignet à 3 degrés de liberté en rotation figure ?? on a :

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{B} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A} + \mathbf{AC} + \mathbf{CB} \quad (3.42)$$

En considérant la norme des vecteurs de l'équation précédente on peut écrire :

$$l^2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_2 \mathbf{A} + 2\mathbf{A}_2 \mathbf{A} \cdot (\mathbf{AC} + \mathbf{CB}) + \mathbf{AC} \cdot \mathbf{AC} + 2\mathbf{AC} \cdot \mathbf{CB} + \mathbf{CB} \cdot \mathbf{CB} \quad (3.43)$$

où l est la longueur fixée du segment. Dans cette équation le vecteur $\mathbf{A}_2\mathbf{A}$ s'exprime directement en fonction de la coordonnée articulaire z , le vecteur \mathbf{CB} est fixé par l'orientation du plateau mobile et le vecteur \mathbf{AC} est une constante géométrique du système. L'équation précédente conduit donc à une équation du deuxième degré en z . La matrice jacobienne cinématique inverse va être obtenue par dérivation de la relation précédente. On obtient :

$$\mathbf{A}_2\dot{\mathbf{A}}.\mathbf{A}_2\mathbf{A} + \mathbf{A}_2\dot{\mathbf{A}}.\mathbf{AB} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{B}.\mathbf{A}_2\mathbf{A} + \dot{\mathbf{C}}\mathbf{B}.\mathbf{AC} + \dot{\mathbf{C}}\mathbf{B}.\mathbf{CB} = 0 \quad (3.44)$$

En regroupant les termes et en remarquant que $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \dot{\mathbf{C}}\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}_2\dot{\mathbf{A}}.\mathbf{A}_2\mathbf{B} + \dot{\mathbf{C}}\mathbf{B}.\mathbf{A}_2\mathbf{B} = 0 \quad (3.45)$$

Or nous avons :

$$\dot{\mathbf{C}}\mathbf{B} = \mathbf{BC} \wedge \boldsymbol{\Omega} \quad (3.46)$$

Ce qui permet d'écrire l'équation (??) sous la forme :

$$\mathbf{A}_2\dot{\mathbf{A}}.\mathbf{A}_2\mathbf{B} + \boldsymbol{\Omega}.\mathbf{BC} \wedge \mathbf{A}_2\mathbf{B} = 0 \quad (3.47)$$

En remarquant que :

$$\mathbf{A}_2\dot{\mathbf{A}} = \dot{z}\mathbf{u}$$

on obtient une ligne de la matrice jacobienne inverse par :

$$\left[-\frac{(\mathbf{BC} \wedge \mathbf{A}_2\mathbf{B})}{\mathbf{A}_2\mathbf{B}.\mathbf{u}} \right] \quad (3.48)$$

3.2.3. Isotropie

La matrice jacobienne inverse permet de caractériser les variations des variables articulaires en fonction des variations des coordonnées généralisées. La commande du manipulateur se fait sur les variables articulaires et les erreurs de commande impliquent une erreur sur le positionnement du plateau mobile avec un facteur d'amplification entre les deux. Pour caractériser ce facteur d'amplification, on introduit le *nombre de condition* [391] que l'on va sommairement présenter en suivant la description de Gosselin [123] (une autre bonne introduction est présentée par Stoughton dans [422]). Considérons un système linéaire :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

où \mathbf{A} est une matrice $n \times n$. Le facteur d'amplification de l'erreur dans ce système exprime comment une erreur relative sur \mathbf{b} est multipliée pour conduire à une erreur relative sur \mathbf{x} . On suppose que l'on connaît une norme de la matrice \mathbf{A} telle que :

$$\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$$

On obtient alors :

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

le nombre de condition κ est donc défini par :

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

Le nombre de condition dépend de la norme utilisée pour la matrice. On peut utiliser par exemple la racine carré de la plus grande valeur propre de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Le nombre de condition de \mathbf{A} est alors la racine carré du rapport entre la plus grande et la plus petite des valeurs propres de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. On peut utiliser la norme Euclidienne définie par $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$ où $V = I_n/n$ (I_n matrice identité d'ordre n). Dans ces deux cas la plus faible valeur du nombre de condition est 1. Il existe toutefois un problème avec le nombre de condition : la jacobienne inverse n'est en général pas homogène du point de vue des unités. Par exemple pour un robot général ses éléments correspondant aux translations n'ont pas d'unité alors que ceux liés aux rotations ont comme unité une longueur. Pour homogénéiser la matrice jacobienne inverse des auteurs comme Ma et Angeles [270] ont proposé de diviser les éléments de rotation par une longueur comme, par exemple, la longueur des segments en position nominale ou la *longueur naturelle* définie comme celle qui minimise le nombre de condition dans une posture donnée.

Du point de vue de la commande il est souhaitable d'avoir un nombre de condition pour J^{-1} le plus petit possible, qui garantit que l'erreur due à la commande est propagée sur la position de la plate-forme mobile de la manière la plus faible possible. Mais le nombre de condition est une propriété locale qui dépend de la configuration. Les configurations où le nombre de condition vaut 1 seront appelées des *configurations isotropes*. Notons que cette notion d'isotropie est étroitement liée au rapport des dimensions de l'ellipsoïde de manoeuvrabilité. On peut aussi introduire un indice ν de conditionnement global sur l'espace de travail W du manipulateur par :

$$\nu = \frac{\int_W \left(\frac{1}{\kappa} \right) dW}{\int_W dW}$$

Ces indices de dextérité peuvent être utilisés pour optimiser un manipulateur en permettant de déterminer des géométries pour lesquelles soit existeront des configurations isotropes, soit l'indice de conditionnement global sera maximum. C'est ce que propose Gosselin [123] pour les robots plans 3-RRR, 3-PRR, pour le robot de Lee ainsi que pour le poignet sphérique [124, 130, 133, 135]. La même approche a guidé Arai pour la disposition des centres des articulations de son robot minier [14] et de sa plate-forme de Gough [422]. Elle a été aussi utilisée par Pittens [360] et Zanganeh [480] pour optimiser la dextérité d'une plate-forme de Gough et par Kokkinis [224] pour montrer l'intérêt de la redondance.

3.3. Matrice jacobienne

L'intérêt de la matrice jacobienne est de permettre de caractériser la précision minimum nécessaire que doivent avoir les capteurs internes du robot pour obtenir une erreur donnée sur les coordonnées généralisées.

Nous avons vu dans les sections précédentes que le calcul de la matrice inverse jacobienne est, dans le principe, aisé. L'expression de la matrice n'en reste pas moins relativement complexe dès que le nombre de degrés de liberté augmente, au point que l'obtention de la matrice jacobienne par inversion symbolique est difficile. Dans le cas des robots plans cette inversion sera possible et la matrice jacobienne pourrait même être obtenue directement par différentiation des équations de fermeture comme l'a montré Pennock [350]. Cependant cette méthode directe semble difficilement applicable pour les robots à 6 degrés de liberté.

3.3.1. Calcul direct des jacobiennes

Nous allons illustrer la difficulté d'obtention directe de la jacobienne sur différents exemples de robots à 6 degrés de liberté. Si l'on considère par exemple le cas des MSSM, TSSM, SSM on a intérêt à choisir le repère de référence et le repère mobile afin que les coordonnées des points d'articulation soient les plus simples possibles. On utilise alors des systèmes de calcul formel comme Maple pour tenter d'obtenir la matrice jacobienne cinématique à partir de l'expression analytique de la matrice jacobienne cinématique inverse (une méthode indirecte d'obtention de la jacobienne a été proposée par Shi [404] à partir du calcul des relations entre vitesses articulaires et vitesses généralisées : cette méthode sera décrite dans le chapitre « Cinématique »).

Étant donnée la complexité de la matrice initiale on doit décomposer le problème en calculant tout d'abord le déterminant de la matrice jacobienne cinématique inverse puis les 36 mineurs. Il est alors possible d'obtenir effectivement la matrice jacobienne cinématique pour ces trois manipulateurs après un temps de calcul relativement long. Par contre il semble plus difficile de l'obtenir pour un robot général même si Mayer [282] a montré que l'étape qui consiste à calculer le déterminant de la matrice était possible. Nous ne donnerons donc pas la formulation analytique des matrices jacobiennes mais on indique le nombre d'opérations nécessaire au calcul des déterminants pour le MSSM, le TSSM et le SSM dans la table ??.

La forme générale de ce déterminant peut présenter un intérêt. Pour le SSM on a :

$$\begin{aligned}
 |J^{-1}| &= A_{z3}z_c^3 + z_c^2(A_{z2} + A_{yz}2y_c + A_{xz}2x_c) + \\
 &A_{x2}x_c^2 + A_{y2}y_c^2 + A_{yz}z_cy_c + A_{xz}x_cz_c + A_{xy}x_cy_c + \\
 &A_{xyz}x_cz_cy_c + A_zz_c + A_yy_c + A_xx_c + \text{Cte}(\psi, \theta, \phi)
 \end{aligned}$$

Opération	MSSM	TSSM	SSM
**	24	25	26
*	1289	5128	7488
+	74	234	494
-	57	238	504

Tableau 3.2: *Nombre d'opérations pour le calcul du déterminant de la matrice jacobienne cinématique inverse*

où les coefficients A ne dépendent que de l'orientation.

Même dans le cas où l'on peut obtenir une expression développée des matrices jacobiennes le calcul à partir de l'expression symbolique sera en général long, en particulier pour les robots à 6 degrés de liberté, et la précision numérique parfois insuffisante. L'obtention pratique de la matrice jacobienne reposera donc plutôt sur une méthode numérique utilisant une procédure classique d'inversion de matrice, relativement coûteuse en temps de calcul. Pour un robot général le temps de calcul de la jacobienne des angles d'Euler et de son inverse s'établit à 2,17 ms et ce temps est de 1,78 ms pour la jacobienne cinématique et son inverse.

En tout état de cause un algorithme rapide du calcul de la jacobienne est un sujet d'étude important dans le domaine des manipulateurs parallèles et ne sera peut être résolu que par l'emploi de circuits spécialisés. C'est ce qu'a proposé Guglielmetti [149] en implantant le calcul de la matrice jacobienne sur une architecture informatique multi-processeurs.

3.4. Utilisation de la matrice jacobienne pour le choix des capteurs internes

L'erreur sur la détermination de la configuration de l'organe terminal est directement liée à l'erreur de mesure des capteurs internes par l'intermédiaire de la matrice jacobienne. Pour une erreur de mesure fixée en valeur absolue l'erreur maximale sur la position de l'organe terminal qui lui correspond, autour d'une configuration donnée, sera calculée en prenant la somme des valeurs absolues de la ligne correspondante de la jacobienne. Pour calculer cette erreur maximale dans un espace de travail donné il faut donc évaluer le maximum de cette somme sur cet espace.

Une des conséquences pratiques de la difficulté d'obtention d'une formulation analytique de la matrice jacobienne est qu'il va être délicat d'effectuer cette évaluation. Par exemple dans le cas du robot «Delta», Clavel [61] a étudié de manière systématique les erreurs de positionnement de la plate-forme en fonction des erreurs articulaires. Pour cela il étudie numériquement le maximum de la norme de la matrice jacobienne sur tout l'espace de travail, étant entendu

que son travail est simplifié par le fait que le «Delta» n'a que 3 degrés de liberté. La détermination des erreurs de positionnement maximales, par exemple pour toute posture d'un robot dans un espace de travail donné, est un sujet d'étude important.

3.4.1. Exemples pratiques

La matrice jacobienne de la «main gauche» de l'INRIA, dans sa position nominale ($x_c = y_c = 0, z_c = 53,3$ cm) est :

$$\begin{pmatrix} -3,47 & 3,47 & -0,5 & 2,97 & -2,97 & 0,5 \\ 1,425 & 1,425 & -3,72 & 2,29 & 2,29 & -3,72 \\ 0,168 & 0,168 & 0,168 & 0,168 & 0,168 & 0,168 \\ 0,056 & 0,056 & -0,048 & -0,0073 & -0,0073 & -0,048 \\ 0,024 & -0,024 & -0,037 & -0,06 & 0,06 & 0,037 \\ 0,238 & -0,238 & -0,238 & 0,238 & -0,238 & 0,238 \end{pmatrix}$$

alors que la précision des capteurs potentiométriques est de 1/100 de mm. En position nominale l'erreur maximale est de 0,1388 mm en x , 0,1487 mm en y et 0,01 mm en z . Dans le pire des cas l'erreur due à un segment est de 0,0347 mm en x , 0,0372 mm en y et 0,00168 mm en z . Il faut également noter que si les capteurs ont un biais systématique (erreur identique de même signe) il n'y aura aucune erreur de mesure en x ou en y .

Pour le poignet actif dans sa position nominale ($x_c = y_c = 0, z_c = 16,7$ cm), la matrice jacobienne est :

$$\begin{pmatrix} 1,31 & -1,31 & -0,657 & 0,657 & -0,657 & 0,657 \\ 0,0 & 0,0 & -1,1375 & 1,1375 & 1,1375 & -1,1375 \\ 0,166 & 0,166 & 0,166 & 0,166 & 0,166 & 0,166 \\ 0,0833 & 0,0833 & -0,04979 & -0,0335 & -0,0335 & -0,04979 \\ -0,0094 & 0,0094 & -0,0675 & -0,077 & 0,077 & 0,0675 \\ -0,1643 & 0,1643 & -0,1643 & 0,1643 & -0,1643 & 0,1643 \end{pmatrix}$$

La précision des capteurs potentiométriques est de 1/100 de mm. En position nominale l'erreur maximale est de 0,05248 mm en x , 0,0455 mm en y et 0,01 mm en z . Dans le pire des cas l'erreur due à un segment est de 0,0131 mm en x , 0,01375 mm en y et 0,00166 mm en z . Il faut aussi noter que si les capteurs ont un biais systématique (erreur identique de même signe) il n'y aura aucune erreur de mesure en x ou en y .

3.5. Calibrage

L'utilisation pratique du modèle géométrique inverse présenté dans les sections précédentes nécessite d'avoir une connaissance parfaite de certains éléments

géométriques du robot, en particulier si l'on désire réaliser un robot précis. Ainsi pour la plate-forme de Gough il est nécessaire de connaître la position des centres des articulations passives ainsi que les longueurs mortes des segments. Si l'on peut disposer lors de la construction d'une estimation proche de la réalité il sera peut-être quand même nécessaire de réaliser un *calibrage* du robot.

Le calibrage de mécanismes ayant des chaînes fermées est un problème qui a été considéré par Everett [101] en adaptant une méthode de calibrage des robots série : les équations de fermeture sont ajoutées comme contraintes à une fonction d'erreur à minimiser. Il semblerait cependant que cette méthode ait des problèmes de convergence dès que le nombre de degrés de liberté devient important.

Une première approche du calibrage consiste à placer la plate-forme mobile dans un certain nombre de postures en utilisant la commande articulaire, puis dans chaque cas à mesurer la posture à l'aide d'un système de mesures externe (à noter que la nature de ce système est rarement précisée à part par Amirat [10] et Maurine [281] qui utilisent un système de vision). L'erreur entre les postures mesurées et les postures de commande est ensuite minimisée par une procédure numérique qui modifie à cet effet les paramètres géométriques du robot. Cette méthode est délicate à mettre en œuvre car, comme l'a montré Wang [455], le positionnement de la plate-forme est peu sensible aux erreurs (par exemple dues aux tolérances de fabrication) sur les positions des centres des articulations.

Dans le cas du robot général Wampler [450, 451] et Masory [278] se sont intéressés à cette approche mais la méthode la plus complète semble celle proposée par Zhuang [489], légèrement modifiée par Geng [120]. Elle repose sur la mesure de la position et de l'orientation de la plate-forme dans diverses configurations où l'on conserve constantes certaines longueurs de segments. Pour chaque configuration on a :

$$(l_i + \rho_i)^2 = \|\mathbf{A}_i\mathbf{O} + \Delta\mathbf{A}_i\mathbf{O} + \mathbf{OC} + R(\mathbf{CB}_i^r + \Delta\mathbf{CB}_i^r)\|^2$$

où l_i représente la longueur morte, ρ_i la variation de longueur que l'on a appliqué pour atteindre la configuration, $\mathbf{A}_i\mathbf{O}$, \mathbf{CB}_i^r les positions estimées des centres des articulations passives, $\Delta\mathbf{A}_i\mathbf{O}$, $\Delta\mathbf{CB}_i^r$, les erreurs entre les positions réelles et les positions estimées. Le but du calibrage est de déterminer l_i , $\Delta\mathbf{A}_i\mathbf{O}$, $\Delta\mathbf{CB}_i^r$. Pour cela prenons un ensemble de mesures où la longueur du segment i est constante. En soustrayant deux équations du type précédent on obtient une équation où n'intervient plus l'inconnu l_i . Comme les erreurs $\Delta\mathbf{A}_i\mathbf{O}$, $\Delta\mathbf{CB}_i^r$ sont faibles Geng propose de linéariser l'équation obtenue. Comme nous avons 6 inconnues il suffit donc de 7 mesures pour obtenir un système linéaire de 6 équations en 6 inconnues. Après résolution la septième mesure est employée pour calculer l_i . Geng montre d'ailleurs qu'en choisissant convenablement les configurations de mesures il suffit de 13 mesures pour calibrer les 6 segments. Ces résultats de simulation montrent qu'il est préférable de prendre des configurations de mesure où seulement 3 segments ont des longueurs

fixées (cela permet de faire varier dans une plus grande mesure les configurations de la plate-forme mobile).

Il faut maintenant faire observer une erreur commune dans les papiers sur cette approche du calibrage. La qualité du calibrage est le plus souvent estimée par l'erreur résiduelle entre les postures mesurées et celles reconstruites à partir du robot calibré. Comme les méthodes proposées ont justement pour but de minimiser cette erreur il est clair qu'elle doit être faible. Mais cela ne permet en rien d'affirmer que le calibrage est correct : en effet le seul critère validant le résultat serait de vérifier qu'effectivement le robot calibré est plus proche géométriquement du robot réel que le robot qui sert à initialiser la procédure. Si ce n'est pas possible dans la réalité, les résultats de simulation montrent que l'on peut en fait parfois obtenir un robot calibré plus éloigné du robot réel que l'estimé initial, ceci en particulier en présence de bruit sur les mesures. Ce fait a été expliqué par Innocenti [200] dans un papier où il propose deux autres solutions pour le calibrage. Dans sa première méthode on effectue 7 mesures sur la posture de la plate-forme. Les longueurs des segments donnent alors 42 équations dans les 36 inconnues qui sont les coordonnées des A_i, B_i . En soustrayant les 6 équations obtenues avec une mesure on obtient un système algébrique de 36 équations en 36 inconnues. Par élimination Innocenti montre que ce système peut se ramener à un polynôme de degré 20 en une inconnue. Les solutions sont alors calculées et reportées dans les 6 équations soustraites pour en vérifier la validité. On notera cependant que rien ne garantit l'unicité de la solution. Dans une deuxième méthode il rajoute comme inconnues les longueurs mortes des segments et reprend le même principe que précédemment mais avec 8 séries de mesure. De la même manière il montre que le système obtenu se ramène à la résolution d'un polynôme de degré 20. Si cette méthode est élégante elle pose des problèmes pour son implantation et sa robustesse vis-à-vis du bruit sur les mesures reste à déterminer. Mais elle a l'intérêt de montrer que la solution du problème de calibrage n'est pas unique : une méthode de minimisation numérique comme celle de Geng va converger vers l'une des 20 solutions sans que l'on puisse garantir que cette solution soit effectivement meilleure que l'estimation initiale (à noter que la démonstration d'Innocenti revient en fait à résoudre le problème de Burmester).

Mentionnons que ce travail de calibrage est beaucoup plus simple pour les micro-robots où les équations peuvent être linéarisées comme l'on fait remarquer Arai [18] et Ojala [334].

La deuxième approche pour le calibrage est *l'auto-calibrage* : on suppose que le robot est équipé de plus de capteurs internes que nécessaire et cette information redondante est utilisée pour la calibrage sans faire appel à un système externe. C'est la méthode proposée Zhuang [490] pour le robot général et Nahvi [316] pour le manipulateur parallèle à 4 degrés de liberté de Hayward. Nous verrons dans le chapitre suivant que l'ajout de capteurs permettra de plus de simplifier la résolution du modèle géométrique direct : par conséquent cette

approche est très prometteuse.

Enfin, pour les deux approches, mentionnons un problème abordé par Nahvi [317] qui cherche à déterminer un index permettant de découvrir les postures les plus favorables au calibrage. Ce problème est encore largement ouvert.

3.6. Exercices

Exercice 3.1: Montrer que le modèle géométrique inverse des robots plans de type \underline{RRP} a deux solutions.

Exercice 3.2: Montrer que le modèle géométrique inverse des robots plans de type \underline{RPP} a deux solutions.

Exercice 3.3: Montrer que le modèle géométrique inverse des robots plans de type \underline{PPR} a une solution.

Exercice 3.4: Montrer que le modèle géométrique inverse des robots plans de type \underline{PRP} a une solution.

Exercice 3.5: Montrer que le modèle géométrique inverse d'un robot à 6 degrés de liberté, pleinement parallèle et à chaînes identiques, aura au plus 64 solutions.

Exercice 3.6: Établir la valeur des coordonnées articulaires α, β des segments d'un robot général à partir des coordonnées de ces points A, B données dans le repère absolu.

Exercice 3.7: Établir la relation quadratique caractérisant les solutions du modèle géométrique inverse des robots sphériques.

Exercice 3.8: On considère le treillis articulé de Reinholtz [379] constitué de deux MSSM posés l'un sur l'autre et dont le plateau mobile du MSSM inférieur est la base du MSSM supérieur. De plus ce plateau est constitué de trois segments de longueur variable alors que les segments des MSSM sont de longueur fixe (figure ??). Déterminer le nombre de solution de son modèle

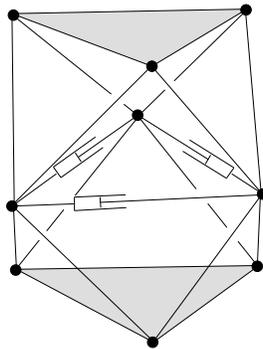


Figure 3.8: *Le treillis de Reinholtz (d'après Reinholtz [379]).*

géométrique inverse.

Exercice 3.9: On considère le robot à 6 degrés de liberté de Han, décrit dans le chapitre «Architecture». Trouvez le nombre maximal de solutions du modèle géométrique inverse de ce robot (on utilisera des résultats sur les mécanismes plans présentés dans le chapitre «Modèle géométrique direct»).

Exercice 3.10: Calculer une ligne de la matrice jacobienne cinématique inverse d'un robot de type 6 – $\underline{P}RRS$ lorsque les axes des articulations P sont verticaux pour toutes les chaînes, que la base et la plate-forme sont planes et que les angles d'Euler sont tous nuls.

Exercice 3.11: Calculer la matrice inverse jacobienne d'un SSM, dans le cas où les plateaux sont des plans et les points A_i, B_i disposés symétriquement, dans sa configuration nominale (c'est-à-dire avec des segments de longueur égale, plateaux parallèles et centre des hexagones placés le long de l'axe z). Déduisez en son déterminant.

Exercice 3.12: Calculer le déterminant de la matrice jacobienne cinématique du poignet actif en supposant que l'axe des vérins est vertical, les segments sont de longueurs identiques, le plateau mobile est un triangle, ceci pour un déplacement nul des vérins.

Exercice 3.13: Proposer une méthode de calibrage du robot «Hexa» inspirée de la méthode de Geng. Quel est le nombre minimal de mesures pour calibrer une chaîne?

Problème 3.1: Trouver une méthode de calcul rapide des matrices jacobiniennes pour les manipulateurs parallèles à 6 degrés de liberté.

Problème 3.2: Trouver une méthode permettant de calculer les maxima des sommes des valeurs absolues des lignes d'une jacobienne pour l'ensemble des configurations du plateau mobile dans un volume donné.

Problème 3.3: Existe-t-il une relation explicite entre les coordonnées des points d'articulation de la base et du plateau mobile d'un SSM permettant d'assurer qu'il sera isotrope dans une configuration donnée?

Problème 3.4: Est-il possible de déterminer les longueurs des segments d'un poignet actif, étant donnée sa géométrie, pour qu'il soit isotrope dans une configuration donnée?

Problème 3.5: Est-il possible de déterminer les postures d'un robot général qui permettent d'en assurer au mieux le calibrage?

Table des matières

Chapitre 4

Modèle géométrique direct

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la relation permettant de déterminer la posture de l'organe terminal d'un manipulateur parallèle à partir de la donnée de ses coordonnées articulaires. Cette relation présente un intérêt pratique évident pour la commande du manipulateur, en particulier pour la commande en vitesse.

Ce problème revient à résoudre le système d'équations que l'on a obtenu en calculant le modèle géométrique inverse. Nous montrons qu'en général la solution de ce problème n'est pas unique (c'est-à-dire que l'on peut assembler de différentes manières un manipulateur parallèle dont les variables articulaires sont fixées) et que l'on ne sait pas, en général, exprimer sous forme analytique les coordonnées généralisées comme fonctions des coordonnées articulaires. Nous exposerons des méthodes donnant toutes les solutions possibles à ce problème. Nous verrons qu'elles sont le plus souvent trop lourdes en temps de calcul pour être employées dans un contexte temps réel. Nous présenterons alors des méthodes de rechange plus compatibles avec les contraintes temporelles qui caractérisent l'utilisation d'un manipulateur parallèle.

4.1. Mécanismes plans

Dans cette section on considère les manipulateurs plans à 3 degrés de liberté. Les équations du modèle géométrique inverse forment un système de trois équations non-linéaires qu'il s'agit de résoudre pour trouver la solution du modèle géométrique direct. On va tout d'abord montrer que ce système peut avoir plusieurs solutions, c'est-à-dire qu'il existe plusieurs postures de l'organe

terminal respectant les valeurs fixées des variables articulaires. On peut donc assembler le manipulateur de diverses manières et c'est pourquoi l'on nomme ces différentes configurations les *modes d'assemblage* du manipulateur. Ensuite pour obtenir les solutions on manipulera les équations pour se ramener à la résolution d'un polynôme mono-variable. En préalable à ces opérations il est nécessaire de rappeler quelques notions de base en théorie des mécanismes, que l'on va illustrer sur un mécanisme particulier, le mécanisme à 4 barres.

4.1.1. Mécanisme à 4 barres

Le *mécanisme à 4 barres* est décrit en figure ?? : il n'est composé que d'articulations rotoïdes, les longueurs de ses segments sont fixées et il possède un degré de liberté.

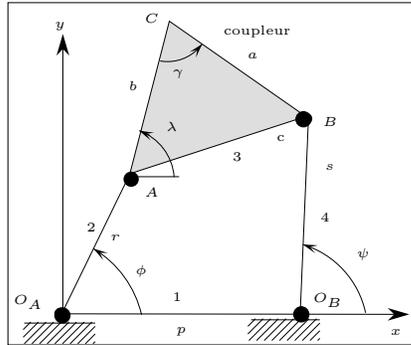


Figure 4.1: Le mécanisme à 4 barres et différentes courbes de coupleur.

Ce mécanisme est constitué de 4 barres articulées 1, 2, 3, 4. A la barre 3 est rigidement lié un corps que nous appellerons le *coupleur*, dont la géométrie est définie par les longueurs a , b et l'angle γ . Le reste du mécanisme est défini par les longueurs p , r , s des barres 1, 2, 4 et par deux angles : l'angle ϕ entre les barres 1 et 2 et l'angle ψ entre 1 et 4. Si l'on fait varier l'un de ces angles, chaque point du coupleur (C par exemple) décrit une courbe que nous appellerons *courbe de coupleur*, de nature algébrique comme l'a montré Freudenstein [111].

4.1.2. Courbe du coupleur et circularité

Le mécanisme à 4 barres, décrit précédemment, a été particulièrement bien étudié [20, 158, 178]. Nous supposons qu'un moteur entraîne en rotation le segment 2, modifiant ainsi l'angle ϕ du mécanisme et nous nous intéressons à la courbe décrite par le point C , de coordonnées (X, Y) , du coupleur qui est une sextique \mathcal{S} (la figure ?? illustre quelques exemples de courbes de coupleur¹).

¹Un programme permettant de visualiser les courbes de coupleur est disponible par ftp anonyme, répertoire `prisme/4bar` et des exemples sont visibles en

Cette sextique a une propriété particulièrement intéressante pour notre étude : elle est *tricirculaire*, c'est-à-dire qu'elle a trois points doubles sur le cercle imaginaire.

Faisons un rappel de certaines notions sur les intersections des courbes algébriques, qui nous seront très utiles par la suite. Une courbe algébrique de degré n coupe une courbe algébrique de degré m en général en nm points. Ce résultat, bien connu, peut sembler paradoxal si on l'applique aux cercles : il conduirait à l'existence de 4 points d'intersection. Ce paradoxe s'explique d'une manière simple que nous rappelons pour mémoire.

Considérons l'équation d'un cercle, dont les coordonnées du centre sont (a, b) , de rayon r :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

que l'on réécrit, en introduisant un nouveau terme, sous la forme :

$$\left(\frac{x}{w} - a\right)^2 + \left(\frac{y}{w} - b\right)^2 - r^2 = 0$$

Le terme w est simplement un facteur d'échelle. L'équation précédente est dite homogène puisque l'on peut l'écrire sous la forme :

$$(x - aw)^2 + (y - bw)^2 - r^2w^2 = 0$$

où tous les termes sont maintenant de degré 2 dans les variables xyw . Le système xyw est alors appelé un système de *coordonnées planes homogènes*. La ligne définie par $w = 0$ coupe le cercle en deux points, dont les coordonnées satisfont l'équation :

$$x^2 + y^2 = 0 \tag{4.1}$$

c'est-à-dire aux points $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ définis par :

$$\mathcal{S}_1 \begin{cases} w = 0 \\ x = iy \end{cases} \quad \mathcal{S}_2 \begin{cases} w = 0 \\ x = -iy \end{cases}$$

Ces deux points imaginaires sont appelés les *points circulaires imaginaires* et l'équation (??) définit le *cercle imaginaire*. Puisque les termes a, b, r n'interviennent pas dans les coordonnées des points circulaires imaginaires tous les cercles du plan les contiennent. Donc l'intersection de deux cercles quelconques contiendra toujours les deux points circulaires imaginaires et, par conséquent, deux cercles ne peuvent se couper en plus de deux points réels.

Si une courbe du plan contient les points $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ comme point double, triple... on dira alors que cette courbe a une *circularité* de 2, 3...

La sextique \mathcal{S} du mécanisme à 4 barres est tricirculaire ce qui signifie simplement que sa circularité est de 3. En effet (voir [178]) l'équation de la sextique exprimée en coordonnées homogènes s'écrit pour $w = 0$:

$$(x^2 + y^2)^3(a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma) = 0 \tag{4.2}$$

ce qui, en dehors du cas où le quadrilatère $O_A A B O_B$ est un triangle, se ramène à $(x^2 + y^2)^3 = 0$. La sextique contient donc les points $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ comme points triples. Remarquons aussi que la circularité de cette courbe est maximale, puisqu'une sextique ne peut avoir une circularité supérieure à 3.

4.1.3. Modèle géométrique du robot 3 – $R\underline{P}R$

On considère le robot 3 – $R\underline{P}R$ décrit en figure ?? . Pour tenter d'estimer

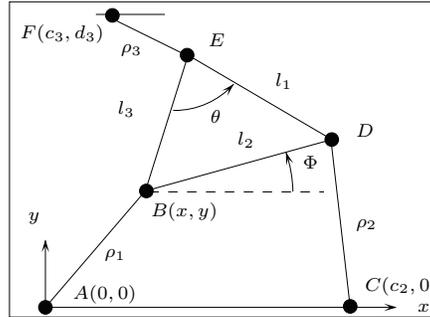


Figure 4.2: Le robot 3 – $R\underline{P}R$

a priori un majorant du nombre de modes d'assemblage, nous examinons un sous-mécanisme obtenu à partir du mécanisme équivalent en désolidarisant une des articulations du plateau mobile de son segment.

4.1.3.1. Modes d'assemblage

Si l'on considère le mécanisme défini en figure ?? et que l'on désaccouple le segment $A_3 B_3$ le reste du mécanisme devient un mécanisme à 4 barres articulées. Le nombre de points d'intersection de la courbe du coupleur C avec le cercle de centre A_3 et de rayon $\|A_3 B_3\|$ donne alors le nombre de modes d'assemblage possible. Or la courbe décrite par C est une sextique que l'on coupe par un cercle : le nombre de points d'intersection est donc de 12 au maximum. Toutefois les points $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, au vu de la tricircularité de la sextique, vont compter pour 6 points d'intersection imaginaires. On peut donc affirmer qu'il existe au plus 6 modes d'assemblage possibles pour ce type de manipulateur parallèle.

4.1.3.2. Modèle géométrique direct polynomial

Le but de l'étude est d'obtenir une *équation polynomiale du modèle géométrique direct*, c'est-à-dire ramener le problème initial de résolution d'un système de 3 équations à la résolution d'une équation polynomiale mono-variable.

Différentes méthodes ont été proposées comme celles de Kassner [212], Pennock [350], Peysah [353], et Sefrioui [397]. Nous utiliserons la technique proposée par C. Gosselin [129] avec les notations de la figure ???. L'origine du repère de référence est choisie ici comme étant le centre (A) d'une des articulations et son axe x est défini par la ligne qui joint A à un autre centre d'articulation (C). L'axe y est alors un axe perpendiculaire à x . On définit la position du plateau mobile par la position du centre d'articulation B associé au point A , dont les coordonnées sont notées (x, y) . L'orientation du plateau mobile est déterminée par l'angle Φ entre l'axe x et un des côtés du plateau mobile (ici BD). Le plateau mobile lui-même est constitué par les 3 points B, D, E et sa géométrie est parfaitement définie par la longueur de ses 3 côtés (l_1, l_2, l_3) et par un des angles au sommet (ici l'angle θ entre les côtés EB et BD). Les longueurs des 3 segments sont notées ρ_1, ρ_2, ρ_3 . Avec ces conventions les coordonnées des 3 centres des articulations liées au repère de référence sont :

$$A : (0, 0) \quad C : (c_2, 0) \quad F : (c_3, d_3)$$

Dans ces conditions les équations du modèle géométrique inverse s'écrivent :

$$\rho_1^2 = x^2 + y^2 \quad (4.3)$$

$$\rho_2^2 = (x + l_2 \cos \Phi - c_2)^2 + (y + l_2 \sin \Phi)^2 \quad (4.4)$$

$$\rho_3^2 = (x + l_3 \cos(\Phi + \theta) - c_3)^2 + (y + l_3 \sin(\Phi + \theta) - d_3)^2 \quad (4.5)$$

que l'on peut écrire sous une forme abrégée :

$$\rho_1^2 = x^2 + y^2 \quad (4.6)$$

$$\rho_2^2 = x^2 + y^2 + Rx + Sy + Q \quad (4.7)$$

$$\rho_3^2 = x^2 + y^2 + Ux + Vy + W \quad (4.8)$$

On peut écrire le système des équations (??-??) sous une forme plus simple :

$$\rho_1^2 = x^2 + y^2 \quad (4.9)$$

$$\rho_2^2 - \rho_1^2 = Rx + Sy + Q \quad (4.10)$$

$$\rho_3^2 - \rho_1^2 = Ux + Vy + W \quad (4.11)$$

Les équations (??-??) sont linéaires en x, y et l'on résout ce système, dont le déterminant est $RV - SU$, pour obtenir :

$$x = -(SA_1 - VA_2)/(RV - SU) \quad y = (RA_1 - UA_2)/(RV - SU)$$

avec

$$A_1 = \rho_3^2 - \rho_1^2 - W \quad A_2 = \rho_2^2 - \rho_1^2 - Q$$

Sous réserve que le déterminant Δ du système soit non nul, on reporte alors ce résultat dans l'équation (??) pour obtenir l'équation :

$$(SA_1 - VA_2)^2 + (RA_1 - UA_2)^2 - \rho_1^2(RV - SU)^2 = 0 \quad (4.12)$$

qui ne dépend que de la variable Φ . On utilise alors la substitution classique en définissant :

$$T = \tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) \quad \cos(\Phi) = \frac{1 - T^2}{1 + T^2} \quad \sin(\Phi) = \frac{2T}{1 + T^2}$$

L'équation ?? conduit alors finalement à un polynôme de degré 6 en T :

$$C_0 + C_1T + C_2T^2 + C_3T^3 + C_4T^4 + C_5T^5 + C_6T^6 = 0 \quad (4.13)$$

où les coefficients C_i ne dépendent que de la géométrie du manipulateur². Chacune des solutions réelles de ce polynôme permet de déterminer Φ , qui à son tour permet de déterminer x, y .

A ce stade on ne sait pas s'il existe effectivement un manipulateur qui admet 6 modes d'assemblage pour un ensemble de coordonnées articulaires fixées. Le degré du polynôme ne permettant pas l'expression des solutions sous forme analytique on est obligé de faire appel à une technique numérique pour leur recherche : il est alors facile de trouver un manipulateur qui admet effectivement 6 modes d'assemblage. La figure ?? montre un manipulateur parallèle présentant le nombre maximum de modes d'assemblage possibles et le tracé de la courbe du coupleur du mécanisme à 4 barres associé, ce qui permet de constater visuellement la présence de 6 points d'intersection entre la courbe du coupleur et le cercle décrit par l'extrémité du segment dissocié.

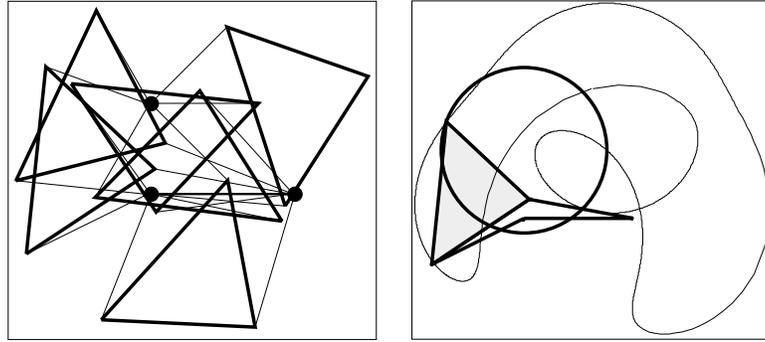


Figure 4.3: *A gauche un robot parallèle plan à 6 modes d'assemblage. Les dimensions sont $OA_1(0,0)$, $OA_2(15,91)$, $OA_3(0,10)$, les longueurs des segments : 14,98, 15,38, 12 et les longueurs des côtés : B_1B_2 : 17,04, B_1B_3 : 20,84, B_2B_3 : 16,54. A droite sa courbe du coupleur. On voit clairement que ce robot a 6 modes d'assemblage puisque le cercle décrit par l'extrémité du segment dissocié (en trait épais) coupe la courbe du coupleur en 6 points distincts.*

²Un programme de résolution du modèle géométrique direct d'un robot 3 - RPR est disponible par ftp anonyme, répertoire `prisme/FK/3-RPR`

4.1.3.3. Cas particuliers

On considère ici le cas particulier de robot parallèle plan où les centres des articulation liées au mobile sont colinéaires ainsi que les centres des articulations liées au repère fixe (figure ??). Dans ce cas les équations du modèle

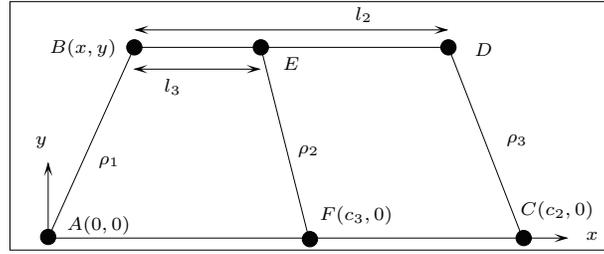


Figure 4.4: Un cas particulier de robot parallèle plan : la modification des longueurs ρ_i permet de commander la position et l'orientation de la barre BED . géométrique inverse s'écrivent :

$$\rho_1^2 = x^2 + y^2 \quad (4.14)$$

$$\rho_2^2 = (x + l_2 \cos \Phi - c_2)^2 + (y + l_2 \sin \Phi)^2 \quad (4.15)$$

$$\rho_3^2 = (x + l_3 \cos \Phi - c_3)^2 + (y + l_3 \sin \Phi)^2 \quad (4.16)$$

En soustrayant l'équation (??) aux équations (??) et (??) on obtient un système linéaire d'équations en x, y que l'on résout. On reporte alors ce résultat dans (??) ce qui conduit à une équation de degré 3 en $\cos \Phi$ de la forme :

$$f_0(T) = a_3 T^3 + a_2 T^2 + a_1 T + a_0 = 0 \quad (4.17)$$

où $T = \cos \Phi$. L'équation (??) est de degré 3 en $\cos \Phi$ ce qui conduit à un maximum de 6 solutions pour le modèle géométrique direct (dont on peut d'ailleurs déterminer une forme analytique).

En fait il est facile de montrer en utilisant la méthode de Sturm que ce polynôme ne peut avoir plus de deux solutions réelles dans l'intervalle $[-1, 1]$ et qu'en conséquence le manipulateur a au plus 4 modes d'assemblage (cf. exercice et [134]). L'existence d'autres géométries que la précédente telles que le degré du polynôme est inférieur à 6 a été étudié dans [134].

4.1.4. Autres robots plans

Une étude exhaustive du modèle géométrique direct des robots plans a été présentée dans [299]. On y montre que du point de vue du modèle géométrique direct toutes les chaînes peuvent se ramener à quatre chaînes génériques présentées en figure ?? et notées de type 1, 2, 3, 4 (cette dernière ne pouvant apparaître qu'une fois parmi les trois chaînes du robot). Les équi-

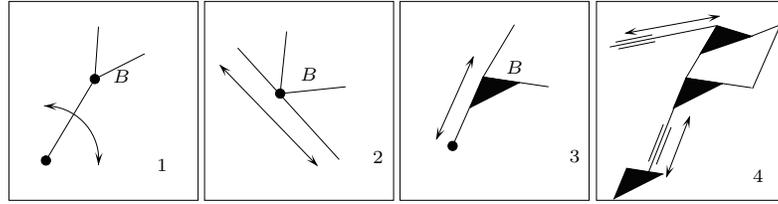


Figure 4.5: Les 4 chaînes génériques auxquelles peuvent se ramener toute chaîne d'un robot parallèle plan.

valences entre les chaînes et les chaînes génériques sont données dans la table ???. Si l'on dispose d'une méthode de résolution pour tous les manipulateurs

\underline{RRR}	\underline{RRR}	\underline{RRR}	\underline{RPR}	\underline{RPR}	\underline{RPR}	\underline{RPP}	\underline{RPP}	\underline{PRR}
1	1	1	2	1	3	3	3	1
\underline{PRR}	\underline{PRR}	\underline{PRP}	\underline{PRP}	\underline{PPR}	\underline{PPR}	\underline{RRP}	\underline{RRP}	\underline{RRP}
2	2	3	2	2	2	3	3	1

Tableau 4.1: Équivalence entre chaînes.

dont les chaînes sont génériques, on aura alors résolu le problème du modèle géométrique direct pour l'ensemble des robots plans. Pour ces robots à chaînes génériques il est relativement aisé de trouver le nombre maximum de modes d'assemblage et de trouver une forme polynomiale au modèle géométrique direct dont le degré est ce nombre. Les résultats sont présentés dans la table ???³.

chaînes	1-1-1	2-2-2	3-3-3	1-1-2	1-1-3	2-2-1	2-2-3	3-3-1
solutions	6	2	2	6	6	4	4	4
chaînes	3-3-2	1-2-3	1-1-4	1-2-4	1-3-4	2-2-4	3-3-4	2-3-4
solutions	4	6	2	2	2	1	1	1

Tableau 4.2: Nombre maximum de solutions pour les robots à chaînes génériques.

On notera que Rao [369] a proposé une approche purement combinatoire permettant de comparer la complexité du calcul du modèle géométrique direct des robots plans (ainsi que leur raideur).

4.2. Mécanismes pour translations dans l'espace

Dans le cas des architectures de mécanismes pour translation il est en général facile de résoudre le modèle géométrique direct. Ainsi si l'on considère le robot «Delta» le calcul du modèle géométrique direct peut se faire de manière

³L'introduction du type 4 fait suite aux remarques de C. Wampler qui nous a aimablement fourni les résultats concernant cette chaîne

explicite et conduit à deux solutions symétriques par rapport au plan défini par les trois points correspondant aux extrémités des leviers placés sur les actionneurs rotatifs [65, 355, 416]. Un résultat similaire peut être obtenu pour le robot «Star» de Hervé [167]. Il est à remarquer que des raisons géométriques ou de butées mécaniques permettent souvent d'éliminer une des deux solutions. De plus le tri entre les deux solutions est facile en utilisant les valeurs de z et la valeur initiale obtenue lors du montage.

4.3. Mécanismes sphériques

Une étude exhaustive du modèle géométrique direct des robots sphériques est présentée par Sefrioui [397], Gosselin [132, 137] et plus sommairement par Alizade [7]. Nous nous contenterons d'expliquer succinctement la technique utilisée pour le robot sphérique à 3 degrés de liberté en rotation de Gosselin dont les axes des actionneurs sont coplanaires et concourants (figure ??).

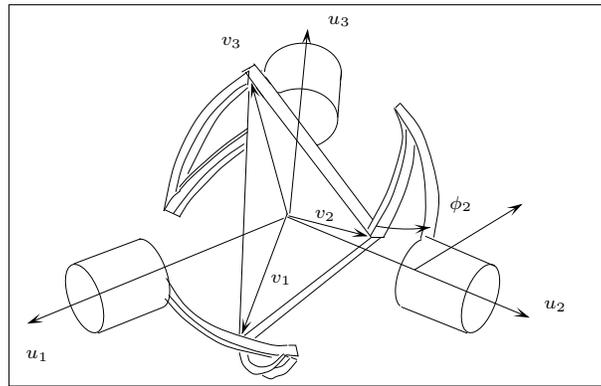


Figure 4.6: Notation pour les robots sphériques.

Pour résoudre le problème on doit déterminer les angles ϕ_i , qui est l'angle entre les deux segments des chaînes. Les vecteurs \mathbf{v}_i du plateau mobile s'expriment simplement en fonction des inconnues :

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} a_i \sin \phi_i + b_i \cos \phi_i + c_i \\ d_i \sin \phi_i + e_i \cos \phi_i + f_i \\ g_i \sin \phi_i + h_i \cos \phi_i + i_i \end{bmatrix}$$

où les coefficients ne dépendent que de la géométrie du robot. Dans ce cas particulier nous avons :

$$\sum_{i=1}^{i=3} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Deux de ces équations forment un système linéaire en $\sin \phi_1, \cos \phi_1$ et le résultat de la résolution de ce système est reporté dans la troisième équation et dans

l'identité $\sin^2 \phi_1 + \cos^2 \phi_1 = 1$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} E_1 \sin \phi_2 + E_2 \cos \phi_2 + E_3 &= 0 \\ N_4 \sin^2 \phi_2 + N_3 \sin \phi_2 \cos \phi_2 + N_2 \sin \phi_2 + N_1 \cos \phi_2 + N_0 &= 0 \end{aligned}$$

où E_1, E_2 sont des constantes alors que E_3 et les N_i dépendent de ϕ_3 . La valeur de $\cos \phi_2$, obtenue à partir de la première équation, est reportée dans la deuxième ainsi que dans l'identité $\cos^2 \phi_2 + \sin^2 \phi_2 = 1$. On obtient alors deux équations en $\sin \phi_2$ uniquement :

$$\begin{aligned} K_3 \sin^2 \phi_2 + K_2 \sin \phi_2 + K_1 &= 0 \\ H_3 \sin^2 \phi_2 + H_2 \sin \phi_2 + H_1 &= 0 \end{aligned}$$

Le résultant de ces deux équations donne une équation dans les H_i, K_i , donc une équation en $\cos \phi_3, \sin \phi_3$. La substitution classique :

$$T = \tan\left(\frac{\phi_3}{2}\right) \quad \sin \phi_3 = \frac{2T}{1+T^2} \quad \cos \phi_3 = \frac{1-T^2}{1+T^2}$$

permet alors de transformer l'équation en une équation polynomiale en T de degré 8. Sefrioui donne des exemples où les 8 solutions de ce polynôme sont réelles et conduisent à 8 orientations différentes du plateau mobile. Un résultat similaire est obtenu lorsque les actionneurs sont coaxiaux ou que les axes sont concourants mais non coplanaires.

4.4. Mécanismes à 6 degrés de liberté

Dans ce cas la résolution est en général plus délicate même si certains mécanismes admettent une formulation explicite du modèle géométrique direct (comme le manipulateur de Dafaoui [73] ou celui de Romiti dont le modèle a été étudié par Fioretti [110]).

Nous allons montrer que de grandes classes de mécanisme peuvent se ramener à l'étude de mécanismes génériques, que l'on appellera des *mécanismes équivalents*, pour lesquelles on peut trouver un majorant du nombre de modes d'assemblage et dont le modèle géométrique direct peut se ramener à la résolution d'un polynôme mono-variable.

4.4.1. Exemple d'analyse : le TSSM

4.4.1.1. Borne du nombre de modes d'assemblage

Pour un TSSM dont les longueurs de segment sont fixées, considérons les triangles formés par le centre de l'articulation B_i de la plate-forme et des deux centres A_i^1, A_i^2 des articulations correspondantes sur la base. Pour ces faces triangulaires le seul mouvement possible de B_i est une rotation autour de la droite

passant par A_i^1, A_i^2 . En conséquence, chacun des points B_i de la plate-forme doivent se trouver sur des cercles dont le centre se trouve sur cette droite.

On peut donc construire un mécanisme 3 – RS équivalent du TSSM constitué de trois segments (que nous appellerons les *segments équivalents*), chacun tournant autour d’une articulation rotoïde et dont une extrémité est articulée sur le plateau mobile par une rotule (figure ??). Hunt [180] a conjecturé que le

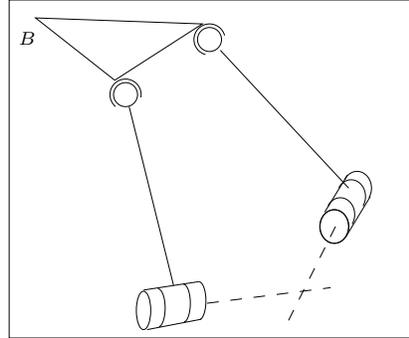


Figure 4.7: *A gauche le mécanisme équivalent du TSSM. A droite le mécanisme spatial à 4 barres (RSSR) obtenu après coupure d’un segment du mécanisme équivalent du TSSM.*

nombre maximal de modes d’assemblage pour un TSSM était 16. Son raisonnement est le suivant : prenant le mécanisme équivalent du TSSM, il détache du plateau mobile un des segments et il considère le reste du mécanisme. On obtient un mécanisme spatial à 4 barres (figure ??), constitué de 4 segments reliés par deux articulations rotoïdes et par deux rotules. Ce mécanisme est désigné sous le nom générique de *RSSR*, quelle que soit la position des axes des articulations rotoïdes. Le point B de coordonnées (X, Y, Z) de ce mécanisme se trouve sur une surface. Pour établir le degré de cette surface on utilise un théorème de Cayley [178] qui stipule qu’une ligne dont deux points C, D sont astreints à être sur deux courbes algébriques de degré n_c, n_d , de circularité p_c, p_d va générer une surface réglée de degré $2n_c(n_d - p_d) + 2n_d(n_c - p_c)$ si les courbes algébriques ne sont pas dans des plans parallèles et de degré $2n_c(n_d - p_d) + 2n_d(n_c - p_c) - 2p_cp_d$ si elles sont dans des plans parallèles.

Pour un RSSR dont les cercles ne se trouvent pas dans des plans parallèles on a $n_c = n_d = 2, p_c = p_d = 1$, ce qui conduit à une surface de degré 8 (dans le cas où les cercles sont dans des plans parallèles le degré est 6). En prenant en compte la rotation de la plate-forme autour de l’axe des rotules on obtient pour B une surface de degré 16.

Si l’on considère maintenant le nombre de points d’intersection de cette surface avec le cercle décrit par l’extrémité du segment équivalent que nous avons détaché, on obtient le nombre de modes d’assemblage possible pour le mécanisme étudié (entre parenthèse on indique le résultat lorsque les cercles

sont dans des plans parallèles). Une surface d'ordre 16 (12) coupe un cercle en un maximum de 32 (24) points. Mais parmi ces points, certains vont se trouver sur la sphère imaginaire : ils doivent donc être décomptés du nombre 32 (24). Tout va donc dépendre de la circularité de la surface d'ordre 16 ; Hunt a conjecturé que cette circularité est 8 (6), ce qui a été démontré. On peut alors affirmer que 16 (12) points sont imaginaires et donc qu'un majorant du nombre de modes d'assemblage est 16 (12).

4.4.1.2. Formulation polynomiale

Le but que nous poursuivons ici est de ramener la résolution du système d'équations du modèle géométrique direct à celle de la résolution d'une seule équation polynomiale mono-variable. Notons que cette recherche a été initiée par Nanua et Waldron [322] qui proposaient un polynôme de degré 24 pour le MSSM. Nous venons d'établir dans la section précédente qu'il existait au plus 16 modes d'assemblage pour le TSSM. Notre but est donc d'obtenir une équation dont le degré est égal à cette valeur.

De nombreux laboratoires se sont engagés dans cette recherche. Dès 1988 un polynôme de degré 16 a été trouvé par Charentus et Renaud [49] du LAAS et c'est en utilisant leur méthode nous avons pu trouver numériquement plusieurs configurations à 16 solutions [291]. Une autre méthode de résolution, utilisant la notion de mécanisme sphérique a été aussi proposée par Griffis et Duffy [145]. Finalement Nanua a proposé lui aussi une solution correcte [324].

Pour établir ce polynôme nous allons utiliser la méthode développée par Innocenti [186] qui sera d'application plus générale. Nous établissons ici la forme polynomiale d'un RSSR pour une position générale des articulations rotoïdes, en dépit du fait que pour le TSSM les axes des ces articulations sont coplanaires. Les notations utilisées sont définies dans la figure ?? . Le mécanisme est défini

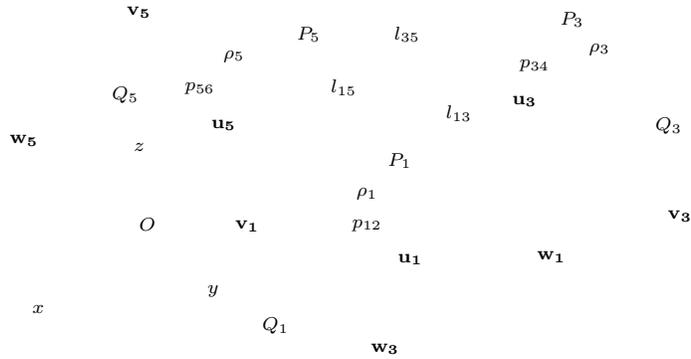


Figure 4.8: Notations utilisées pour la formulation polynomiale d'un RSSR par trois segments Q_1P_1, Q_3P_3, Q_5P_5 de longueur ρ_1, ρ_3, ρ_5 pouvant tourner

dans un plan autour des points Q_1, Q_3, Q_5 . Les angles p_{12}, p_{34}, p_{56} définissent la rotation. Le repère de référence est tel que O est dans le plan défini par Q_1, Q_3, Q_5 . L'angle du nouveau segment est p_{56} et les longueurs des côtés du triangle mobile sont notées l_{13}, l_{15}, l_{35} .

Le système d'équations de départ est défini par les 3 équations :

$$\|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3\| - l_{13} = 0 \quad \|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_5\| - l_{15} = 0 \quad \|\mathbf{P}_3\mathbf{P}_5\| - l_{35} = 0 \quad (4.18)$$

Chacune de ces équations peut s'exprimer en fonction des 3 inconnues p_{12}, p_{34}, p_{56} et leur forme générique est :

$$q_1 \cos(p_{12}) \cos(p_{34}) + q_2 \cos(p_{12}) \sin(p_{34}) + q_3 \sin(p_{12}) \cos(p_{34}) + q_5 \cos(p_{12}) + q_4 \sin(p_{12}) \sin(p_{34}) + q_6 \sin(p_{12}) + q_7 \cos(p_{34}) + q_8 \sin(p_{34}) + q_9 = 0 \quad (4.19)$$

$$r_1 \cos(p_{12}) \cos(p_{56}) + r_2 \cos(p_{12}) \sin(p_{56}) + r_3 \sin(p_{12}) \cos(p_{56}) + r_5 \cos(p_{12}) + r_4 \sin(p_{12}) \sin(p_{56}) + r_6 \sin(p_{12}) + r_7 \cos(p_{56}) + r_8 \sin(p_{56}) + r_9 = 0 \quad (4.20)$$

$$s_1 \cos(p_{34}) \cos(p_{56}) + s_2 \cos(p_{34}) \sin(p_{56}) + s_3 \sin(p_{34}) \cos(p_{56}) + s_5 \cos(p_{34}) + s_4 \sin(p_{34}) \sin(p_{56}) + s_6 \sin(p_{34}) + s_7 \cos(p_{56}) + s_8 \sin(p_{56}) + s_9 = 0 \quad (4.21)$$

où les coefficients q_i, r_i, s_i ne dépendent pas des inconnues (p_{12}, p_{34}, p_{56}) . On introduit les variables t_{12}, t_{34}, t_{56} définies par :

$$t_{12} = \tan\left(\frac{p_{12}}{2}\right) \quad t_{34} = \tan\left(\frac{p_{34}}{2}\right) \quad t_{56} = \tan\left(\frac{p_{56}}{2}\right)$$

Les équations (??),(??) sont de la forme :

$$At_{56}^2 + Bt_{56} + C = 0 \quad (4.22)$$

$$Rt_{56}^2 + St_{56} + T = 0 \quad (4.23)$$

Chacun des coefficients A, B, C est du deuxième degré en t_{12} et les coefficients R, S, T sont du deuxième degré en t_{34} .

$$A = A_2 t_{12}^2 + A_1 t_{12} + A_0 \quad B = B_2 t_{12}^2 + B_1 t_{12} + B_0 \quad (4.24)$$

$$C = C_2 t_{12}^2 + C_1 t_{12} + C_0 \quad R = R_2 t_{34}^2 + R_1 t_{34} + R_0 \quad (4.25)$$

$$S = S_2 t_{34}^2 + S_1 t_{34} + S_0 \quad T = T_2 t_{34}^2 + T_1 t_{34} + T_0 \quad (4.26)$$

On élimine l'inconnue t_{56} en calculant le résultant d des équations (??,??) :

$$d = \begin{vmatrix} 0 & A & B & C \\ A & B & C & 0 \\ 0 & R & S & T \\ R & S & T & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ce résultant d s'écrit sous la forme :

$$Gt_{34}^4 + Mt_{34}^3 + Nt_{34}^2 + Ut_{34} + V = 0 \quad (4.27)$$

où G, M, N, U, V sont des polynômes de degré 4 en t_{12} . L'équation (??) est aussi une équation en t_{34} qui s'écrit :

$$Dt_{34}^2 + Et_{34} + F = 0 \quad (4.28)$$

où D, E, F sont des polynômes de degré 2 en t_{12} . Les équations (??), (??) sont donc des équations polynomiales en t_{34} . On élimine cette inconnue en écrivant le résultant d_1 des équations (??,??) :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & G & M & N & U & V \\ G & M & N & U & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & E & F \\ 0 & 0 & D & E & F & 0 \\ 0 & D & E & F & 0 & 0 \\ D & E & F & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

d_1 est alors polynomial⁴ en t_{12} , de degré 16. Notons que dans le cas particulier du TSSM, seules interviennent les puissances paires de t_{12} dans d_1 . On peut donc, pour la résolution, se ramener à un polynôme de degré 8. Dans ce cas particulier si les équations de base admettent pour triplet solution (p_{12}, p_{34}, p_{56}) alors elles admettent également le triplet opposé $(-p_{12}, -p_{34}, -p_{56})$ comme solution. Géométriquement, pour chaque configuration solution, l'on trouve ainsi la configuration symétrique par rapport au plateau de base.

En conclusion on retrouve bien le fait que le problème du modèle géométrique direct accepte au plus 16 solutions. Mais à ce stade on ne sait pas s'il existe effectivement un manipulateur avec une configuration articulaire telle qu'il puisse être assemblé de 16 manières différentes, c'est-à-dire pour lequel le polynôme admet 16 racines réelles. Seule une méthode numérique permet d'étudier le polynôme : un exemple est présenté dans la section suivante.

4.4.1.3. Exemple de TSSM à 16 configurations

Nous considérons un manipulateur dont les positions des centres des articulations sont données dans le tableau ???. Nous choisissons une configuration nominale à partir de laquelle on calcule les longueurs des segments. La configuration nominale choisie est : $x_c = y_c = 0, z_c = 20, \psi = -10^\circ, \theta = -5^\circ, \phi = 10^\circ$. La résolution numérique permet alors de montrer que, pour les longueurs de segment associées à cette configuration, le manipulateur admet 16 modes d'assemblage. On donne dans la table ??? les coordonnées cartésiennes des 8 configurations où le plateau mobile est au-dessus de la base. Les 8 autres configurations s'en déduisent facilement. Les configurations ainsi définies sont représentées sur la figure ???.

⁴Une implantation de cet algorithme est disponible par ftp anonyme, répertoire `prisme/FK/6p-3`. On peut aussi tester interactivement ce programme à l'adresse <http://cdcsun.cdc.polimi.it:7777/>

n°	x_a	y_a	z_a	x_b	y_b	z_b
1	-9,7	9,1	0,0	0,0	7,3	0,0
2	9,7	9,1	0,0	0,0	7,3	0,0
3	12,76	3,9	0,0	4,822	-5,480722	0,0
4	3,0	-13,0	0,0	4,822	-5,480722	0,0
5	-3,0	-13,0	0,0	-4,822	-5,480722	0,0
6	-12,76	3,9	0,0	-4,822	-5,480722	0,0

Tableau 4.3: Position des centres des articulations de la base et du mobile pour le TSSM à 16 modes d'assemblage.

x_c	y_c	z_c	ψ	θ	ϕ
0,1099	-6,8071	15,1572	178,790092	104,247298	-179,3975
0,0	0,0	20,0	170,0000	4,999992	-170,0000
2,8029	-4,6660	12,7406	55,389531	89,178208	136,1996
1,3617	4,9038	17,3824	-106,331771	149,931849	58,9676
0,1606	5,3765	17,1868	-170,380852	164,013963	7,9545
-0,3524	-3,8663	11,9183	-12,559631	45,110726	-168,3013
-1,4134	4,8262	17,4299	102,640488	147,384474	-61,9768
-2,3355	-4,4679	12,5478	-50,849043	79,039617	-137,3532

Tableau 4.4: Définition des 8 modes d'assemblage du TSSM considéré, pour lesquels le mobile est au dessus de la base.

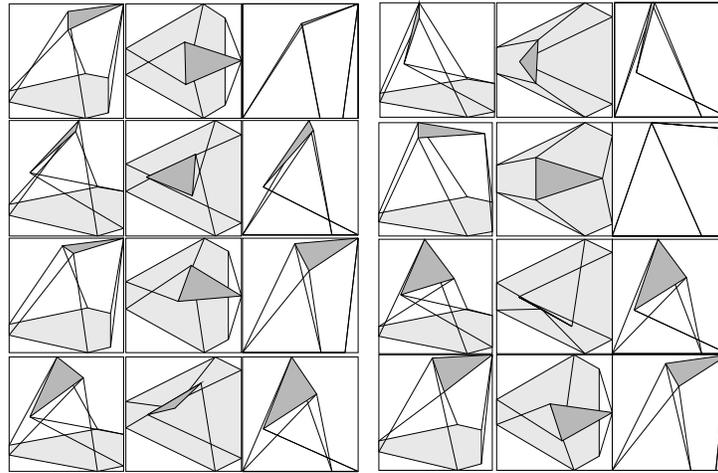


Figure 4.9: Un TSSM dans une configuration articulaire où existent 16 modes d'assemblage différents.

Pour illustrer les problèmes numériques nous présentons en figure ?? un tracé du polynôme correspondant aux valeurs des coordonnées articulaires choisies. Cet exemple montre clairement que l'implantation de la résolution du modèle géométrique direct doit être effectuée avec beaucoup de soin vu les faibles valeurs des variables qui sont impliquées dans ce calcul. On peut aussi se poser la question de la répartition du nombre des solutions dans l'espace de travail. Une étude systématique à l'aide d'un maillage fin de cet espace a permis d'établir la répartition du nombre de modes d'assemblage présentée dans le tableau suivant :

modes	2	4	6	8	10	12	14	16
nombre	2060	77446	31309	134443	11764	31524	3255	5580
en %	0,693	26,04	10,528	45,209	3,956	10,6	1,094	1,876

Le maillage compte 297381 points pour un grillage compris entre ± 8 cm pour les coordonnées x, y , entre 19 et 21 cm pour la coordonnée z , entre $\pm 15^\circ$ pour les angles de rotation. La valeur des pas est de 1 cm pour les coordonnées x, y, z et 5° pour les angles de rotation. Il apparaît que dans environ 50 % des cas le nombre des modes d'assemblage est 8. Les configurations où le nombre de modes d'assemblage atteint les valeurs extrêmes possibles (2 et 16) ne constituent qu'un pourcentage marginal de l'espace de travail. Par contre 92,38 % des cas sont réunis pour les solutions à 4, 6, 8, 12 configurations.

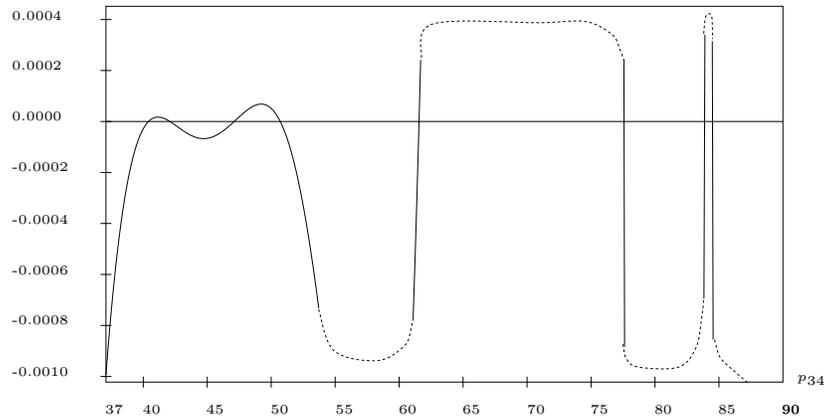


Figure 4.10: *Tracé du polynôme associé au TSSM à 16 modes d'assemblage. Les parties en pointillé ne correspondent pas au polynôme.*

Cette analyse du TSSM nous permet de faire remarquer la remarquable dualité entre robots parallèles et robot série. C'est ainsi que le modèle géométrique inverse d'un robot série 6R conduit lui aussi à un polynôme de degré 16. Murthy [315] a d'ailleurs étudié un robot 6R particulier et a montré que l'on pouvait trouver un équivalent parallèle qui est le TSSM. Cette dualité a fait

l'objet de tentative d'explication par Collins [67], Duffy [95], Murthy [314], Waldron [449] et Zamanov [475]. La dualité est totale pour ce qui concerne les aspects cinématiques et statiques mais reste difficile à établir au niveau des modèles géométriques.

4.4.2. Analyse d'autres mécanismes spatiaux

Nous avons vu, dans le cas du TSSM, comment la notion de mécanisme équivalent permet de traiter le problème du modèle géométrique direct par passage d'un système d'équations non-linéaires à un polynôme mono-variable. Le mécanisme équivalent du TSSM présente une caractéristique particulière (les axes des articulations rotoïdes sont coplanaires) mais la méthode d'obtention du polynôme n'a pas tenu compte de cette caractéristique.

Nous montrons ici que la notion de mécanisme équivalent⁵ permet d'obtenir une formulation polynomiale du modèle géométrique direct pour une grande variété de mécanismes spatiaux proposés dans la littérature (y compris des robots parallèles redondants tel que celui décrit par Zanganeh [477] ou des mécanismes relativement sophistiqués comme celui décrit par Tahmasebi [432]). Nous verrons cependant que cette notion ne peut pas toujours s'appliquer.

4.4.2.1. MSSM

Dans le cas particulier du MSSM, Dedieu [85] obtient, bien entendu, le même résultat que pour le TSSM, mais en utilisant une autre méthode. Celle-ci repose sur une identité de Lagrange qui relie les carrés des distances de p points M_i de l'espace. Si $L_{ij} = d(M_i, M_j)^2$ représente le carré de la distance entre les points M_i et M_j on a :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & L_{12} & \dots & L_{1p} \\ 1 & L_{21} & 0 & \dots & L_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & L_{p1} & L_{p2} & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ils considèrent ensuite 5 des sommets du MSSM et utilisent l'identité précédente pour construire 6 équations polynomiales. Une manipulation habile de ces polynômes permet alors de montrer qu'il existe au plus 16 solutions et que, dans tous les cas, il existe soit 0 ou 2 solutions convexes, les autres étant concaves, ce qui est une application directe d'un théorème de Cauchy [46].

⁵Une implantation générique de résolution du modèle géométrique direct des robots dont le mécanisme équivalent est du type 3-RS est disponible par `ftp anonyme, répertoire prisme/FK/3RS`

4.4.2.2. Poignet actif

Nous illustrons l'utilisation du mécanisme équivalent sur le poignet actif. Le triangle constitué par deux segments partageant la même double rotule ne peut être soumis qu'à une rotation autour d'un axe passant par les centres des cardans. Nous pouvons donc remplacer les deux segments par un segment unique relié à la base par une articulation rotoïde. On obtient donc un *RSSR* dont les axes des articulations rotoïdes sont en position quelconque ; il est facile de déterminer les coordonnées des centres de ces articulations, ainsi que la longueur des segments équivalents à partir des coordonnées articulaires et de la géométrie du manipulateur. Un majorant du nombre maximum de modes d'assemblage est donc de 16 et l'on peut trouver pour le modèle géométrique direct un polynôme de degré 16. Ce calcul a été implanté et nous avons pu trouver des configurations où effectivement 16 modes d'assemblage sont possibles⁶.

Nous avons étudié la répartition des solutions pour un maillage de l'espace où les angles d'Euler sont compris entre $\pm 40^\circ$ et discrétisés par pas de 15° , les positions x_c, y_c sont comprises entre ± 5 cm et $z_c = 10$ cm. Ceci conduit à un maillage de 7174 points et à une répartition des solutions donnée par le tableau suivant :

solutions	2	4	6	8	10	12	14	16
en %	0,251	0,237	6,58	32,325	33,51	20,04	5,325	0,7
en nombre	18	17	472	2319	2404	1438	382	50

Cette répartition semble ici plus homogène pour les nombres compris entre 8 et 12 qui conduisent à plus de 85% des solutions.

4.4.2.3. Plate-forme de Stewart

La notion de mécanisme équivalent peut s'appliquer au cas de la plate-forme de Stewart. Pour des longueurs fixes des vérins la seule possibilité de mouvement du point d'articulation est une rotation autour de l'axe vertical. A partir de la donnée des longueurs des vérins il est facile de trouver la position du centre des cercles sur lesquels se trouvent les points d'articulation, ainsi que leur rayon.

Le mécanisme équivalent du mécanisme de Stewart est donc un *RSSR* dont les axes des articulations rotoïdes sont verticaux, c'est-à-dire que les cercles sont dans des plans parallèles. On se trouve donc dans le cas spécial du théorème de Cayley : un majorant du nombre de modes d'assemblage possible est 12.

On peut affiner ce résultat comme l'a montré Lazard [241]. Pour cela on considère le plan associé à un des cercles (disons B_1) et l'on projette les points B_2, B_3 dans ce plan pour obtenir les points U_2, U_3 (figure ??). Considérons le triangle $B_1B_2U_2$. Par construction les côtés B_1B_2, B_2U_2 sont de longueur

⁶On peut tester ce programme à l'adresse <http://cdcsun.cdc.polimi.it:7777/>

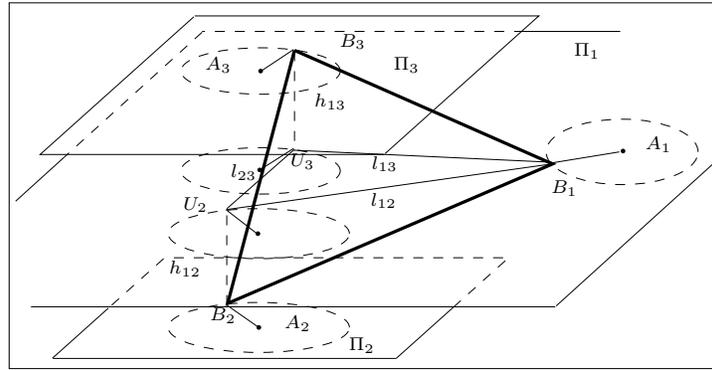


Figure 4.11: La construction du mécanisme plan équivalent pour la plate-forme de Stewart.

constante et le côté B_2U_2 est perpendiculaire au côté B_1U_2 . On a donc affaire à un triangle rectangle avec deux côtés de longueur constante et l'on en déduit que la longueur de B_1U_2 est aussi constante. En poursuivant le raisonnement pour B_3 on obtient dans le plan de projection un triangle $B_1U_2U_3$ dont les côtés ont une longueur constante et dont les sommets sont reliés au projection des centres des cercles par un segment de longueur constante. C'est donc un manipulateur parallèle plan qui admet jusqu'à 6 modes d'assemblage. Mais le triangle a seulement des côtés de longueur constante : il existe donc deux triangles de ce type et chacune des solutions pour ces deux mécanismes fournit une solution pour la plate-forme de Stewart⁷. On obtient bien ainsi jusqu'à 12 solutions et le problème se ramène à la résolution de deux polynômes de degré 6. Il faut noter que cette factorisation n'a pu être obtenue sur le polynôme de degré 12 en raison de sa trop grande complexité. Lazard [241] et Danescu, Dahan [76] ont pu exhiber des géométries très spéciales où 12 solutions existent. Par exemple si l'on prend :

$$\begin{array}{lll} A_1=(-10,0,0) & A_2=(10,0,0) & A_3=(0,0,5,0) \\ B_1=(-10, -2.25,0) & B_2=(10.013, -2.25,0) & B_3=(-0.0208,4.45,0) \\ \\ l_1^1=8 & l_2^1=2,236068 & l_1^2=8,015610 \\ l_2^2=2,291182 & l_1^3= 9,055385 & l_2^3= 2,332751 \end{array}$$

ce qui conduit au robot de la figure ??, les 12 configurations définies dans le tableau suivant et présentées dans la figure ?? conduisent à des coordonnées articulaires équivalentes.

⁷Une implantation de la résolution du modèle géométrique de la plate-forme de Stewart est disponible par ftp anonyme, répertoire `prisme/FK/Stewart`

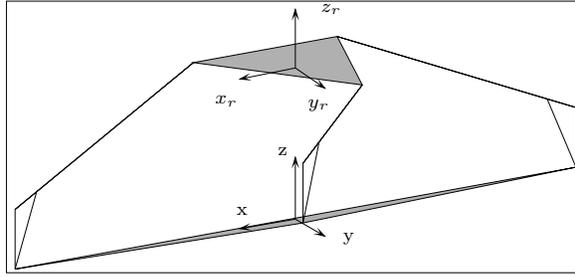


Figure 4.12: Une plate-forme de Stewart avec 12 solutions.

x_c	y_c	z_c	ψ	θ	ϕ
-8.0959	3.2199	2.558	-26.5534	7.247	12.875
-8.8645	0.5703	2.558	-12.7200	7.247	12.875
-7.2081	-3.6272	2.558	34.5548	172.753	12.875
-8.7042	0.1256	2.558	12.7368	172.753	12.875
-6.2860	0.2857	2.558	-30.7496	172.753	12.875
-6.6882	-0.3071	2.558	28.6821	7.247	12.875
6.7438	-0.2812	2.558	-53.7772	7.247	12.875
6.3237	0.2640	2.558	55.9921	172.753	12.875
7.2918	-3.5705	2.558	-8.0739	172.753	12.875
8.1625	3.1372	2.558	-0.0932	7.247	12.875
8.8553	0.7365	2.558	-12.7702	7.247	12.875
8.7024	-0.0124	2.558	12.7716	172.753	12.875

Nous avons étudié la répartition des solutions pour un maillage de l'espace où les angles d'Euler sont compris entre $\pm 60^\circ$ et discrétisés par pas de 10 degrés et les coordonnées x_c, y_c sont comprises entre ± 2 cm et z_c est fixé à 7. Ceci conduit à un maillage de 15 552 points et à une répartition des solutions donnée par le tableau suivant :

solutions	1	2	3	4	5	6	7	8
en %	8,5	83,957	0,578	5,61	0,456	0,75	0,0385	0,09
en nombre	1322	13 057	90	874	71	117	6	14

Nous remarquons que les configurations où il y a 1, 2 ou 4 solutions représentent 98 % des cas. Avec la discrétisation choisie nous n'avons jamais pu trouver plus de 8 solutions.

4.4.2.4. Poignet à 3 degrés de liberté en rotation

On peut utiliser la notion de mécanisme équivalent pour le poignet à 3 degrés de liberté en rotation (figure ??). Pour chaque segment de ce mécanisme

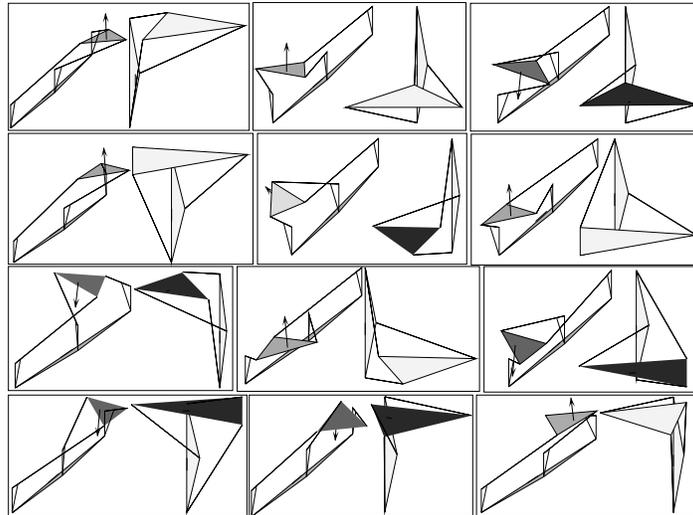


Figure 4.13: Configurations équivalentes pour la plate-forme de Stewart (vue perspective et de dessus).

nous fixons la hauteur du point d'articulation A_i proche de la base. Le point d'articulation B_i correspondant sur le plateau mobile peut alors décrire un cercle dont le centre C_i se trouve sur la droite joignant le centre de la rotule C du plateau mobile au centre de l'articulation A_i du segment proche de la base. A partir des coordonnées articulaires et de la géométrie du manipulateur il est facile de déterminer la position du centre C_i des cercles ainsi que leur rayon r_i .

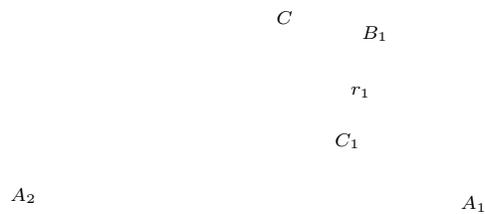


Figure 4.14: Pour le poignet à 3 degrés de liberté en rotation lorsque les hauteurs des points A_i sont fixes il est facile de voir que les points B_i ne peuvent se déplacer que sur des cercles de centre C_i et de rayon r_i . Le centre du cercle se trouve sur les droites joignant A_i (centre du point d'articulation proche de la base) à C , centre de la rotule.

Le mécanisme équivalent est donc un *RSSR* dont les axes des articulations rotoïdes sont concourants. On en déduit qu'à priori un majorant du nombre de modes d'assemblage possible est 16 et que l'on peut trouver un polynôme pour le modèle géométrique direct de degré 16. On peut toutefois aller encore plus loin : on peut en effet remarquer qu'au niveau du *RSSR* pour un ensemble d'angles solution, correspondant à une orientation donnée du plateau mobile, l'ensemble d'angles correspondant à la configuration symétrique par rapport au centre de la rotule va aussi être solution. Mais cette solution n'est pas acceptable car elle ne respecte pas la contrainte de liaison avec la rotule. En conséquence il ne peut y avoir plus de 8 solutions. Nous voyons donc ici une limite à l'utilisation de la notion de mécanisme équivalent qui fournit un polynôme pour la résolution du problème dont le degré est trop élevé. En fait, pour ce cas particulier, nous verrons dans la section 4.4.3.2 qu'une application indirecte d'un résultat d'Innocenti [187] permet de démontrer que l'on peut directement obtenir un polynôme de degré 8, ce qui a d'ailleurs été remarqué par cet auteur [194].

Prenons comme exemple un robot dont les plateaux de base et mobile sont des triangles équilatéraux de rayon respectivement 7 et 5 cm avec des segments de longueur 12 cm et un pied de longueur identique. Nous avons alors pu trouver des configurations où 8 modes d'assemblage sont possibles (ce qui correspond au majorant du nombre de modes d'assemblage). Par exemple les 8 configurations définies dans la table ?? conduisent à des variables articulaires équivalentes.

	1	2	3	4	5	6	7	8
ψ	-145	-154,03	-85,96	34,03	-34,03	85,96	154,03	25,2
θ	0,0	136,27	136,27	136,27	136,27	136,27	136,27	0
ϕ	0,0	42,98	77,02	-42,98	-77,02	162,98	-162,98	0

Tableau 4.5: *Poignet à 3 degrés de liberté en rotation : 8 configurations conduisant à des coordonnées articulaires identiques (angles d'Euler, en degré).*

Nous avons étudié la répartition des solutions pour un maillage de l'espace où les angles d'Euler sont compris entre $\pm 60^\circ$ et discrétisés par pas de 5° . Ceci conduit à un maillage de 13 777 points et à une répartition des solutions donnée par le tableau suivant :

solutions	1	2	3	4	5	6	7	8
en %	1,575	73,51	2,42	12,62	2,29	4,057	1,183	2,039
en nombre	217	10127	334	1739	315	559	163	281

Ici la prépondérance du cas à 2 solutions est nette.

Nous allons maintenant étudier divers cas particuliers de robots généraux. Pour ce qui concerne le nombre maximum de solutions il est à noter qu'une analyse systématique a été faite par Faugère et Lazard [102].

4.4.3. Principaux résultats

4.4.3.1. Manipulateurs 6-5

Knapczyk [220] a étudié le modèle géométrique direct d'un robot ayant 6 articulations distinctes sur la base et seulement 5 sur le plateau mobile (2 points B sont confondus)(figure ??). Après réduction des équations du modèle géométrique inverse il obtient deux équations à deux inconnues qu'il résout numériquement. Cette étude a été complétée par Nielsen et Roth [331] qui par élimination arrivent à réduire ce système de deux équations à un polynôme mono-variable de degré 64. Si la plate-forme du robot constitue un triangle et que la base est plane Yin a établi un polynôme de degré 40 et présente un exemple avec 10 modes d'assemblage [470].

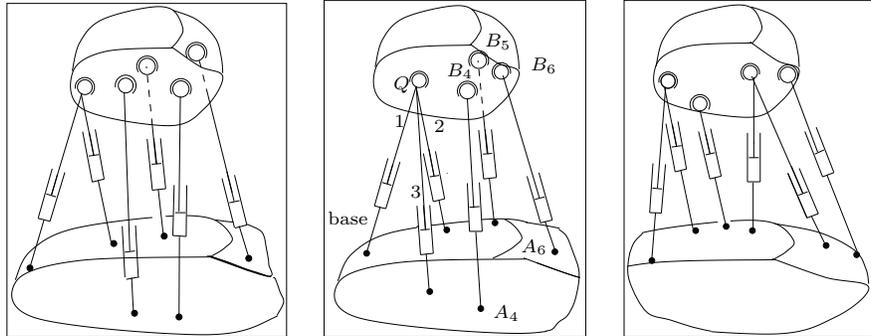


Figure 4.15: *A gauche le manipulateur parallèle 6-5 de Yin : le modèle géométrique direct s'établit sous la forme d'un polynôme de degré 40. Au milieu le manipulateur parallèle 6-4 d'Innocenti : le modèle géométrique direct s'établit sous la forme d'un polynôme de degré 8 mais avec un maximum de 16 modes d'assemblage. A droite le manipulateur parallèle 6-4 de Hunt : ce robot a un nombre maximum de modes d'assemblage de 32 d'après Faugère et Innocenti.*

4.4.3.2. Manipulateurs 6-4

Le manipulateur 6-4 présenté en figure ?? a été étudié par Innocenti [187]. Il montre tout d'abord que la position du point Q peut être déterminée à l'aide des longueurs des segments 1, 2, 3 et qu'il existe deux solutions. Ces trois segments permettent donc de commander les translations du point Q , les trois autres servant à commander l'orientation autour de ce point. On désigne parfois ce robot sous le nom de plate-forme sphérique ou robot découplé. Il considère ensuite le triangle A_4B_4Q , dont la géométrie est fixée. La position de ce triangle, pour une position donnée de Q , est déterminée par un angle de rotation θ_1 autour de l'axe A_4Q . Pour un angle θ_1 fixé le dernier degré de liberté restant pour la plate-forme est une rotation d'angle θ_2 autour de l'axe B_4Q . Deux paramètres

définissent donc la position de la plate-forme pour un point Q fixé. Innocenti écrit alors les longueurs des segments 4, 5, 6 en fonction des paramètres θ_1, θ_2 . Ces longueurs s'expriment alors comme polynômes de degré 4 dans les tangentes des angles moitié de θ_1, θ_2 . En calculant leur résultant on obtient un polynôme de degré 8 dans la tangente de l'angle moitié de θ_1 . Comme il existe deux solutions pour Q on obtient donc un maximum de 16 configurations pour ce robot et Innocenti exhibe un exemple avec 10 configurations. Husain [183] a entrepris une étude similaire et obtient bien un polynôme de degré 8 pour chacune des positions de Q mais présente un exemple avec 16 solutions réelles.

Un résultat indirect de ce calcul est que lors de la résolution on considère le mécanisme constitué d'une plate-forme montée sur une rotule (de centre Q) avec 3 segments, c'est-à-dire un poignet à 3 degrés de liberté en rotation. Le polynôme de degré 8 calculé par Innocenti établit donc le modèle géométrique direct de ce type de manipulateur et nous avons établi dans une section précédente qu'il existe effectivement des configurations à 8 solutions. Notons que cette analyse permet aussi de résoudre le modèle géométrique direct des robots sphériques qui admettent eux aussi un maximum de 8 solutions [133] et qu'une étude similaire a été effectuée par Sefrioui [397] et Wohlhart [462].

Hunt [181] a établi lui aussi le nombre maximum de 16 solutions pour le robot 6-4 d'Innocenti par des considérations géométriques. Il a établi ensuite un nombre maximum de 24 modes d'assemblage pour le robot 6-4 décrit figure ???. Chen a établi un polynôme de degré 32 pour le robot 6-4 de Hunt dans le cas où la base et le plateau mobile sont plans [50] et Yin a établi un polynôme de degré 24 dans le cas général [470]. D'après Faugère [102] il semblerait cependant que le résultat correct soit 32, ce qui a été confirmé par Innocenti [199].

4.4.3.3. Manipulateurs 6-3

Nanua [323], Hunt [181] et Geng [121] ont établi que l'on obtient un maximum de 8 solutions dans le cas du robot 6-3, c'est-à-dire le cas particulier du robot 6-4 d'Innocenti où les centres de deux articulations de la plate-forme sont confondus, ceci pour des segments n'étant pas articulés sur la triple rotule (figure ??).

4.4.3.4. Manipulateurs 5-5

Innocenti [196] a réussi à obtenir un polynôme de degré 40 pour ce mécanisme (figure ??), ce qui a été confirmé ultérieurement par Yin [470], et propose un exemple avec 10 solutions réelles. Ultérieurement Innocenti, dans une communication personnelle, a exhibé un exemple avec 24 solutions réelles. Toutefois pour un cas particulier du robot 5-5 (figure ??), Hunt [181] a montré que le nombre maximum de modes d'assemblage est de 24.

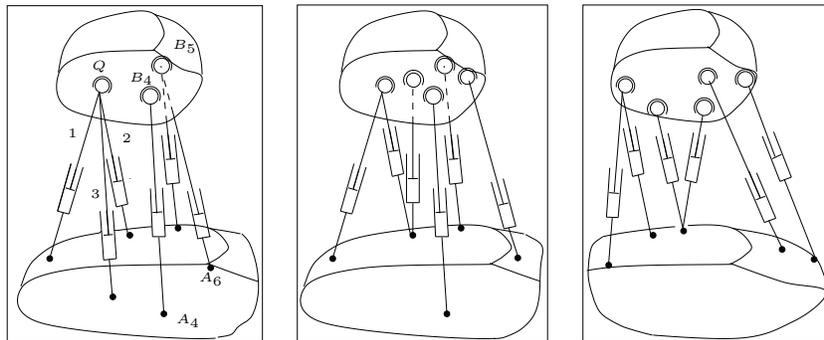


Figure 4.16: *A gauche le manipulateur parallèle 6-3 : ce robot a un nombre maximum de modes d'assemblage de 8. Au milieu le robot 5-5 d'Innocenti : le modèle géométrique direct peut s'écrire sous la forme d'un polynôme de degré 40. A droite le robot 5-5 de Hunt : ce robot a un nombre maximum de modes d'assemblage de 24.*

4.4.3.5. Manipulateurs 5-4

La manière dont sont groupées les articulations conduit à différents types de manipulateur parallèle de type 5-4. Le modèle géométrique direct du robot de la

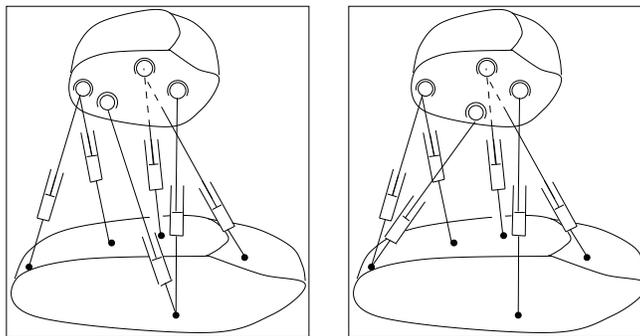


Figure 4.17: *A gauche le manipulateur parallèle 5-4 d'Innocenti : le modèle géométrique direct s'établit sous la forme d'un polynôme de degré 16. A droite le manipulateur parallèle 5-4 d'Innocenti et de Yin : le modèle géométrique direct s'établit sous la forme d'un polynôme de degré 24.*

figure ?? a été étudié par Innocenti [189] qui montre que l'on peut se ramener à l'étude faite pour le TSSM : on obtient donc un polynôme de degré 16 et Innocenti donne un exemple avec 8 solutions. Pour le robot de type 5-4 décrit en figure ??, Innocenti [195] et Yin [470] ont établi un polynôme de degré 24 et Innocenti a présenté un exemple avec 8 solutions réelles. Lin [256] présente une analyse complète des robots 5-4 dont la base et la plate-forme sont planes.

Les différents cas sont illustrés sur la figure ?? . Le type a) est équivalent à

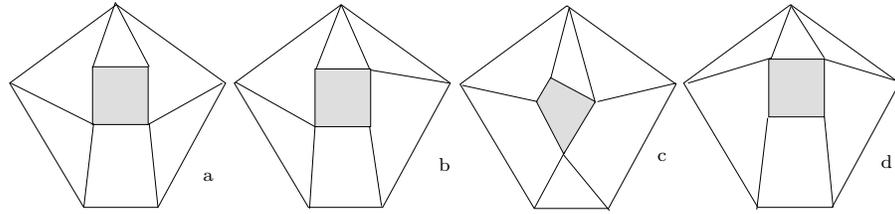


Figure 4.18: Les manipulateur parallèle 5-4 étudiés par Lin, en vue de dessus. Les majorants du nombre de solutions sont : a) 16, b) 24, c) 16, d) 32.

celui d'Innocenti et Lin retrouve un polynôme de degré 16. Les types b) et d) conduisent au même type d'analyse et Lin obtient un polynôme de degré 32. En fait sans démonstration rigoureuse Lin propose un polynôme de degré 24 pour le type b). Pour le type d) le polynôme reste de degré 32 et Lin présente un exemple avec 4 solutions réelles alors qu'Innocenti [198] a généralisé l'analyse pour une forme générale des plateaux : le polynôme obtenu reste de degré 32 et Innocenti fournit un exemple avec 8 solutions. Pour le type c) Lin [255] se ramène à l'analyse d'un robot 4-4 qui a 16 solutions au maximum.

4.4.3.6. Manipulateurs 4-4

Le manipulateur 4-4 est un robot général qui a la particularité d'avoir seulement quatre centres d'articulation sur la base et sur le plateau mobile. Lin [255] a plus particulièrement étudié ce cas. Avec 4 centres d'articulation les faces du manipulateur sont du type quadrilatère (Q) ou triangle (T) et il y aura deux faces de type Q et 4 faces de type T . Lin distingue alors plusieurs cas selon l'ordre des faces : type I avec ordre des faces $TTQTTQ$, type II avec ordre $TTTQTQ$, type III dont l'ordre est $TTTTQQ$ (figure ??). Lin montre alors que pour le type I on se ramène au cas du MSSM et l'on obtient donc une formulation polynomiale du modèle géométrique direct de degré 16 (ce qui a été confirmé par Innocenti [192]). Pour le type II, une analyse un peu plus complexe permet, là aussi, d'obtenir une formulation polynomiale du modèle géométrique direct mais de degré 4 et qui conduit à un maximum de 16 solutions : en effet la détermination des solutions à partir des résultats de la résolution du polynôme conduit à des solutions multiples. Pour le type III Lin aboutit à un polynôme de degré 12 conduisant à un maximum de 24 solutions et présente un résultat avec 12 solutions réelles. Ce résultat a été confirmé par Dhingra [88] en utilisant une méthode numérique d'homotopie dont nous parlerons dans une section ultérieure. Lin restreint son étude au cas où les centres des articulations sont coplanaires mais Hunt [181] a montré que le nombre maximum de modes d'assemblage restait identique si on lève cette contrainte.

Un autre type de robot 4-4 a été étudié par Innocenti [192] (figure ??).

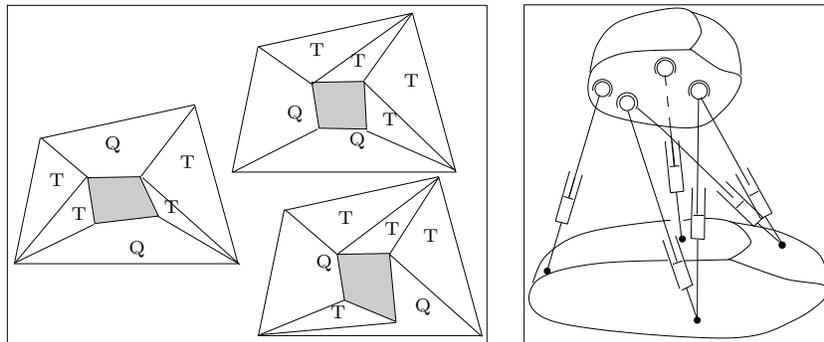


Figure 4.19: *Les différents types de robot 4-4 étudiés par Lin vues de dessus. A droite le robot 4-4 étudié par Innocenti : ce manipulateur admet jusqu'à 16 modes d'assemblage.*

Il montre que ce manipulateur peut avoir 16 solutions en exhibant une forme polynomiale de degré 18 et en donnant un exemple avec 16 solutions réelles.

4.4.3.7. Manipulateurs à 5 points alignés

Zhang [485] considère les manipulateurs de type SSM dans lequel 5 centres des articulations, soit sur la base, soit sur le plateau mobile, sont alignés (figure ??). Dans ce cas particulier il montre qu'il est possible de trouver une formulation

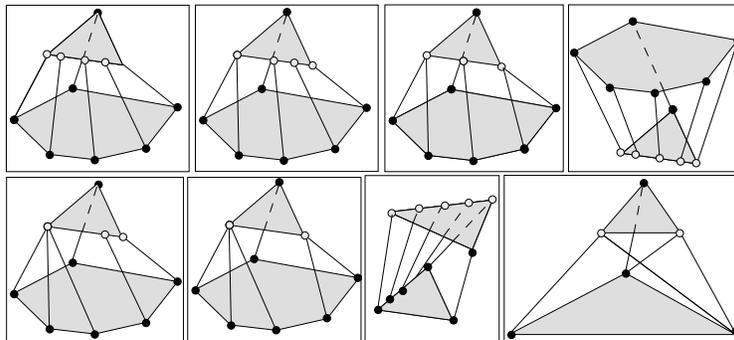


Figure 4.20: *Mécanisme spatial à 6 degrés de liberté proposé par Zhang. Ce type de mécanisme a comme caractéristique d'avoir 5 centres d'articulation alignés soit sur la base, soit sur le plateau mobile. On peut trouver une formulation symbolique des solutions du modèle géométrique direct*

explicite des solutions du modèle géométrique direct. En effet une manipulation des équations du modèle géométrique inverse permet de ramener le problème à la résolution d'un polynôme de degré 4 et d'en déduire l'ensemble des solutions (dont le nombre sera toutefois en général de 16). Ce résultat a été redémontré

par la suite par Nair (voir section ??). Ce type d'architecture présente toutefois des inconvénients : risque d'intersection entre segments plus élevé que pour le SSM, difficulté de construction (dans le cas où trois segments partagent le même point d'articulation). Nous verrons aussi par la suite que l'alignement des 5 centres d'articulation augmente le nombre de configurations singulières du manipulateur. Zhang[486] a poursuivi ses travaux en s'intéressant à des manipulateurs à six degrés de liberté et avec trois chaînes indépendantes.

4.4.3.8. Manipulateurs $PPP-3S, PRR-3S, PPR-3S$

L'étude du mécanisme $RRR-3S$ effectuée par Parenti et Innocenti [186] a été étendue par la suite à d'autres types de mécanismes. Parenti [342] propose ainsi l'analyse du mécanisme $PPP-3S$ (figure ??). Dans ce mécanisme,

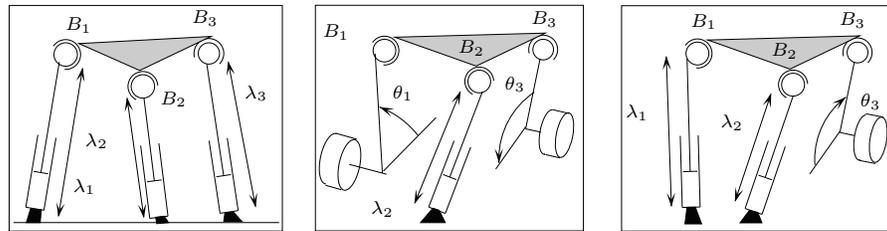


Figure 4.21: Les robots $PPP-3S, PRR-3S, PPR-3S$.

trois paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ définissent les déplacements des articulations prismatiques. La distance entre deux centres d'articulation B_i, B_j peut alors s'écrire comme fonction des deux paramètres λ_i, λ_j sous la forme d'une équation de degré 2 en ces paramètres. On dispose donc de trois équations décrivant le modèle géométrique direct si l'on écrit les distances $\|\mathbf{B}_i\mathbf{B}_j\|$. En considérant les résultants de ces équations Parenti obtient un polynôme de degré 8. Ce mécanisme a donc potentiellement 8 modes d'assemblage possibles et Parenti fournit un exemple avec 4 modes d'assemblage.

Parenti [344] poursuit ensuite son étude en considérant les mécanismes de type $PRR-3S$ et $PPR-3S$ (figure ??). Dans ces mécanismes le calcul de la distance entre les centres d'articulation de la plate-forme fait intervenir les chaînes de type $PSSR, RSSR, PSSP, RSSP$ pour lesquelles Parenti établit la distance comme fonction des paramètres de l'articulation active. Des manipulations sur les résultants des équations permettent alors d'obtenir un polynôme mono-variable de degré 16 pour le $PRR-3S$ et 12 pour le $PPR-3S$. Mais les exemples proposés par Parenti pour ces deux mécanismes n'ont que quatre modes d'assemblage.

4.5. La méthode systématique de Nair

Les exemples des sections précédentes montrent comment la notion de mécanisme équivalent permet de déterminer le nombre maximum de solutions et un polynôme pour le modèle géométrique direct. Mais l'exemple du poignet à 3 degrés de liberté en rotation, présenté dans la section ?? a montré qu'elle ne prend pas en compte certaines caractéristiques du mécanisme et fournit donc parfois un polynôme de degré trop élevé. Nair [318] a proposé une méthode systématique qui permet dans certains cas de trouver un polynôme minimal.

4.5.1. Principe de la méthode

Dans cette section nous ne considérons que les robots à chaîne de type $RRPS$.

4.5.1.1. Le système linéaire

L'équation du modèle géométrique inverse s'écrit :

$$\rho^2 = \|\mathbf{OC}\|^2 + \|\mathbf{CB}_r\|^2 + \|\mathbf{OA}\|^2 + 2\mathbf{OC} \cdot \mathbf{CB} - 2\mathbf{OC} \cdot \mathbf{OA} - 2\mathbf{CB} \cdot \mathbf{OA} \quad (4.29)$$

on peut écrire cette équation sous la forme :

$$\mathbf{OC} \cdot \mathbf{OA} - R\mathbf{CB}_r \cdot \mathbf{OC} + \mathbf{CB} \cdot \mathbf{OA} - \frac{\|\mathbf{OC}\|^2}{2} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{OA}\|^2 + \|\mathbf{CB}_r\|^2 - \rho^2) \quad (4.30)$$

dans laquelle le terme de droite est constant. On considère un robot à n chaînes et l'on pose :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{OA}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{OA}_n \end{pmatrix}_{(n \times 3)} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{CB}_{1r}^T \\ \vdots \\ \mathbf{CB}_{nr}^T \end{pmatrix}_{(n \times 3)} \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{CB}_1 \cdot \mathbf{OA}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{CB}_n \cdot \mathbf{OA}_n \end{pmatrix}_{(n \times 1)}$$

et

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{CB}_{1r}\|^2 + \|\mathbf{OA}_1\|^2 - \rho_1^2 \\ \vdots \\ \|\mathbf{CB}_{nr}\|^2 + \|\mathbf{OA}_n\|^2 - \rho_n^2 \end{pmatrix}_{(n \times 1)} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{(n \times 1)}$$

L'équation (??) s'écrit alors :

$$\mathcal{A}\mathbf{OC} - \mathbf{P}R^T\mathbf{OC} + \mathbf{W} - \frac{1}{2}\|\mathbf{OC}\|^2\mathbf{1} = \mathbf{L} \quad (4.31)$$

Soit la matrice de rotation $R = ((r_{ij}))$. On pose :

$$\tilde{R}^T = (r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{31}, r_{32}, r_{33})$$

Considérons maintenant la ligne i de \mathbf{W} . On a :

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{CB}_i \cdot \mathbf{OA}_i = R\mathbf{CB}_{i_r} \cdot \mathbf{OA}_i$$

La composante i de \mathbf{W} s'écrit donc comme combinaison linéaire des composantes de la matrice de rotation. On peut donc écrire $\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{W}}\tilde{R}$, où $\tilde{\mathbf{W}}$ est une matrice ($n \times 9$) constante. L'équation (??) s'écrit alors :

$$\mathbf{AOC} - \mathbf{PR}^T\mathbf{OC} + \tilde{\mathbf{W}}\tilde{R} - \frac{1}{2}\|\mathbf{OC}\|^2\mathbf{1} = \mathbf{L} \quad (4.32)$$

Remarquons alors que le vecteur $R^T\mathbf{OC}$ exprime simplement les coordonnées de C dans le repère lié au plateau mobile. On pose $R^T\mathbf{OC} = \mathbf{OC}^p$. L'équation (??) peut alors s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{Aq} = \mathbf{L} \quad (4.33)$$

où A est une matrice ($n \times 16$) avec :

$$A = (\mathcal{A} \mid -\mathbf{P} \mid \tilde{\mathbf{W}} \mid -\mathbf{1}) \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{OC} \\ \mathbf{OC}^p \\ \tilde{R} \\ \frac{1}{2}\|\mathbf{OC}\|^2 \end{pmatrix}$$

La matrice A est une matrice constante contenant la structure géométrique de l'architecture et l'équation (??) constitue un système linéaire que l'on appelle *le système linéaire du modèle géométrique direct*.

4.5.1.2. Les équations de fermeture

Bien entendu le système linéaire du modèle géométrique direct est soumis à des contraintes en raison de la dépendance des composantes du vecteur \mathbf{q} ainsi que des contraintes sur les variables r_{ij} qui doivent définir une matrice de rotation. Ces contraintes définissent les *équations de fermeture*. Nair démontre que ces équations de fermeture peuvent être classifiées en deux types : si l'on note \mathbf{T}_i la composante i du vecteur \mathbf{OC} et ${}^p\mathbf{T}_i$ la composante i du vecteur \mathbf{OC}^p les équations de type \mathbf{N} sont au nombre de 18 et s'écrivent :

$$(1 - r_{ki}^2 - r_{kj}^2)(\|\mathbf{OC}\|^2 - {}^p\mathbf{T}_i^2 - {}^p\mathbf{T}_j^2) - (\mathbf{T}_k - r_{ki} {}^p\mathbf{T}_i - r_{kj} {}^p\mathbf{T}_j)^2 = 0 \quad (4.34)$$

$$(1 - r_{ik}^2 - r_{jk}^2)(\|\mathbf{OC}\|^2 - {}^p\mathbf{T}_i^2 - {}^p\mathbf{T}_j^2) - (\mathbf{T}_k - r_{ik} {}^p\mathbf{T}_i - r_{jk} {}^p\mathbf{T}_j)^2 = 0 \quad (4.35)$$

où i, j, k constitue une combinaison dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ avec $i \neq j$. Les équations de type \mathbf{ON} sont au nombre de 9 et sont obtenues en considérant les mineurs d'ordre 2 de la matrice de rotation. Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est un mineur alors l'équation de fermeture s'écrit :

$$1 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (ad - bc)^2 = 0 \quad (4.36)$$

4.5.1.3. La résolution

La méthode de Nair peut être décrite selon la séquence suivante :

1. établissement du système linéaire du modèle géométrique direct
2. résolution de ce système
3. report des solutions dans un sous-ensemble approprié des équations de fermeture. On obtient alors un nombre, que l'on espère restreint, d'équations polynomiales.
4. combinaison de ces équations polynomiales pour obtenir un polynôme mono-variable.

Chaque phase de cet algorithme pose toutefois des problèmes non triviaux. Ainsi la phase (1) de l'algorithme nécessite un bon choix des repères pour obtenir un système linéaire le plus simple possible. Il peut aussi être nécessaire d'adapter la formulation générale à l'architecture que l'on considère. Le point crucial va être, bien entendu, la phase (4) : les équations obtenues en phase (3) doivent être suffisamment simples pour s'apprêter à une élimination.

Nair fait d'ailleurs remarquer une simplification dans le cas où les centres des articulations de la base sont coplanaires ainsi que ceux de la plate-forme. Dans ce cas le vecteur \mathbf{q} de l'équation (??) ne comporte plus que 9 composantes (au lieu de 16) et s'écrit :

$$\mathbf{q} = \left(\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad {}^p\mathbf{T}_1 \quad {}^p\mathbf{T}_2 \quad r_{11} \quad r_{12} \quad r_{21} \quad r_{22} \quad \frac{1}{2}\|\mathbf{OC}\|^2 \right)$$

Le système linéaire est donc un système à n équations pour 9 inconnues. Il ne subsiste alors que 4 équations de fermeture de type **N** qui sont :

$$(1 - r_{11}^2 - r_{12}^2)(\|\mathbf{OC}\|^2 - {}^p\mathbf{T}_1^2 - {}^p\mathbf{T}_2^2) - (\mathbf{T}_1 - r_{11} {}^p\mathbf{T}_1 - r_{12} {}^p\mathbf{T}_2)^2 = 0 \quad (4.37)$$

$$(1 - r_{21}^2 - r_{22}^2)(\|\mathbf{OC}\|^2 - {}^p\mathbf{T}_1^2 - {}^p\mathbf{T}_2^2) - (\mathbf{T}_1 - r_{21} {}^p\mathbf{T}_1 - r_{22} {}^p\mathbf{T}_2)^2 = 0 \quad (4.38)$$

$$(1 - r_{11}^2 - r_{21}^2)(\|\mathbf{OC}\|^2 - {}^p\mathbf{T}_1^2 - {}^p\mathbf{T}_2^2) - (\mathbf{T}_1 - r_{11} {}^p\mathbf{T}_1 - r_{21} {}^p\mathbf{T}_2)^2 = 0 \quad (4.39)$$

$$(1 - r_{12}^2 - r_{22}^2)(\|\mathbf{OC}\|^2 - {}^p\mathbf{T}_1^2 - {}^p\mathbf{T}_2^2) - (\mathbf{T}_2 - r_{12} {}^p\mathbf{T}_1 - r_{22} {}^p\mathbf{T}_2)^2 = 0 \quad (4.40)$$

et seulement 2 équations de fermeture de type **ON** qui sont :

$$\begin{aligned} (r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22})(\|\mathbf{OC}\|^2 - \mathbf{T}_1^2 - \mathbf{T}_2^2) + ({}^p\mathbf{T}_1 - r_{11}\mathbf{T}_1 - r_{21}\mathbf{T}_2) \\ ({}^p\mathbf{T}_2 - r_{12}\mathbf{T}_1 - r_{22}\mathbf{T}_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} (r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22})(\|\mathbf{OC}\|^2 - {}^p\mathbf{T}_1^2 - {}^p\mathbf{T}_2^2) + (\mathbf{T}_1 - r_{11} {}^p\mathbf{T}_1 - r_{12} {}^p\mathbf{T}_2) \\ (\mathbf{T}_2 - r_{21} {}^p\mathbf{T}_1 - r_{22} {}^p\mathbf{T}_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

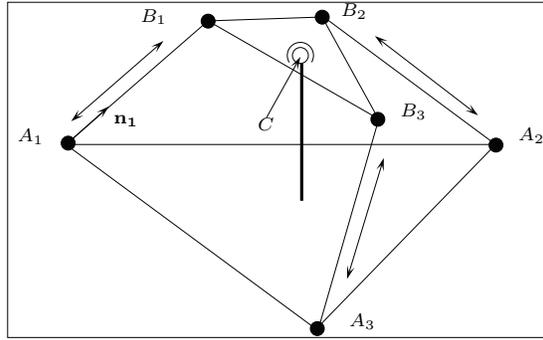


Figure 4.22: Un poignet à 3 degrés de liberté en rotation. Le plateau mobile est articulé sur une rotule fixe par rapport à la base.

4.5.2. Exemple : poignet à 3 degrés de liberté en rotation

On considère le poignet à 3 degrés de liberté décrit en figure ???. Nous savons que ce poignet peut avoir jusqu'à 8 modes d'assemblage et l'on recherche donc un polynôme de degré 8. On choisit un repère de référence dont l'origine est le centre C de la rotule et tel que les coordonnées des centres d'articulation de la base s'écrivent :

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_{a_0} \\ y_{a_0} \\ z_a \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -x_{a_0} \\ y_{a_0} \\ z_a \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{a_2} \\ z_a \end{pmatrix}$$

Le repère de la plate-forme est choisi tel que :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{b_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} x_{b_1} \\ y_{b_1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} -x_{b_1} \\ y_{b_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce problème les inconnues sont les composantes de la matrice de rotation R . La matrice A est donc une matrice 3×9 qui s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & y_{b_0} x_{a_0} & 0 & 0 & y_{b_0} y_{a_0} & 0 & 0 & y_{b_0} z_a & 0 \\ x_{a_0} x_{b_1} & -x_{a_0} y_{b_1} & 0 & y_{a_0} x_{b_1} & y_{a_0} y_{b_1} & 0 & z_a x_{b_1} & z_a y_{b_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_{a_2} x_{b_1} & y_{a_2} y_{b_1} & 0 & -z_a x_{b_1} & z_a y_{b_1} & 0 \end{bmatrix}$$

On voit que dans cette matrice les colonnes correspondantes aux termes r_{13}, r_{23}, r_{33} ne sont composées que de 0. On peut donc considérer un système réduit :

$$\begin{bmatrix} 0 & y_{b_0} x_{a_0} & 0 & y_{b_0} y_{a_0} & 0 & y_{b_0} z_a \\ -x_{a_0} x_{b_1} & -x_{a_0} y_{b_1} & y_{a_0} x_{b_1} & y_{a_0} y_{b_1} & z_a x_{b_1} & z_a y_{b_1} \\ 0 & 0 & -y_{a_2} x_{b_1} & y_{a_2} y_{b_1} & -z_a x_{b_1} & z_a y_{b_1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{21} \\ r_{22} \\ r_{31} \\ r_{32} \end{pmatrix} = L$$

avec

$$L = \begin{pmatrix} \frac{x_{a0}^2}{2} + \frac{y_{a0}^2}{2} + \frac{z_a^2}{2} + \frac{y_{b0}^2}{2} - \frac{\rho_1^2}{2} \\ \frac{x_{a0}^2}{2} + \frac{y_{a0}^2}{2} + \frac{z_a^2}{2} + \frac{x_{b1}^2}{2} + \frac{y_{b1}^2}{2} - \frac{\rho_2^2}{2} \\ \frac{y_{a2}^2}{2} + \frac{z_a^2}{2} + \frac{x_{b1}^2}{2} + \frac{y_{b1}^2}{2} - \frac{\rho_3^2}{2} \end{pmatrix}$$

On résout alors ce système linéaire dans les variables r_{11}, r_{12}, r_{31} . On utilise ensuite 3 équations de fermeture :

$$r_{22}^2 + r_{32}^2 + r_{12}^2 = 1 \quad (4.43)$$

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} = 0 \quad (4.44)$$

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1 \quad (4.45)$$

L'équation (??) est linéaire en r_{21} . L'équation (??) ne dépend pas de r_{21} et est quadratique en r_{22}, r_{32} . Après report de la valeur de r_{21} l'équation (??) est de degré 4 en r_{22}, r_{32} . En conséquence le résultant des équations (??,??) est de degré 8 en r_{32} . Nous avons bien à résoudre un polynôme de degré 8 en une variable même si une valeur de r_{32} conduit à deux valeurs possibles pour r_{22} , soit à un total de 16 modes d'assemblage possibles.

4.5.3. Résultats de la méthode de Nair

Nair utilise sa méthode pour montrer différents résultats pour des architectures variées de manipulateurs parallèles. Il s'intéresse d'abord au manipulateur du type robot général avec la base et la plate-forme plane.

4.5.3.1. Manipulateurs à 9 segments

Proposition 1 : *Les manipulateurs parallèles à base et plate-forme planes ayant 9 segments, tels que la matrice A est de rang plein, admettent une solution explicite au modèle géométrique direct. Pour un ensemble de longueurs segment fixé on trouve deux solutions dont l'une est l'image miroir par rapport au plan de la base de l'autre.*

Il faut toutefois mentionner que Nair ne précise pas dans quel cas la condition de rang plein sur la matrice A (qui est une matrice 9×9) est satisfaite. Une étude similaire a été faite par Cheok [53] qui lui non plus ne précise pas sous quelle condition A est de rang plein. Nous nous sommes intéressés à cette étude dans le cas d'un TSSM symétrique (figure ??). Les segments 1 à 6 sont actifs alors que les segments 7 à 9 sont passifs et partagent l'articulation en P . Dans ce cas la matrice A sera de rang plein si :

- les 3 points A_7, A_8, A_9 ne sont pas colinéaires
- P n'est pas sur la ligne joignant B_3, B_5

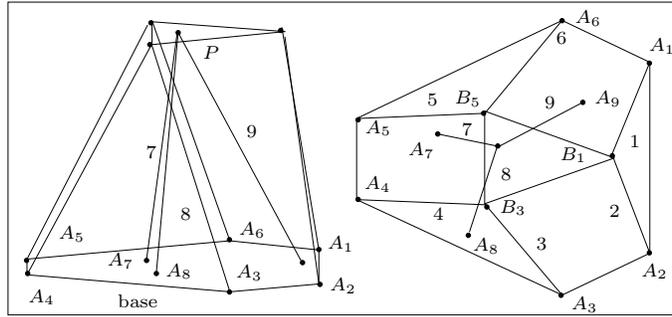


Figure 4.23: Un manipulateur parallèle à 6 degrés de liberté. Les segments 1-6 sont motorisés alors que les segments 7-9 sont passifs et ne servent qu'au calcul du modèle géométrique direct.

- le point A_4 n'a pas la même coordonnée sur l'axe y que A_3
- le point A_4 n'est pas sur la ligne joignant le milieu de A_1, A_2 à A_3
- le point P n'est pas sur la ligne joignant B_1, B_3 ou la ligne joignant B_1, B_5

4.5.3.2. Manipulateurs à 7 et 8 segments

Nair démontre les deux résultats suivants :

Proposition 2 : *Les manipulateurs parallèles à base et plate-forme planes ayant 8 segments, tels que la matrice A est de rang plein, admettent des solutions explicites au modèle géométrique direct, leur nombre étant de 8 au maximum.*

Pour le même manipulateur que dans la section précédente et en supposant de plus que le point P d'attache des segments passifs est sur l'axe y du plateau mobile la matrice A sera de rang plein si :

- P n'est pas sur la ligne joignant B_3, B_5
- le point A_4 n'a pas la même coordonnée sur l'axe y que A_3
- le point A_4 n'est pas sur la ligne joignant le milieu de A_1, A_2 à A_3
- le point A_7 n'est pas sur la ligne joignant le milieu de A_1, A_2 à A_8

Nair étudie un cas particulier de robot à 8 segments, le robot 8-8 (figure ??). Il montre que la matrice A est de rang 8 si au moins deux des paramètres a, b, x, y sont non nuls et que :

$$\frac{a}{b} \neq \frac{y}{x} \quad \frac{a}{b} \neq \frac{x}{y}$$

Sous ces hypothèses Nair trouve un maximum de quatre solutions explicites au modèle géométrique direct.

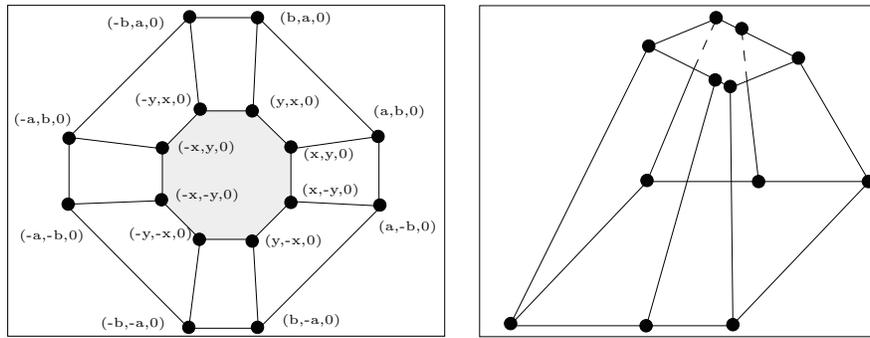


Figure 4.24: *A gauche le manipulateur 8-8 de Nair vu de dessus. A droite le manipulateur R – R du même auteur.*

Proposition 3 : *Les manipulateurs parallèles à base et plate-forme planes ayant 7 segments tels que la matrice A est de rang plein et pour lesquels on connaît la longueur $\|\mathbf{OC}\|$ admettent des solutions explicites au modèle géométrique direct, leur nombre étant de 8 au maximum.*

4.5.3.3. Manipulateurs R-R

L'architecture du manipulateur $R-R$ est présentée en figure ?? . Les centres des articulations ont la propriété de se trouver sur des quadrilatères. En appliquant sa méthode Nair montre que l'on peut trouver un maximum de 20 solutions pour ce manipulateur et que l'on a résoudre un polynôme mono-variable de degré 10 pour déterminer ces solutions. Mentionnons que Griffis [146] a montré que si la plate-forme mobile et la base constituent des triangles, avec chaque côté des triangles ayant trois centres d'articulation alors l'analyse se ramène à l'étude d'un TSSM, soit un polynôme de degré 8.

4.5.4. Conclusion

Le formalisme de Nair présente des résultats intéressants et permet d'obtenir dans certains cas des formulations polynomiales. Toutefois, l'opération délicate de la réduction des équations de fermeture conduit parfois à un résultat non optimal, voire même à aucun résultat en raison de la complexité des calculs. Ainsi pour le robot général Nair obtiendrait un polynôme de degré 144 (les calculs n'ont pas pu être menés jusqu'au bout en raison de la taille des expressions), alors que nous verrons ultérieurement qu'il y a au plus 40 solutions à ce problème. Ce formalisme a été élaboré uniquement pour les robots à chaînes de type $RRPS$ et mériterait d'être étendu aux autres types de chaînes.

4.6. Le cas du robot général

Les méthodes présentées dans les sections précédentes ne s'appliquent pas au cas du robot général à 6 degrés de liberté, ni même au cas du SSM (base et plate-forme mobile plane). Avant d'aborder le cas général nous allons justement nous intéresser au cas du SSM.

4.6.1. Le SSM

4.6.1.1. Nombre maximum de modes d'assemblage

Lazard [239] a établi de manière élégante que le nombre maximum de solutions était de 40. Pour cela il montre que le problème revient à résoudre un système de 9 équations (3 linéaires, 6 quadratiques) à 9 inconnues. Vu le degré des équations l'application du théorème de Bezout indique qu'il ne peut y avoir plus de 64 solutions. Une utilisation fine d'un théorème de Bezout et des bases de Gröbner permet de montrer qu'il y a 24 solutions à l'infini, ce qui établit le résultat.

Une autre indication de ce résultat a été proposée par Raghavan [366] (qui propose par ailleurs une excellente synthèse des méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques [367]). Pour cela il utilise une technique numérique d'homotopie (« continuation method » dans la terminologie anglo-saxonne). La base de cette technique est la suivante : ayant un système S d'équations à résoudre on définit un système S_1 de même « taille » dont on connaît les solutions. Par pas successif on modifie légèrement les coefficients de S_1 pour les faire tendre vers ceux de S . A chaque pas les solutions du système modifié sont obtenues à partir des solutions du système du pas précédent par une méthode numérique itérative. On suit ainsi différentes branches de solution, dont certaines vont conduire à des solutions à l'infini. Une caractéristique remarquable des systèmes algébriques est que le nombre de branche conduisant à des solutions à l'infini est en général constant si les coefficients du système sont suffisamment généraux. Dans le cas général du modèle géométrique directe des manipulateurs parallèles il suffit donc de prendre quelques géométries au hasard pour déterminer le nombre total de solutions complexes et réels. Raghavan a donc choisi 11 géométries au hasard, qui ont toutes conduites à un ensemble de 40 solutions complexes et réelles, ce qui a été confirmé par Dhingra [88] dont la méthode diffère de celle de Raghavan par le moindre nombre de branches qu'il doit suivre. Il faut cependant noter que le temps de calcul d'une méthode d'homotopie exclut son emploi dans un contexte temps réel.

4.6.1.2. Calcul des solutions

Nous avons proposé pour un robot général respectant certaines contraintes de symétrie une technique numérique pour le calcul des solutions où le système

initial de 6 équations est réduit à un système de deux équations qui est résolu numériquement [293]⁸. Nous avons ainsi pu trouver des géométries avec 12 modes d'assemblage.

Ait-Ahmed [4] a prouvé qu'il est théoriquement possible de trouver un polynôme de degré 64 et exhibe un algorithme itératif l'ayant conduit à trouver jusqu'à 16 solutions réelles.

Dietmaier [89] a montré que si les centres des articulations de la base respectaient des contraintes fortes de symétrie en x, y, z on pouvait résoudre le modèle géométrique direct qui a au plus 24 solutions, ce nombre pouvant être atteint.

Zhang [487] a prouvé que, dans le cas général, on peut théoriquement obtenir un polynôme de degré 20, construit par développement d'un déterminant de dimension 21, conduisant à un maximum de 40 solutions. Étant donné l'ampleur des calculs il n'est pas possible d'obtenir la valeur symbolique des coefficients de ce polynôme mais une vérification numérique à partir de MAPLE a permis d'en vérifier la validité et d'obtenir une solution avec 8 modes d'assemblage.

Wen et Liang [457] ont entrepris l'étude de ce problème en paramétrant la position de la plate-forme par les coordonnées de 3 de ces centres d'articulation. Par un choix astucieux des repères il se ramène à une équation algébrique obtenue par développement d'un déterminant de dimension 11 qui conduit à un polynôme de degré 20. Chaque solution de ce polynôme conduisant à deux positions possibles de la plate-forme, on obtient bien un maximum de 40 solutions. Il n'est toutefois pas précisé si la formulation analytique du polynôme a pu être obtenue. Une configuration à 8 modes d'assemblage est proposée.

Notons aussi que Lee et Roth [246] ont établi que pour les robots de type SSM *dont les plateaux sont similaires* on pouvait obtenir une solution analytique conduisant à un maximum de 16 solutions et il fournit un exemple avec 8 solutions réelles. Le même cas a été traité par Guozhen [150] qui réussit à obtenir une forme analytique des solutions conduisant à 8 solutions au maximum.

4.6.2. Le robot général

4.6.2.1. Nombre maximum de modes d'assemblage

La détermination du nombre maximum de solutions, puis des solutions pour le robot parallèle général est un des grands défis de ces dernières années pour les mécaniciens. Ronga [385] a été le premier à établir à l'aide d'une preuve très complexe que le nombre maximum de solutions, complexes et réelles, est de 40. Ce résultat a ensuite été démontré en utilisant différents paramétrages et outils mathématiques par Lazard [240] (base de Gröbner), par Mourrain [312]

⁸Une implantation de cet algorithme est disponible par ftp anonyme, répertoire `prisme/FK/Ssm`

et par Wampler [452] (paramétrage à base des quaternions duaux). Il faut aussi mentionner l'approche intéressante de Sarkissyan [395] qui tente de construire un manipulateur général avec le plus grand nombre possible de solutions en s'appuyant sur la théorie de Burmester pour les courbes de coupleur de mécanisme de type 5 – SS .

4.6.2.2. Calcul des solutions

Wang [453] propose une méthode à deux volets. A partir de la description du mécanisme en graphe il établit des points de coupure et résout les équations de boucle en appliquant une méthode numérique dite CCD où les variables sont modifiées une à une pour faire diminuer une fonction de coût non linéaire. A l'approche d'une solution la méthode de Newton (voir section ??) est utilisée pour arriver au résultat. Ce type de méthode permet de trouver plusieurs racines mais ne présente aucune garantie de convergence ou d'obtention de l'ensemble des solutions. Le calcul des solutions prend environ 10 secondes sur un PC et Wang présente un exemple avec 8 solutions réelles.

Parenti et Innocenti [191, 343] présentent un autre algorithme utilisant la résolution du robot 5-5 présentée dans la section ?. Il considère un robot général dont il supprime un segment (par exemple A_6B_6) et introduit un segment virtuel, par exemple A_2B_1 , de longueur x . Il montre alors que si les longueurs des segments 1 à 5 sont fixes alors x ne peut varier que dans un intervalle qui ne dépend que de la longueur des segments 1 et 2 et de la distance A_1A_2 et B_1B_2 . Pour une valeur fixée de x on se retrouve donc dans le cas d'un robot 5-5 pour lequel on connaît un polynôme de degré 40. Ils définissent une fonction qui s'annule lorsque la valeur de x est telle que la longueur du sixième segment est la longueur spécifiée. On se ramène ainsi à l'annulation d'une fonction à une variable. L'algorithme est implanté de manière à ce que l'on ait à calculer le moins souvent possible les solutions du robot 5-5. Cette méthode, même si elle n'implique qu'une recherche mono-dimensionnelle sur x est évidemment longue, mais reste à ce jour la plus efficace pour trouver l'ensemble des solutions. Un exemple avec 6 solutions est donné par Innocenti. Notons que Dasgupta [82] a proposé une approche relativement similaire où le problème est réduit à 3 équations plus une équation de contrainte pour trois inconnues. Ces inconnues sont discrétisées et dans chaque cube on utilise une méthode itérative pour déterminer s'il existe un triplet qui satisfait l'équation de contrainte.

Une approche graphique est proposée par Angeles et Zanganeh [12]. Une manipulation des équations du modèle géométrique inverse leur permet de réduire le problème à la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues. Ils tracent alors le contour de ces deux équations et déterminent graphiquement les points d'intersection des deux contours.

Une méthode d'homotopie peut bien sûr être utilisée pour résoudre le pro-

blème. Sreenivasan [415] a adapté l'algorithme de Raghavan pour diminuer le temps de calcul qui s'établit cependant à 11,583 mn sur un VAX 8550 et Dasgupta [81] préconise son utilisation après avoir réduit le nombre d'équations du système alors que Liu [258] l'utilise pour trouver les solutions du modèle géométrique direct des structures de type $RRR - 3S$.

Comme on peut le constater toutes les méthodes précédemment citées utilisent des méthodes numériques itératives. Une approche plus effective serait d'établir une formulation polynomiale, si possible de degré 40. Après de nombreuses tentatives infructueuses de part le monde ce résultat remarquable a été finalement obtenu par M. Husty [185]. Comme Wampler (qui a par ailleurs développé indépendamment une méthode similaire à celle de Husty [452]) il utilise un paramétrage de la matrice de rotation à base des quaternions duaux et après de longues manipulations sur les équations réussit l'élimination conduisant à un polynôme de degré 40 et donne un exemple avec 4 solutions réelles. Malheureusement les manipulations effectuées ne permettent pas le calcul des coefficients du polynôme sous forme symbolique : l'utilisation d'un système de calcul formel est donc encore nécessaire.

La recherche d'un exemple avec 40 solutions réelles est encore en cours, mais elle s'avère difficile. Il est d'ailleurs possible de comprendre pourquoi : considérons un solide occupant un certain nombre de postures différentes et posons-nous la question de savoir combien de points sur ce solide peuvent être, dans toutes les postures, sur une sphère fixée, différentes pour chacun des points⁹. Roth [388] montre que pour 7 postures différentes il peut y avoir un maximum de 20 tels points. Pour notre problème cela veut dire que pour 7 postures de la plate-forme on peut trouver sur celle-ci jusqu'à 20 points restant sur une sphère. Or nous en avons besoin de 6 puisque seuls les points B du plateau mobile reste sur des sphères. Mais dans la suite de son papier il démontre qu'en général pour 8 postures différentes du solide il n'existe plus de points du solide qui sont sur une sphère pour les 8 postures... Or dans notre cas nous cherchons 6 points qui sont sur une sphère pour 40 postures. On conçoit donc que ce cas, s'il existe, est extrêmement particulier. Mentionnons enfin l'intérêt du modèle géométrique direct pour le calcul de la trajectoire d'un type de suspension automobile constitué d'un robot général auquel on enlève un segment.

4.7. Résumé des résultats et conclusion

Les tables ??,?? résument les résultats connus pour le modèle géométrique direct de différents manipulateurs à déplacement dans l'espace. En ce qui concerne les manipulateurs de type robot général, nous avons repris les conclusions

⁹C'est en fait un des sujets du prix Vaillant proposé par l'Académie des Sciences, pour lequel Borel et Bricard ont proposé des solutions partielles

du papier de Faugère et Lazard [102].

La notation utilisée pour la désignation de l'architecture est la suivante : les deux premiers chiffres indiquent le nombre de centre d'articulation sur la base et le plate mobile puis un pictogramme indique le type de connexion, avec un exposant indiquant le nombre de fois où un motif se reproduit. La lettre (P) indique des points coplanaires, la lettre (Q) que des points sont sur un quadrilatère.

Robot	Section	Montage	degré	Sol. réelles
3-3 $\{X(\mathbf{w})\}$ (Δ ,Star)	??	2	explicite	2
Stewart	??	12	2×6	12
6-6 ($ ^6$)	??	40	40	24 (??)
6-6 SSM	??	40	40	16
6-6 5 alignés	??	16	4 explicite	16
6-6 (Q)-(Q)	??	20	10	?
6-5 ($\wedge ^4$)	[102]	40	40	?
6-5 (P)-(P)	??	40	40	10
6-4 ($\wedge ^3$)	??	16	8	10
6-4 ($\wedge^2 ^2$)	??	32	32	?
6-3 ($\wedge \wedge $)	??	8	-	?
6-3 (\wedge^3)	??	16	8	16
5-5 ($\wedge ^3$)	??	40	40	24
5-5 ($\wedge \vee ^2$)	??	24	-	-
5-4 ($\wedge \wedge ^2$)	[102]	32	-	?
5-4 ($\wedge \vee ^2$)	[102]	16	-	?
5-4 ($\wedge \vee $)	[102]	8	-	?
5-4 ($\wedge \vee $)4P-3P	[318]	8	explicite	-
5-4 ($\wedge \wedge \wedge $)	[102]	24	-	?
5-4 ($\wedge^2 \vee$)	??	16	16	8
5-3 ($\wedge \wedge $)	[102]	8	-	?
5-3 ($\wedge \wedge \wedge$)	[102]	16	-	?
5-3 ($\wedge \wedge \wedge$)	[102]	8	-	?
5-3 ($\wedge \vee \wedge$)	[102]	8	-	?

Tableau 4.6: *Résumé des résultats connus pour le modèle géométrique direct : dans l'ordre type du robot, section ou référence où le résultat est présenté, nombre maximum de modes d'assemblage possibles, degré du polynôme mono-variable connu (la mention explicite indique qu'une formulation explicite du résultat est connue), nombre maximum de solutions réelles connues.*

Ces résultats montrent que l'obtention de l'ensemble des solutions du modèle géométrique direct implique, en général, un nombre élevé de calculs, ce qui rend l'utilisation de ce type de méthode incompatible avec une utilisation dans une boucle de commande. C'est pourquoi nous décrivons dans les sections suivantes des méthodes purement numériques rapides mais qui ne fournissent qu'une solution.

Robot	Section	Montage	degré	Sol. réelles
4-4 ($\wedge \vee $)	??	24	12	12
4-4 ($\wedge $)	[102]	8	-	?
4-4 ($\wedge \vee$)	[102]	∞	-	-
4-4 (\wedge^2)	??	16	16	?
4-4 ($\boxtimes ^2$)	??	16	16	16
4-4 ($\wedge \wedge \vee$)	??	16	4	?
4-4 ($\vee \vee $)	[102]	16	-	?
4-4 ($\vee \vee \vee$)	[102]	8	-	?
4-3 ($\boxtimes $)	[102]	8	-	?
4-3 ($\wedge \vee$)	[102]	8	-	?
4-3 ($\vee \wedge$)	[102]	8	-	?
4-3 ($\wedge \wedge \wedge$)	[102]	16	-	?
4-3 ($\wedge \vee$)	[102]	8	-	?
4-3 ($\boxtimes \wedge$)	[102]	8	-	?
4-3 ($\wedge \wedge$)	[102]	16	-	?
3-3 ($\wedge \vee$)	[102]	8	-	?
3-3 (\boxtimes)	??	16	8	16
3-3 ($\boxtimes \vee$)	[102]	8	-	?
3-3 ($\boxtimes \wedge$)	[102]	8	-	?
PRR-3S	??	16	16	4
PPP-3S	??	8	8	4
PPR-3S	??	12	12	4

Tableau 4.7: *Résumé des résultats connus pour le modèle géométrique direct : dans l'ordre type du robot, section ou référence où le résultat est présenté, nombre maximum de modes d'assemblage possibles, degré du polynôme mono-variable connu (la mention explicite indique qu'une formulation explicite du résultat est connue), nombre maximum de solutions réelles connues.*

4.8. Les méthodes numériques rapides

Dans les sections précédentes nous avons exposé les méthodes de calcul du modèle géométrique direct qui permettent de déterminer toutes les solutions possibles du problème. Nous avons d'ailleurs plutôt présenté des algorithmes qui sont orientés vers la résolution du modèle géométrique direct d'une architecture particulière. Il existe cependant des méthodes générales de résolution de systèmes d'équations algébriques qui pourraient être utilisées dans notre cas. Ainsi Pietrus [359] fait un rappel de ces méthodes et expose une méthode orientée manipulateur parallèle. Il utilise d'abord la méthode de triangulation de Ritt puis propose un algorithme itératif qui permet de trouver l'ensemble des solutions du système triangulé.

Les méthodes calculant l'ensemble des solutions présentent divers inconvénients. Tout d'abord leur temps de calcul est élevé et même en dehors du temps de calcul on se trouve confronté ensuite au problème de la détermination de la «bonne» solution dans cet ensemble, c'est-à-dire la configuration courante. Le problème de la recherche de la bonne solution n'a pas été traité dans la littérature probablement en raison de sa complexité. Une première approche est d'éliminer dans l'ensemble des solutions celles qui ne seront pas accessibles physiquement à partir de la configuration nominale (déterminer si une configuration peut être atteinte à partir de la position nominale sans démontage des segments est d'ailleurs un problème ouvert). Mais on ne sait pas si cette méthode de tri conduira toujours à une solution unique et en tout état de cause le tri des solutions implique de lourds calculs.

Un second inconvénient est mentionné par Guglielmetti [149] sur l'exemple du robot «Delta». Pour ce robot la solution du modèle géométrique direct peut être obtenu géométriquement en procédant à l'intersection de trois sphères. Mais un calcul d'intersection numérique est peu robuste : comme les centres des sphères sont estimés à partir des mesures des capteurs on peut donc se trouver dans des situations sans solution.

Dans la pratique on recherche dans la plupart des cas la solution proche d'une configuration connue c'est-à-dire que l'on dispose d'une estimée de la solution qui nous intéresse (par exemple lors d'un mouvement la solution recherchée sera proche de la solution précédemment trouvée). On doit donc trouver une solution d'un système d'équations à partir d'une estimée : ce problème est classique en algorithmique numérique.

C'est pourquoi nous proposons dans cette section différentes méthodes purement numériques et nous comparons leurs performances aussi bien du point de vue atteinte du résultat que du temps de calcul. Nous verrons que sous des hypothèses raisonnables certaines de ces méthodes permettent la détermination de la «bonne» solution dans un temps raisonnable. Avant de passer au descriptif des méthodes numériques pouvant être utilisées, mentionnons avec un certain scepticisme des approches utilisant des réseaux de neurones comme celle

de Geng [117] ou de Yee [467] et des algorithmes génétiques comme proposé par Boudreau [42]. Ce type de méthode semble peu fiable, leur convergence est douteuse et les temps de calcul sont élevés.

4.8.1. Méthodes itératives

Une méthode itérative reposant sur la méthode de Newton du premier ordre, consiste à corriger une estimée initiale à l'aide de la différence entre les longueurs des segments calculées pour cette estimée et les longueurs réelles. Ce principe a été appliqué très tôt pour résoudre le modèle géométrique direct des robots parallèles. On peut utiliser cette méthode avec comme inconnues le paramétrage minimal de définition d'une posture [371] ou sur un vecteur étendu incluant les paramètres des articulations passives [169], voire avec un gain sur le terme correcteur [176].

Plus formellement on écrit que si les coordonnées généralisées \mathbf{X} du plateau mobile sont liées au vecteur ρ par :

$$\mathbf{X} = G(\rho)$$

on peut développer au premier ordre pour écrire :

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{X}_0 + (\rho - \rho_0)^T \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \rho}(\mathbf{X}_0) \quad (4.46)$$

où \mathbf{X}_0 est une estimée de la solution et ρ_0 les longueurs des segments correspondant à cette estimée. Le schéma itératif à l'itération k s'écrit donc :

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + J(\rho - \rho_k)$$

où ρ_k représente les longueurs des segments pour l'estimée \mathbf{X}_k , ρ les longueurs réelles et J une matrice. La matrice la plus « efficace » sera :

$$J = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \rho}(\mathbf{X}_k)$$

Utilisons comme représentation de la position et des orientations le vecteur suivant :

$$\mathbf{X} = [x_c, y_c, z_c, \psi, \theta, \phi]$$

où la partie orientation est constituée des angles d'Euler. La matrice J issue de l'équation (??) est alors la matrice jacobienne des angles d'Euler. A chaque itération on calcule donc une estimée des coordonnées généralisées jusqu'à ce que les valeurs des variables articulaires correspondantes soient proches de celles données en entrée. Le schéma itératif s'arrête lorsque les écarts entre les longueurs estimées à l'itération k et les longueurs justes sont inférieurs à un seuil d'erreur fixé (en général ce seuil est compatible avec la précision des capteurs

mesurant la valeur des variables articulaires). Notons qu'en place des angles d'Euler tout autre représentation angulaire peut convenir. Ainsi Nguyen [327] décrit une méthode similaire où les angles utilisés pour calculer la matrice de rotation sont les angles de *pitch*, *yaw*, *roll*, fréquemment utilisés par les auteurs anglo-saxons. Avec le même paramétrage Jung [209] utilise un filtre de Kalman et le modèle cinématique pour estimer $\Delta\rho$ qui est intégré pour reconstruire ρ . On peut également utiliser comme représentation de la position et des orientations le vecteur suivant :

$$\mathbf{X} = [x_c, y_c, z_c, \alpha\mathbf{v}]$$

où la partie orientation utilise le vecteur de rotation propre δ , constitué du vecteur unitaire porté par l'axe de rotation \mathbf{v} et l'angle de rotation α . On sait que le vecteur de rotation instantanée Ω est lié à δ par la relation :

$$\Omega = \dot{\alpha}\mathbf{v} + \sin\alpha\dot{\mathbf{v}} + (1 - \cos\alpha)\mathbf{v} \wedge \dot{\mathbf{v}}$$

Si l'on suppose α petit cette relation peut s'écrire :

$$\Omega \approx \dot{\alpha}\mathbf{v} + \alpha\dot{\mathbf{v}}$$

d'où :

$$\Omega \approx \dot{\delta} \tag{4.47}$$

La dérivée du vecteur \mathbf{X} est sensiblement égale au torseur cinématique et, en conséquence, la matrice J de l'équation (??) est approximativement identique à la matrice jacobienne cinématique. Dans ce cas à chaque itération on calcule les corrections à apporter aux coordonnées et celles à apporter au vecteur de rotation. En utilisant cette dernière partie il est simple de calculer la matrice de rotation δR correspondante à cette correction en utilisant la formule :

$$\delta R = I_3 + (1 - \cos\alpha)\hat{\mathbf{v}}^2 + \sin\alpha\hat{\mathbf{v}} \tag{4.48}$$

où I_3 est la matrice identité et $\hat{\mathbf{v}}$ la matrice antisymétrique associée au produit vectoriel avec \mathbf{v} :

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quelle que soit la représentation choisie, la matrice J est dépendante de la configuration. On peut alors la calculer soit à chaque pas soit à intervalle régulier comme le fait Helinski [164] ou, si l'espace de travail est suffisamment réduit, utiliser une matrice constante, estimée dans une position «nominale», ce qui pose un problème pour la matrice jacobienne des angles d'Euler qui présente une singularité pour $\theta = 0$ (on est donc obligé de choisir une matrice jacobienne calculée pour une configuration différente de la position nominale).

On peut remarquer que le schéma itératif nécessite à chaque itération principalement un calcul du modèle géométrique inverse. Le temps de calcul nécessaire sera donc approximativement un multiple du temps de calcul du modèle géométrique inverse.

Une variante de ces méthodes consiste à utiliser une particularité que nous avons présentée dans la partie consacrée au modèle géométrique direct d'un robot général : nous avons établi que l'on pouvait exprimer les coordonnées du centre du plateau mobile en fonction des angles de rotation et des longueurs des segments. On peut alors concevoir des méthodes où l'algorithme itératif sert à calculer les angles de rotation et où les coordonnées du centre du plateau sont calculées, à chaque itération, directement à partir des longueurs des segments et des nouveaux angles de rotation. On peut alors espérer une diminution du temps de calcul en raison de la réduction de la taille du vecteur utilisé dans le schéma itératif. Notons que cette technique a aussi été proposée par Innocenti [188] et Parenti [345] qui ont de plus étudié l'interprétation géométrique de la dégénérescence du système d'équations linéaires [190]. Une étude numérique montre cependant que la réduction du temps de calcul est faible alors que le domaine de convergence diminue notablement.

Une autre variante consiste à se passer de la représentation de l'orientation en choisissant comme inconnues des coordonnées de trois des centres d'articulation du plateau mobile. Supposons que l'on cherche à déterminer les coordonnées des points B_1, B_2, B_3 . Remarquons tout d'abord qu'il existe toujours trois triplets $(\alpha_i), (\beta_i), (\lambda_i)$ de constantes telles que :

$$\mathbf{OB}_k = \alpha_k \mathbf{OB}_1 + \beta_k \mathbf{OB}_2 + \lambda_k \mathbf{OB}_3 \quad k \in [4, 6] \quad (4.49)$$

La position des points B_4, B_5, B_6 peut donc être calculée à partir des positions de B_1, B_2, B_3 . Les équations de contrainte reliant les inconnues sont premièrement données par le fait que les distances entre toutes paires d'inconnues est constante :

$$\|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\|^2 = l_{12}^2 \quad \|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_3\|^2 = l_{13}^2 \quad \|\mathbf{B}_3\mathbf{B}_2\|^2 = l_{32}^2$$

Le second type d'équations de contrainte consiste à écrire que les longueurs des segments sont constantes $\|\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i\|^2 = \rho_i^2$. Ces 9 équations s'expriment toutes en fonction des 9 inconnues si l'on utilise les relations (??). Si l'on note \mathbf{X} le vecteur composé des 9 coordonnées des points B_1, B_2, B_3 les 9 équations de contraintes peuvent s'écrire sous la forme $F(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$. On peut alors utiliser la méthode de Newton sur ce système en l'initialisant par une estimée des positions des points B_1, B_2, B_3 . Il faut noter que comme pour les algorithmes précédents il est difficile de calculer la matrice jacobienne du système (cf. exercice). Dans le cas particulier du TSSM, McAree [283] propose d'utiliser le mécanisme équivalent et d'appliquer la méthode de Newton directement sur les équations donnant les distances entre centre des articulations sur la plate-forme mobile en fonction des

trois angles du mécanisme équivalent. L'intérêt est que la matrice jacobienne du système est calculable ce qui permet à McAree de proposer des algorithmes plus robustes lorsque l'on applique cette méthode au voisinage d'une singularité (cet auteur suppose que les solutions du modèle géométrique direct sont toujours séparées par des singularités, ce qui reste à démontrer).

Quel que soit le type de méthode itérative utilisée il faut remarquer que de nombreux calculs effectués dans ces méthodes sont indépendants : il est donc envisageable d'utiliser pour leur implantation une architecture informatique multi-processeurs afin de réduire les temps de calcul. C'est ce qu'a proposé Guglielmetti [149] : partant d'une méthode qui nécessite $640 \mu s$ sur un processeur il montre qu'une implantation sur quatre processeurs permet de réduire ce temps à $343 \mu s$. Certains autres auteurs ont proposé d'utiliser du matériel spécialisé pour réduire le temps de calcul : transputer par Davis [84], implantation parallèle sur DSP pour Mimura [304] ou implantation parallèle pour Gosselin [140].

4.8.2. Efficacité et temps de calcul des méthodes

Nous comparons ici les différentes procédures proposées, dans le cas du robot général, pour un ensemble de valeur de test. Les méthodes sont :

- 1 : algorithme itératif avec jacobienne cinématique. L'algorithme calcule la matrice de rotation mais pas les angles d'Euler correspondant.
- 2 : algorithme itératif avec jacobienne des angles d'Euler. Par construction les angles d'Euler sont calculés.
- 3 : algorithme itératif utilisant 3 points
- 4 : utilisation de la forme polynomiale (cas du TSSM). Le temps de calcul est identique pour tous les tests.
- 5 : utilisation de la forme polynomiale (cas du SSM symétrique). Le temps de calcul est identique pour tous les tests.

On trouve dans la table ?? les valeurs choisies pour les tests. Les jacobienes utilisées dans les méthodes itératives sont estimées en $(0, 0, 40, 0, 0, 0)$ pour la jacobienne cinématique, $(0, 0, 40, 0, 12, 0)$ pour la jacobienne des angles d'Euler. Le seuil d'erreur sur la longueur des segments est de $0,01$ cm.

Les temps de calcul des différentes méthodes sont présentés dans la table ?. Les résultats peuvent se résumer ainsi :

- la méthode itérative utilisant la jacobienne cinématique présente de bonnes caractéristiques de convergence et de temps de calcul

- la méthode itérative utilisant la jacobienne des angles d'Euler est la méthode la plus rapide mais le domaine de convergence est plus faible que celui de la méthode précédente
- la méthode des trois points marche en temps constant, plus élevé que les deux méthodes précédentes. Par contre son domaine de convergence semble plus large, avec une meilleure estimation de l'orientation.
- les méthodes utilisant les formes polynomiales du modèle géométrique direct sont, bien sûr, convergente dans tous les cas, en un temps relativement long.

numéro de test	x_c	y_c	z_c	ψ	θ	ϕ
(0)valeur juste	3	3	40	0	0	0
valeur estimée	2,9	2,9	39,9	0,5	-0,5	0,5
(1)valeur juste	3	3	40	0	0	0
valeur estimée	0	0	40	0	0	0
(2)valeur juste	3	3	40	0	0	0
valeur estimée	2,95	2,95	39,95	0,1	-0,1	0,1
(3)valeur juste	3	3	40	0	0	0
valeur estimée	0	0	45	0	0	0
(4)valeur juste	4	-5	47	15	-10	20
valeur estimée	0	0	45	0	0	0
(5)valeur juste	2	-2	46	15	-10	20
valeur estimée	0	0	45	0	0	0

Tableau 4.8: Valeurs des positions de test (angles en degré).

n° de test méthode	0	1	2	3	4	5
1	0,84	0,8	0,47	0,81	1,62	1,28
2	0,57	0,76	0,4	0,75	-	-
3	1,37	1,36	1,37	1,35	1,35	1,35
4	12,7					
5	4390					

Tableau 4.9: Temps de calcul pour la résolution du modèle géométrique direct (en ms, le signe - indique une non-convergence de l'algorithme).

4.8.3. Convergence des méthodes itératives

On peut se poser la question de la convergence des méthodes itératives pour résoudre le système d'équations $\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ où \mathbf{f} est un vecteur de dimension n . Il existe des résultats sur le domaine de convergence des schémas de Newton [86,

438]. Dans ce qui suit la norme de vecteur ou de matrice est définie de la manière suivante :

$$\text{si } A = ((a_{ij})) \quad \|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

On définit ensuite un point de départ \mathbf{X}_0 de l'itération et un voisinage fermé de ce point :

$$\bar{U}(\mathbf{X}_0) = \{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| \leq \mathcal{H}\}$$

Le théorème de Kantorovitch¹⁰ stipule :

1. si la matrice jacobienne $((\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}))$ possède une inverse J^{-1} en $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$ avec $\|J^{-1}\| \leq A_0$

2. si

$$\|J^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{X}_0)\| \leq B_0 \leq \frac{\mathcal{H}}{2} \quad (4.50)$$

3. si

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left| \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{X})}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq C$$

pour $i, j = 1, 2, \dots, n$ et \mathbf{X} dans $\bar{U}(\mathbf{X}_0)$

4. si les constantes A_0, B_0, C satisfont l'inégalité

$$\mu_0 = 2 n A_0 B_0 C \leq 1 \quad (4.51)$$

alors le schéma itératif :

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - J^{-1}(\mathbf{X}_k)\mathbf{f}(\mathbf{X}_k)$$

avec comme estimée initiale \mathbf{X}_0 converge vers une solution de $\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$. La taille du domaine de convergence est donc donné par $\text{Min}(B_0, \frac{1}{2nA_0C})$. A noter qu'il existe un résultat similaire pour le cas où la matrice J est prise constante.

Nous avons appliqué ce calcul pour la méthode itérative reposant sur l'estimation de la position de trois points B_i (où $n = 9$). En choisissant le triplet de points le plus favorable on trouve $A_0 = 0,214, B_0 = 3,328, C = 4$. L'application de l'inégalité (??) conduit à un diamètre de la boule de convergence de 0,0648. Ceci est en contradiction avec l'expérience qui montre que le domaine de convergence est largement plus étendu. Il semblerait cependant que le théorème de Kantorovitch fournisse une borne exacte dans le sens où il peut exister des cas où la taille du domaine de convergence est effectivement celle donnée par le théorème. La détermination de la convergence du schéma de

¹⁰Le nom de l'auteur de ce théorème m'a été aimablement fourni par O. Chételat

Newton pour une restriction du domaine de recherche est donc un sujet ouvert. Chételet [54] a montré qu'il était par contre possible d'utiliser le théorème de Kantorovitch pour définir un algorithme permettant de suivre une trajectoire dans l'espace des coordonnées généralisées en assurant que l'extrémité de la trajectoire est bien celle désirée.

4.9. Calcul du modèle géométrique direct par ajout de capteurs

Les résultats exposés dans les sections précédentes montrent que le calcul du modèle géométrique direct reste un problème difficile à résoudre, ceci plus spécifiquement s'il existe des contraintes sur le temps de calcul, comme, par exemple, dans le cas d'une utilisation en temps réel. Une approche possible pour la résolution de ce problème est de rajouter des capteurs aux articulations non motorisées de façon à obtenir une information permettant un calcul rapide et simple du modèle géométrique direct, au prix d'une complexité accrue du matériel. Rappelons que l'ajout de capteurs est aussi justifié par la possibilité qu'ils offrent pour l'auto-calibrage du robot.

Cette solution a été adoptée dans la pratique par Inoue [201], Arai et Stoughton [13]. Inoue ajoute dans son prototype des capteurs de rotation mesurant l'inclinaison des parallélogrammes de son robot alors qu'Arai rajoute un bras supplémentaire équipé de 4 capteurs de rotations (2 à chaque extrémité) et un capteur mesurant la longueur du bras passif. Ce principe pose toutefois des problèmes :

- quel est le type et la localisation des capteurs à ajouter?
- quel est le nombre minimal de capteurs permettant d'obtenir une solution unique au modèle géométrique direct?
- la précision de la mesure de la posture du plateau mobile, étant donnée les erreurs de mesure sur les capteurs ajoutés, est-elle compatible avec la précision désirée pour le manipulateur?

Nous allons étudier ces différents problèmes en se restreignant au cas du robot général, dont une étude complète a été faite par Tancredi [437] et plus sommairement par Stoughton [420]. Pour les autres type de robot Baron [27] a explicité quel type de mesure devait être effectué sur les chaînes pour ramener le problème du modèle géométrique direct à la résolution d'un système linéaire alors que Notash [333] a investigué le cas de l'ajout d'une quatrième branche à un robot à 6 degrés de liberté possédant 3 branches.

4.9.1. Type et localisation des capteurs supplémentaires

On peut distinguer deux types de capteur : les capteurs angulaires que l'on peut placer sur les articulations du manipulateur (si possible proche de la base pour ne pas alourdir l'équipage mobile) ou sur des bras passifs supplémentaires et les capteurs linéaires que l'on place sur des segments passifs supplémentaires ou entre des bras existant.

L'inconvénient principal de l'ajout de bras passif est le risque de diminution de l'espace de travail du manipulateur en raison de risque plus important d'intersection des segments. Pour ce qui concerne les capteurs angulaires placés sur les articulations de la base on retrouve les inconvénients des robots série puisque l'erreur sur l'information utilisée dans le calcul de la posture sera celle du capteur multipliée par la longueur du segment : on peut donc craindre une mauvaise qualité de mesure.

4.9.2. Nombre minimal de capteurs

Dans cette section nous nous intéressons à la détermination de la position et du nombre de capteur nécessaire pour déterminer une solution unique au modèle géométrique direct. Ce problème est loin d'être trivial : ajouter un capteur revient à ajouter une équation au modèle géométrique direct du robot dans le but de le simplifier et de permettre sa résolution. On pourra toutefois aboutir à un système admettant plusieurs solutions : il ne faudra pas pour autant rejeter la solution examinée. En effet il peut arriver que ces solutions multiples ne se produisent que dans des configurations ou pour des géométries de robot particulières. Une analyse fine doit alors être effectuée pour chaque robot particulier et peut amener à conclure qu'en pratique la solution sera finalement unique.

Nous supposons que les capteurs additionnels sont du type angulaire s'ils sont placés aux articulations passives ou du type linéaire s'ils servent à instrumenter des segments additionnels.

4.9.2.1. Ajout de capteurs angulaires

Considérons un robot général, auquel on rajoute des capteurs de rotation au niveau des cardans, c'est-à-dire que l'on peut ajouter à chaque articulation un ou deux capteurs. Si l'on suppose que l'on équipe complètement un joint de Cardan avec deux capteurs on dispose alors de la direction du segment associé. Le capteur articulaire fournit par ailleurs la longueur du segments. En conséquence on peut calculer la position de l'extrémité du segment qui appartient à la plate-forme.

Si l'on instrumente trois segments (ce qui implique le rajout de 6 capteurs) on peut calculer la position de trois points de la plate-forme et résoudre le problème du modèle géométrique direct. Ainsi 6 capteurs sont suffisants pour

atteindre le but fixé. Le cas que nous venons d'évoquer sera nommé 2-2-2, chaque chiffre correspondant au nombre de capteurs placés sur un segment.

Un autre cas intéressant est le 2-2 (2 capteurs sur deux cardans) : on peut montrer qu'en général on peut avoir 2 solutions au modèle géométrique direct mais seulement pour des configurations bien particulières du robot [292]. Dans la pratique la solution est unique et cette disposition peut être utilisée.

La table ?? résume les résultats connus pour les autres dispositions et résulte des travaux de Han [152], Tancredi [437], Zanganeh et Angeles [479]. Dans cette table mentionnons que la présence d'une inégalité signifie que le nombre est un majorant et qu'il n'a pas été possible de démontrer si ce nombre pouvait être atteint. On indique par deux nombres que le problème a comme nombre de solution maximal le premier mais que ce nombre n'est atteint que sous certaines conditions. Le second nombre indique alors le nombre de solutions hors de ces conditions. Il est suivi d'un ? si les conditions ne sont pas clairement identifiées.

Disposition	Solutions	Disposition	Solutions
2-2-2	1	2-2-1-1 [437]	2-1
2-1-1-1-1 (SSM) [437]	2-1	2-1-1-1-1 (général) [437]	4
1-1-1-1-1-1	≤ 16	1-1-1-1-1-1 (SSM) [437]	1 (?)
2-2-1 [437]	2-1	2-1-1-1 (SSM) [437]	2-1
2-1-1-1 (général) [437]	4	1-1-1-1-1	≤ 16
2-2 [292][437]	2-1	2-1-1 (SSM) [437]	1
2-1-1 (général) [437]	4	1-1-1-1	≤ 16
2-1 (SSM) [437]	1	2-1 (général) [437]	4-2
1-1-1	≤ 16	2 [152][479]	2-1 (?)
1-1	≤ 32	1-1 (SSM) [437]	≤ 9
1	≤ 40	1 (SSM) [437]	≤ 20
1 (TSSM) [152]	2-1 (?)	1 (MSSM) [152]	2-1 (?)

Tableau 4.10: Nombre de solution au modèle géométrique direct en fonction du nombre de capteurs ajoutés et de leur disposition.

4.9.2.2. Ajout de capteurs linéaires

Dans cette méthode on ajoute des segments passifs dont on mesure les longueurs à l'aide de capteurs linéaires. Cette méthode est intéressante car l'on peut penser que l'estimation de la posture est moins sensible aux erreurs de mesure avec ce type de capteur qu'avec des capteurs angulaires.

Pour le TSSM nous avons vu dans la section ?? que l'ajout de trois segments passifs partageant un point d'articulation sur le plateau mobile permet le calcul de deux solutions explicites, sauf dans le cas de géométries particulières que nous avons présentées dans la section ?? Nous savons aussi qu'il n'est pas nécessaire d'investiguer le cas où l'on utilise un nombre inférieur à 3 segments

puisque Nair [318] a montré que pour 8 segments il existait jusqu'à 8 solutions explicites. Pour le SSM Nair a montré que l'ajout de trois segments passifs permettait en général d'obtenir deux solutions symétriques par rapport à la base.

4.9.3. Relation entre la précision des capteurs et la mesure de la posture

S'il est très intéressant de pouvoir calculer de manière unique le modèle géométrique direct il est aussi nécessaire que la précision du calcul, étant données les erreurs de mesures, reste compatible avec la précision demandée pour la commande du robot. C'est ainsi qu'Arai [13], après avoir connecté un bras série passif à son manipulateur, utilise seulement la mesure de la posture obtenue comme estimée initiale d'un algorithme itératif. L'estimation étant proche de la solution la méthode itérative va converger très rapidement vers la solution et l'on obtiendra ainsi la précision voulue.

Une autre approche possible est de déterminer l'erreur maximale permise pour les capteurs afin d'atteindre une précision voulue sur l'estimation de la posture dans un volume de travail donné. L'étude de la relation entre erreur sur la posture et erreurs sur les capteurs supplémentaires a été faite par Tancredi [437]. Cet auteur a calculé explicitement la matrice reliant les erreurs sur la position de la plate-forme mobile aux erreurs sur les capteurs angulaires dans le cas de la disposition 2-2 et a pu ainsi tracer des cartes qui permettent de calculer la précision capteur nécessaire. La figure ?? montre ainsi la distance maximale entre la posture réelle et la posture calculée dans le cas 2-2-2, lorsque les erreurs capteurs sont bornées par 0,0062 rd et que la plate-forme se déplace dans le plan $x - y$.

Une approche différente est proposée par Baron et Angeles [28] qui établissent dans un premier temps sous quelle condition de disposition des capteurs supplémentaires les équations du modèle géométrique direct deviennent linéaires dans les éléments de la posture du robot. Sous ces hypothèses on peut ramener le problème à la détermination de la matrice de rotation uniquement et Baron propose une méthode d'estimation de la matrice de rotation qui permet de minimiser les erreurs.

4.10. Conclusion

Le calcul du modèle géométrique direct est un de ceux qui pose le plus de problème à la fois théorique et pratique et ce domaine a fait l'objet de nombreux travaux. En utilisant les capteurs nécessaires à la commande du robot on peut parfois déterminer l'ensemble des solutions, mais dans un temps relativement long. Mais l'on ne sait pas trier ces solutions pour déterminer la configuration courante du manipulateur. A une certaine époque on a pensé que

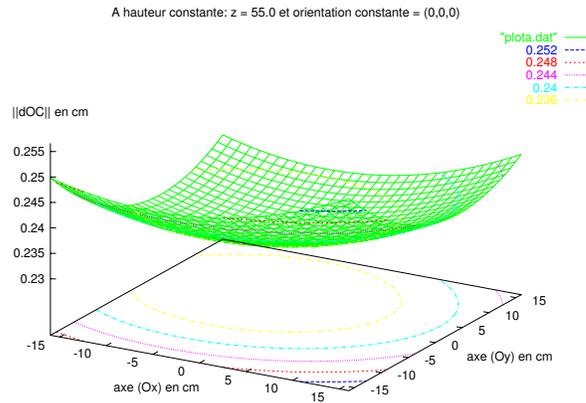


Figure 4.25: *Distance maximale entre la posture calculée et la posture réelle dans le cas 2-2-2 pour des erreurs capteurs bornées par 0.0062 rd et pour des déplacements de la plate-forme dans le plan $x - y$.*

ces solutions se trouvaient dans des composantes connexes séparées par des surfaces de singularité. Malheureusement Innocenti [193] a démontré que cela était faux, au moins pour les robots parallèles plans. Le problème est encore ouvert dans le cas des robots spatiaux.

Dans le cadre de la commande, où les temps de calcul sont cruciaux, il existe des algorithmes numériques rapides mais qui devraient être rendus encore plus rapides pour améliorer la commande. Deux types d'approche sont possibles pour obtenir cette amélioration :

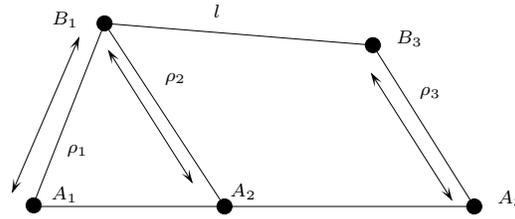
- rajouter des capteurs ce qui permet d'obtenir une solution unique en un temps court
- utiliser une architecture informatique appropriée au parallélisme inhérent des méthodes itératives

Ces deux solutions peuvent d'ailleurs être combinées. Pour la première de ces approches de nombreux problèmes restent ouverts : disposition et type des capteurs, précision nécessaire ...

4.11. Exercices

Exercice 4.1: Montrer que le manipulateur de la figure ?? a au plus 4 modes d'assemblage (indication : on regardera la valeur du polynôme du modèle géométrique direct pour $T = -1, 1$).

Exercice 4.2: Montrer que le robot de la figure suivante a quatre modes d'assemblage, qui peuvent être obtenu en résolvant une succession de deux équations quadratiques.



Exercice 4.3: Déterminer le modèle géométrique direct des différents manipulateurs parallèles plans présentés dans le chapitre «Architecture».

Exercice 4.4: Montrer que le robot «Star» admet deux solutions pour le modèle géométrique direct.

Exercice 4.5: Montrer que le modèle géométrique direct du robot «Delta» peut s'exprimer sous la forme de l'intersection de 3 sphères.

Exercice 4.6: On considère le manipulateur parallèle suivant, décrit par Husain [182] : le plateau mobile est relié à la base par 3 chaînes. Deux de ces chaînes sont constituées de trois articulations rotoïdes successives, l'articulation rotoïde liée à la base étant passive, les autres étant motorisées. La troisième chaîne est constituée d'un cardan attaché à la base, dont les deux rotations sont motorisées, suivi d'une articulation prismatique passive. Les chaînes sont reliées au plateau mobile par des rotules. Montrez que le modèle géométrique direct de ce type de mécanisme ne peut pas avoir plus de 16 solutions et suggérez une manière d'obtenir un polynôme mono-variable permettant de calculer les solutions.

Exercice 4.7: On considère le robot de la figure ??, que Nair appelle le robot $W0$. Montrer en utilisant la méthode de Nair que ce robot admet jusqu'à 8 solutions au modèle géométrique direct, que l'on peut déterminer explicitement.

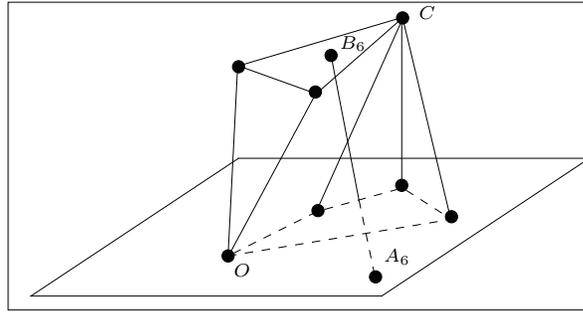
Exercice 4.8: Calculer l'inverse de la matrice jacobienne intervenant dans la méthode itérative reposant sur l'estimation de la position de trois points B_i .

Exercice 4.9: Montrer que pour un TSSM l'ajout, sous certaines conditions, de trois capteurs angulaires supplémentaires permet de déterminer de manière unique le modèle géométrique direct.

Exercice 4.10: Montrer qu'un TSSM équipé de deux capteurs angulaires, sous les conditions de l'exercice précédent, aura en général une solution au modèle géométrique direct.

Exercice 4.11: Montrer sous quelle condition un TSSM équipé de deux capteurs angulaires, sous les conditions de l'exercice précédent, aura deux solutions au modèle géométrique direct.

Exercice 4.12: Montrer qu'un TSSM équipé d'un capteur angulaire, sous

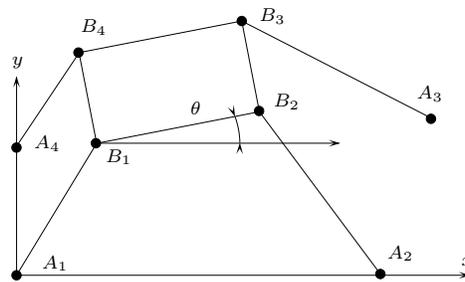
Figure 4.26: *Le manipulateur W0*

les conditions de l'exercice précédent, aura en général une solution au modèle géométrique direct.

Exercice 4.13: Montrer que le robot «Nabla 6» de Bernier [34], décrit dans le chapitre «Architecture» admet au maximum 16 solutions pour son modèle géométrique direct.

Exercice 4.14: Montrer que résoudre le modèle géométrique direct du robot «Hexa» est équivalent à résoudre celui du robot général.

Problème 4.1: On considère le robot plan de Ming [306] constitué d'un plateau rectangulaire relié au sol par 4 câbles (figure ??). Quel est le nombre maximum de solutions à son modèle géométrique direct?

Figure 4.27: *Le robot à câbles de Ming.*

Problème 4.2: On considère les robots dont un majorant du nombre de modes d'assemblage est obtenu à l'aide de la notion de mécanisme équivalent. Est-t'il toujours possible de trouver un manipulateur dont le nombre de modes d'assemblage est égal à ce majorant?

Problème 4.3: Déterminer le nombre minimal de capteurs à ajouter aux différents robots parallèles plans présentés dans le chapitre «Architecture» pour obtenir une solution unique au modèle géométrique direct.

Problème 4.4: La formulation polynomiale du modèle géométrique direct du TSSM permet de trouver l'ensemble des solutions. Mais en général on recherche la solution unique qui correspond à la posture actuelle du robot. Existe-t-il une

méthode permettant de trier l'ensemble des solutions pour éliminer des solutions ? Les critères pouvant être utilisées seraient la donnée d'un montage initial, le fait qu'une solution ne pourrait être atteinte à partir de ce montage sans qu'il y ait intersection des segments ou des plateaux et le passage par des configurations singulières.

Problème 4.5: Existe-t-il des géométries du TSSM où le polynôme du modèle géométrique direct se factorise?

Problème 4.6: Peut-on étendre la méthode de Nair à d'autres architectures de robots comme, par exemple, les robots avec des chaînes de type *PRRS*?

Problème 4.7: Peut-on trouver la forme symbolique des coefficients du polynôme de degré 40 pour le robot général?

Problème 4.8: Quel est le nombre maximum de solutions réelles pour le SSM et le robot général?

Problème 4.9: Peut-on déterminer à partir de l'architecture et de la géométrie d'un manipulateur la fréquence d'obtention des différents nombre de modes d'assemblage pour un espace de travail donné?

Problème 4.10: Peut-on déterminer le domaine de convergence des algorithmes itératifs utilisés pour la résolution du modèle géométrique direct ?

Problème 4.11: Déterminer le positionnement et de nombre minimal de capteurs linéaires à ajouter au robot général pour obtenir une solution unique au modèle géométrique direct.

Problème 4.12: En utilisant les résultats du problème précédent déterminer la relation entre l'erreur sur l'estimation de la posture du manipulateur et les erreurs capteurs.

Problème 4.13: On suppose que l'on place un capteur linéaire entre deux points fixes de deux segments d'un robot général. Combien de capteur de ce type est t'il nécessaire de mettre pour obtenir une solution unique au problème du modèle géométrique direct ?

Table des matières

Chapitre 5

Configurations singulières

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de *configurations singulières* qui sont des postures particulières de l'organe terminal où la rigidité naturelle des manipulateurs parallèles subit une grande détérioration. Nous expliquons pourquoi de telles postures sont à éviter en général et nous montrons comment on peut caractériser ces configurations à l'aide de la matrice jacobienne inverse. Puis nous exposons comment une méthode géométrique permet la détermination systématique des conditions de singularité et amène à l'obtention de relations analytiques entre les paramètres de posture de l'organe terminal qui décrivent les différents cas de singularité. Nous introduisons ensuite des index qui permettent d'évaluer dans quelle mesure on est proche d'une configuration singulière. On expose enfin des méthodes pratiques qui permettent de savoir s'il existe une configuration singulière dans un espace de travail donné.

5.1. Introduction

5.1.1. Singularités et cinématique

Une introduction possible des configurations singulières est d'examiner les relations que nous avons obtenues pour les modèles géométriques. Usuellement pour les robots parallèles on pourra obtenir une relation du type :

$$F(\mathbf{X}, \Theta) = 0$$

où Θ représente les coordonnées articulaires et \mathbf{X} les coordonnées généralisées. Comme le font remarquer Gosselin et Angeles [127], dont on suit l'approche

dans cette introduction, on peut alors, par une dérivation au premier ordre, obtenir une relation du type :

$$\mathbf{U}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{V}\dot{\Theta} = 0$$

Ces relations sont linéaires dans les vitesses et permettent donc les conversions entre vitesses articulaires et vitesses généralisées. Mais ces conversions ne sont possibles que si les matrices \mathbf{U} , \mathbf{V} ne sont pas singulières. On peut donc distinguer 3 cas de singularités : \mathbf{U} , \mathbf{V} singulières, \mathbf{U} singulière, \mathbf{V} singulière,

- Si \mathbf{V} est singulière il existera des vitesses $\dot{\Theta}$ non nulles pour lesquelles la plate-forme ne bouge pas. Cette singularité correspond au cas où le manipulateur est en limite de son espace de travail. Notons que c'est une limite *structurale* qui n'est pas liée à des contraintes sur les variables articulaires.
- Si \mathbf{U} est singulière il existera des vitesses $\dot{\mathbf{X}}$ non nulles pour lesquelles les vitesses articulaires sont nulles. Au voisinage de telle configuration le robot peut effectuer des mouvements infinitésimaux sans modification de la commande. En conséquence certains degrés de liberté deviennent non commandables. Les postures réalisant cette condition seront qualifiés de *configurations singulières* ou de *singularités*.
- Si \mathbf{U} , \mathbf{V} sont singulières on est dans une singularité où on peut bouger l'organe terminal du robot avec les actionneurs bloqués et réciproquement.

5.1.2. Singularités et statique

On peut aussi introduire les singularités en abordant sommairement la notion d'équilibre mécanique d'un robot parallèle, qui sera traitée de manière plus approfondie dans le chapitre «Statique». Pour un manipulateur parallèle nous notons τ le vecteur des forces articulaires et \mathcal{F} le torseur des efforts externes appliqués sur l'organe terminal. Pour un torseur \mathcal{F} appliqué sur le plateau mobile le système mécanique est en équilibre s'il existe des forces articulaires dont l'action sur la plate-forme est l'opposée de \mathcal{F} . Si ce n'est pas le cas, l'organe terminal du manipulateur va se déplacer jusqu'à ce qu'une nouvelle position d'équilibre soit atteinte. Or il existe une relation bien connue entre τ et \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} = J^{-T}\tau \tag{5.1}$$

où J^{-T} est la transposée de la matrice jacobienne cinématique inverse. L'équation précédente décrit un système linéaire en terme de composantes du vecteur τ qui admettra en général une solution en τ pour tout \mathcal{F} (solution qui conduit donc à un équilibre mécanique du système) sauf dans le cas où la matrice J^{-1} est dégénérée : dans ce cas le système linéaire n'admet pas de solution

et le système mécanique n'est plus en équilibre. Concrètement cela signifie que le plateau mobile se déplacera sans qu'il y ait mouvement des actionneurs. Une autre conséquence pratique est qu'au voisinage d'une configuration singulière les forces articulaires peuvent devenir très importantes puisqu'elles s'expriment sous la forme d'un quotient où le dénominateur est le déterminant de J^{-1} . Il y a donc un risque important de détérioration du mécanisme et l'on comprend l'intérêt que présente la détermination des configurations singulières. Ce type de singularité est parfois qualifié de *locale* car elle correspond à des déformations infinitésimales de la structure. On peut aussi définir des singularités *structurelles* où la géométrie du manipulateur est telle que pour une combinaison de variables articulaires on puisse trouver une infinité de solutions. C'est ainsi que Bricard [45] a exhibé des MSSM à longueurs de segment fixes mais dont la mobilité est non nulle (ces mécanismes ont d'ailleurs fait l'objet d'une analyse très fine par Baker [24]) alors que Cauchy [46] a montré que les singularités de l'octaèdre articulé ne pouvait se produire que pour des configurations concaves. Il est alors possible de montrer que ces cas correspondent à l'annulation de tous les coefficients de la forme polynomiale du modèle géométrique direct [49] et nous verrons ultérieurement l'utilité de ce type de mécanisme.

5.1.3. Singularités et modèle géométrique

Une autre manière d'introduire les configurations singulières est de poser le problème de l'unicité de la solution du problème du modèle géométrique direct autour d'une solution donnée. Si l'on considère les équations du modèle géométrique inverse qui servent comme équations de base pour le modèle géométrique direct on pose le problème comme l'unicité de la solution d'un système d'équations non linéaires au voisinage d'une solution de ce système. On peut donc appliquer le théorème du rang qui stipule que la solution sera unique si la matrice jacobienne du système d'équations est non dégénérée et il est facile de montrer que cette matrice jacobienne coïncide avec la matrice jacobienne cinématique inverse.

Il faut enfin mentionner une raison supplémentaire qui a justifié l'amplitude des recherches sur les configurations singulières : à une certaine époque on a pensé que les différentes solutions du modèle géométrique directe étaient situées dans des composantes connexes de l'espace de travail séparées par des surfaces de singularités. Si cela avait été le cas la recherche de la solution aurait pu se faire uniquement dans la composante connexe correspondant à la position de montage initial du manipulateur puisqu'il n'est pas possible physiquement de traverser une singularité. Le problème de tri aurait donc été résolu (toutefois à condition de savoir calculer les composantes connexes). Malheureusement Innocenti [193] a démontré qu'il était possible, pour les robots parallèles plans, de passer d'une solution du modèle géométrique direct à une autre sans passer par une singularité. Pour les robots spatiaux ce problème est encore ouvert.

5.2. État de l'art

La recherche des configurations singulières repose donc sur l'étude de la dégénérescence de la matrice jacobienne cinématique inverse. A priori, comme cette matrice est parfaitement connue, il suffit d'étudier les racines du déterminant de cette matrice pour obtenir les conditions de singularité. Mais nous avons déjà vu que la matrice J^{-1} avait, en général, une formulation assez complexe et que, même avec les systèmes de calcul formel, l'obtention de son déterminant est délicate (même si Mayer [282] a montré que cette tâche était possible pour le robot général). Pourtant ceci ne constituerait que la première étape de la détermination des configurations singulières, la seconde consistant à rechercher les racines de ce déterminant qui est une équation non linéaire dans les paramètres de position et d'orientation de la plate-forme. Cette méthode est cependant applicable, même si elle conduit à des calculs relativement longs, pour des manipulateurs particuliers comme l'ont montré Daniali [79] pour les robots plans, Sefrioui et Gosselin [398] pour les robots sphériques, Fioretti [110] et Tahmasebi [433] pour des cas particuliers de robots à 6 degrés de liberté.

Certains chercheurs comme Arun [21], Fichter [109], Hunt [178] et Liu [263] ont tenté d'analyser de manière intuitive des cas particulier de dégénérescence de l'inverse jacobienne et ont obtenu un certain nombre de cas qui seront présentés dans ce chapitre.

La méthode algébrique n'étant donc pas satisfaisante il a été proposé des méthodes reposant sur la dégénérescence du système des visseurs associés aux chaînes du robot [230, 310, 393, 425]. Ces méthodes sont dans le principe équivalente à l'approche géométrique que nous allons présenter. Ce type de méthode a permis d'établir des conditions de singularité dans certains cas simples comme celui du manipulateur de Behi [31] ou du robot sphérique de Gosselin [124].

Enfin une autre approche, plus numérique, consiste à tenter de définir une «distance» entre une configuration à une singularité, puis d'essayer de trouver numériquement les postures minimisant cette distance (qui ne pourra pas être, nous le verrons, une distance au sens mathématique du terme). On peut ainsi prendre le nombre de condition de la matrice jacobienne inverse comme le fait Xu [464], mais comme le font remarquer Ma et Angeles [269] cette matrice n'est pas homogène du point de vue des dimensions. On est donc amené la pondérer avec toute la part d'arbitraire que cela suppose. Une autre possibilité est d'utiliser le produit des facteurs de transmission comme le propose Funabashi [115].

Une autre approche est proposée par Shi [405] qui détermine les singularités en examinant la dégénérescence de la relation linéaire entre les vitesses articulaires des actionneurs et les vitesses des articulations passives. Mais cette approche revient en fait à l'analyse de la déficience d'une matrice jacobienne.

Il se pose enfin le problème amusant de la détermination des singularités

des robots parallèles à câbles qui correspondent au cas où la tension d'un câble n'est plus assurée, ce qui a été étudié par Landsberger [236].

Nous proposons dans ce chapitre une méthode géométrique qui permet de résoudre de manière satisfaisante le problème dans un grand nombre de cas (on notera par exemple l'analyse des singularités d'un robot à 6 degrés de liberté et trois branches faite par Notash [333]).

5.3. Géométrie de Grassmann

Nous avons vu que les matrices inverses jacobiniennes cinématiques de la plupart des robots à 6 degrés de liberté étaient constituées des vecteurs de Plücker, normalisés ou non, des droites associées aux segments du manipulateur. Nous verrons que cela sera aussi généralement le cas pour tous les robots pleinement parallèles, qu'ils aient ou non 6 degrés de liberté. Rappelons brièvement la définition des coordonnées de Plücker d'une droite : on considère deux points M_1 et M_2 sur cette droite, ainsi qu'un point de référence O (figure ??) et l'on construit le vecteur de dimension 6 suivant :

$$\mathbf{P}_r = [\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2, \mathbf{O}\mathbf{M}_1 \wedge \mathbf{O}\mathbf{M}_2] = [\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1 \wedge \mathbf{O}\mathbf{M}_2]$$

Le vecteur \mathbf{P}_r permet de caractériser la droite passant par les points M_1, M_2 . La représentation d'une droite par ses coordonnées de Plücker est redondante puisque la dimension de ce vecteur est 6 alors que 4 paramètres sont suffisants. Pour diminuer la redondance on peut introduire le vecteur de Plücker normalisé \mathbf{P}_{rn} défini par :

$$\mathbf{P}_{rn} = \left[\frac{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}{\|\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\|}, \frac{\mathbf{O}\mathbf{M}_1 \wedge \mathbf{O}\mathbf{M}_2}{\|\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\|} \right]$$

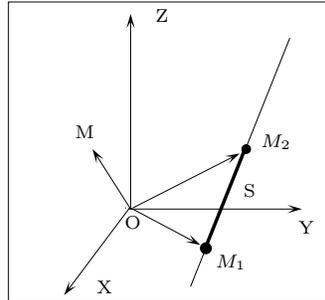


Figure 5.1: La définition des coordonnées de Plücker d'une droite de l'espace.

La dégénérescence de la matrice jacobienne inverse cinématique implique donc une dépendance linéaire entre ces vecteurs. Si n vecteurs de Plücker sont linéairement indépendants, ils engendrent une variété de dimension n et comme ces vecteurs sont de dimension 6 la dimension maximale de la variété est 6. Par

contre si certains d'entre eux sont linéairement dépendants, la variété engendrée est de dimension inférieure à n . H. Grassmann (1809-1877) a montré que la dépendance linéaire des vecteurs de Plücker induit des relations géométriques sur les droites associées et que l'on peut déterminer de telles relations pour qu'un ensemble de m vecteurs de Plücker engendrent une variété de dimension $n < m$. On peut définir les conditions géométriques qui, satisfaites par les droites associées à un ensemble de m vecteurs de Plücker, impliquent que la dimension de la variété engendrée est $m - 1$. Dans le cas qui nous intéresse, si les 6 vecteurs de Plücker engendrent une variété dégénérée (donc de dimension inférieure à 6) alors au moins une des conditions géométriques données par Grassmann doit être satisfaite. On pourra même dans certains cas prévoir quelle sera la nature des degrés de liberté du plateau mobile qui seront associés à la dégénérescence. Pour une introduction complète à la géométrie de Grassmann on pourra se référer utilement à [75, 445].

5.3.1. Variété et géométrie

On va exposer ici, pour chaque dimension possible de la variété engendrée (notée n), la liste des conditions géométriques qui assurent que la dimension de la variété engendrée par un ensemble de vecteurs de Plücker (de cardinal $m = n + 1$) est justement n . Nous commençons par les dimensions 1 à 3 (figure ??) ; la variété de dimension 1 (appelée *point*) est simplement engendrée par un vecteur de Plücker, donc par une seule droite. Une variété de dimension 2 (appelée *ligne*) peut être soit constituée par deux vecteurs de Plücker dont les droites associées sont gauches, c'est-à-dire qu'elles ne se coupent pas et qu'elles ne sont pas parallèles, soit être engendrée par plus de deux vecteurs de Plücker si les droites associées aux vecteurs sont coplanaires et ont un point commun, constituant ainsi un *faisceau plan de lignes*. Pour illustrer simplement notre propos on peut dire que si l'on prend un ensemble de vecteurs de Plücker dont les droites associées satisfont cette condition, alors seuls deux des vecteurs de Plücker sont linéairement indépendants.

Une variété de dimension 3 (appelée *plan*) est obtenue si les droites associées satisfont à l'une des 4 conditions suivantes :

- condition 3d : toutes les lignes sont coplanaires, mais ne constituent pas un faisceau plan de ligne.
- condition 3c : toutes les lignes ont un point commun mais ne sont pas coplanaires.
- condition 3b : toutes les lignes appartiennent à l'union de deux faisceaux plan de lignes non coplanaires mais qui ont une ligne en commun.
- condition 3a : toutes les lignes appartiennent à un *regulus*.

Si les trois premières conditions sont claires la quatrième nécessite que nous fassions un rappel sur la notion de *regulus*. Considérons 3 lignes gauches de l'espace et l'ensemble des droites qui coupent ces 3 lignes. Cet ensemble constitue une surface, un hyperboloïde, et les lignes de l'ensemble sont appelées les *générateurs* de la surface alors que l'ensemble des lignes est appelé le *regulus*. Il est possible de montrer qu'à partir du *regulus* on peut construire un deuxième ensemble de lignes qui génèrent la même surface, c'est-à-dire qu'il existe deux *reguli*, qui sont appelés *regulus* et *regulus complémentaire*, la première démonstration ayant été proposée par Sir Christopher Wren en 1645. L'hyperboloïde est donc une surface doublement réglée. Les lignes des *reguli* ont une propriété intéressante : chaque ligne d'un *regulus* coupe toutes les lignes de l'autre *regulus* mais aucune de son propre *regulus*.

Exposons maintenant les conditions géométriques caractérisant les variétés de dimension 4 et 5.

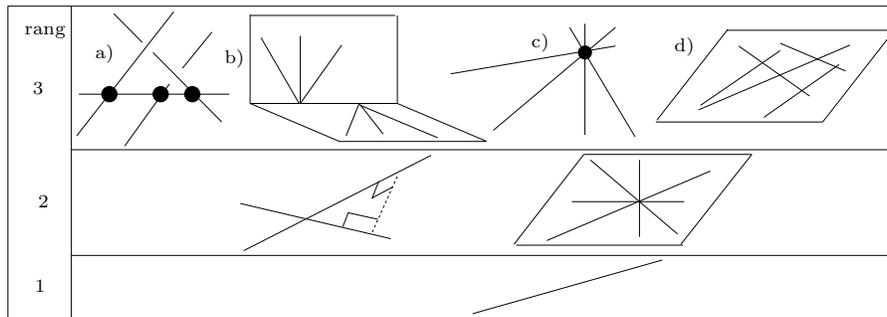


Figure 5.2: Les différentes variétés de Grassmann de dimension 1, 2, 3.

Une variété de dimension 4 (appelée *congruence*) est un ensemble de droites dont les éléments vont satisfaire une des 4 conditions suivantes :

- condition 4d : toutes les lignes sont dans un plan ou passent par un point de ce plan. On parle alors de *congruence dégénérée*.
- condition 4c : toutes les lignes appartiennent à l'union de trois faisceaux plan de lignes, tous dans des plans différents, mais qui ont une ligne en commun. Cette *congruence* est désignée sous le nom de *congruence parabolique*.
- condition 4b : toutes les lignes concourantes à deux droites gauches, connue sous le nom de *congruence hyperbolique*.
- condition 4a : variété engendrée par 4 lignes gauches. Aucune de ces lignes ne coupent le *regulus* généré par les 3 autres (*congruence elliptique*).

Une variété de dimension 5 (appelée *complexe*) sera soit *singulière* (5b), soit *non singulière* (ou *générale*) (5a). Si le complexe est singulier alors les lignes doivent toutes être concourantes avec une ligne de l'espace. La caractérisation géométrique d'un complexe non singulier est que toutes les lignes coplanaires d'un tel complexe ont un point en commun ou, en d'autres mots, que toutes les lignes coplanaires d'un complexe non singulier constituent un faisceau plan de lignes. Notons que le degré de liberté associée à un complexe est un mouvement de vissage [25]. La figure ?? résume les conditions géométriques pour les variétés de dimension 4 et 5.

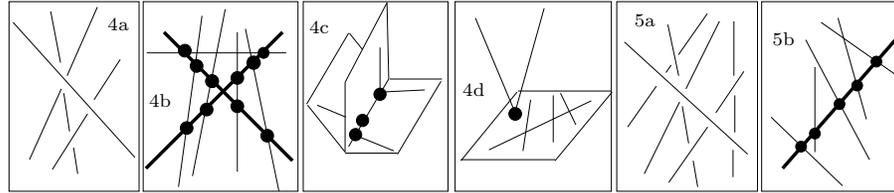


Figure 5.3: Les variétés de Grassmann de dimension 4 et 5. Les variétés sont générées par les lignes en trait fin.

5.3.2. Principe de recherche des singularités

Nous disposons maintenant des conditions géométriques caractérisant la dépendance linéaire d'un ensemble de vecteurs de Plücker et, par voie de conséquence, la dégénérescence de l'inverse de la matrice jacobienne d'un manipulateur parallèle. Le principe de l'algorithme de recherche des configurations singulières va consister à considérer tous les ensembles de n droites associées aux segments, puis à rechercher les conditions à imposer à la configuration du plateau mobile pour que les n droites satisfassent à une des conditions géométriques qui assurent que la variété générée est de dimension $n - 1$. Ainsi si l'on considère un ensemble de 4 lignes on va rechercher les conditions à imposer sur les paramètres de position et d'orientation du plateau mobile pour que les 4 lignes ne génèrent qu'une variété de dimension 3. On cherchera donc, par exemple, à déterminer dans quelle configuration du plateau mobile les 4 droites considérées ont un point commun, satisfaisant ainsi à la condition 3c. Pour un manipulateur à 6 degrés de liberté on est donc amené à considérer tous les ensembles de 6, 5, 4, 3 droites (2 droites ne peuvent pas engendrer une variété dégénérée de dimension 1 sauf si les droites sont confondues, ce qui, en général, est exclu).

5.3.3. Exemples d'analyse

5.3.3.1. Manipulateur plan

On considère le manipulateur plan simplifié présenté dans la figure ???. Dans ce

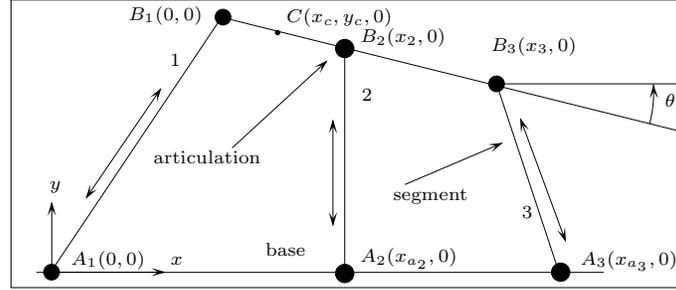


Figure 5.4: Le manipulateur plan dont on recherche les configurations singulières

cas il est relativement aisé d'obtenir le déterminant Δ de la matrice jacobienne inverse. Avec les notations de la figure on obtient :

$$\Delta = \cos(\theta)(x_{a_2}x_3 - x_2x_{a_3})y_c^2 + ((x_{a_2} - x_{a_3})x_2x_3 \cos(\theta) + (x_{a_3} - x_c)x_{a_2}x_3 + (x_{a_3}x_c - x_{a_2}x_{a_3})x_2) \sin(\theta)y_c - \sin^2(\theta)x_2x_3x_c(x_{a_2} - x_{a_3}) \quad (5.2)$$

Toutefois l'interprétation géométrique de l'annulation de cette équation est difficile. On peut aussi exprimer la condition d'équilibre du plateau mobile sous l'action d'un torseur externe $\mathcal{F} = (F_x, F_y, M_z)$ dont le moment est mesurée par rapport au point B_1 et des forces articulaires τ_1, τ_2, τ_3 . On a :

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1_x} & n_{2_x} & n_{3_x} \\ n_{1_y} & n_{2_y} & n_{3_y} \\ 0 & x_2(\cos \theta n_{2_y} - \sin \theta n_{2_x}) & x_3(\cos \theta n_{3_y} - \sin \theta n_{3_x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

où \mathbf{n}_i représente le vecteur unitaire du segment i . Considérons les 3 vecteurs colonne \mathcal{T}_i de la matrice 3×3 ci-dessus. Si un de ces vecteurs est linéairement dépendant des deux autres alors le manipulateur est en configuration singulière. On peut construire à partir de ces vecteurs des vecteurs augmentés \mathcal{S}_i de dimension 6 en ajoutant trois zéros :

$$\mathcal{S}_i = [n_{i_x}, n_{i_y}, 0, 0, 0, x_i(\cos \theta n_{i_y} - \sin \theta n_{i_x})]$$

Il est clair que si l'un des \mathcal{T}_i est linéairement dépendant des deux autres alors le \mathcal{S}_i est lui aussi dépendant des deux autres et réciproquement. On peut alors remarquer que le vecteur \mathcal{S}_i est le vecteur de Plücker de la ligne associée au segment i .

On peut donc maintenant utiliser la méthode reposant sur la géométrie de Grassmann : nous avons ici un manipulateur à 3 segments et l'on va donc

regarder quelles sont les configurations du plateau mobile où les 3 lignes associées aux segments (qui sont coplanaires) passent par un même point, seule condition pour laquelle les trois vecteurs de Plücker associées aux droites engendrent une variété de dimension 2. Notons tout de suite que l'on n'a pas à considérer le cas des couples de droites puisqu'ils ne peuvent être dégénérés que si les droites sont confondues et qu'en conséquence les 3 droites ont automatiquement un point commun. Le manipulateur considéré ainsi qu'une des configurations singulières sont présentés en figure ???. Comme il n'existe qu'un

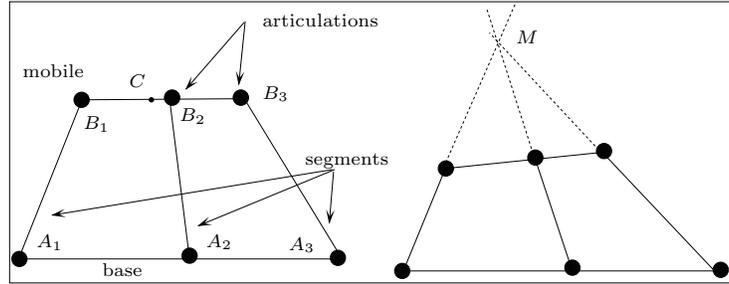


Figure 5.5: *Le manipulateur plan et une de ces configurations singulières. Dans les configurations singulières les lignes associées aux segments ont un point commun (M).*

cas de dégénérescence l'équation $\Delta = 0$ exprime donc que les trois droites ont un point commun. Sefrioui [399] a effectué une analyse complète des lieux de singularité des robots plans et a montré qu'en général il s'agit de coniques. Une analyse des singularités des robots plans de type 3 – \underline{RRR} a été effectuée par Gosselin [138] : on retrouve le fait que les droites associées aux segments terminaux doivent avoir un point commun mais les lieux correspondant à ces singularités sont plus délicat à exprimer.

5.3.3.2. Le MSSM

Un exemple d'analyse plus complète est présenté dans cette section pour le MSSM (figure ??).

Dans la suite on suppose qu'aucun des segments ne peut être coplanaire avec la base et que, par voie de conséquence, les plateaux ne sont pas coplanaires. On écarte aussi le cas où deux droites seraient confondues, ce qui est exclu par la géométrie du MSSM. On notera par P_{ij} le plan contenant les segments i, j .

Considérons le cas où 3 des vecteurs de Plücker sont linéairement dépendants et, par conséquent, que les 3 droites associées sont coplanaires et ont un point commun. Remarquons que pour tout triplet de droites qui ont la possibilité d'être coplanaires (1, 2, 3 par exemple) deux de ces droites ont déjà un point d'articulation commun sur le plateau mobile. Ce point doit donc être le centre du faisceau de droites éventuel. De plus la troisième ligne a un

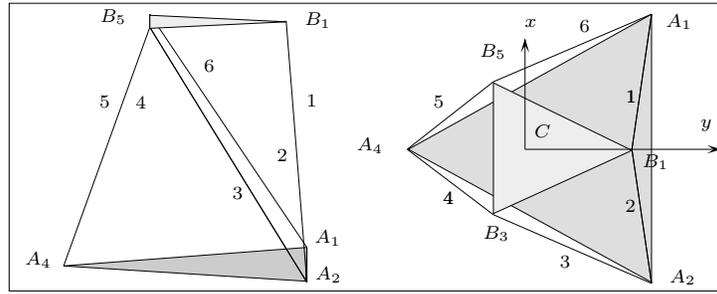


Figure 5.6: *Le MSSM. Le repère de référence est le repère O, x, y, z (ici O coïncide en projection avec C , un point du plateau mobile).*

point d'articulation commun avec l'une des deux autres droites mais, cette fois, cette articulation est liée à la base. Si cette troisième ligne passait par le centre du faisceau elle aurait donc deux points communs avec l'une des deux autres droites et serait confondue avec celle-ci, ce que nous avons exclu par hypothèse. Donc aucun ensemble de 3 vecteurs de Plücker ne peut engendrer une variété de dimension 2.

Considérons maintenant 4 droites et examinons si elles peuvent satisfaire la condition 3d, c'est-à-dire que les 4 droites soient coplanaires. En utilisant la remarque faite précédemment nous savons qu'au moins deux de ces lignes ont un point d'articulation commun sur la base (le plateau mobile) et qu'une autre paire a un point d'articulation commun sur le plateau mobile (la base). Dans ces conditions les seuls quadruplets de droites possibles sont $(1,2,3,6)$, $(2,3,4,5)$, $(1,4,5,6)$. En modifiant les repères de base et mobile on peut se limiter à l'étude du quadruplet $(1,2,3,6)$. Remarquons alors que si $(1,2,3,6)$ sont coplanaires alors le plateau mobile est lui aussi dans le plan des droites. On obtient ainsi la configuration de Hunt, du nom de son découvreur (figure ??). On peut alors

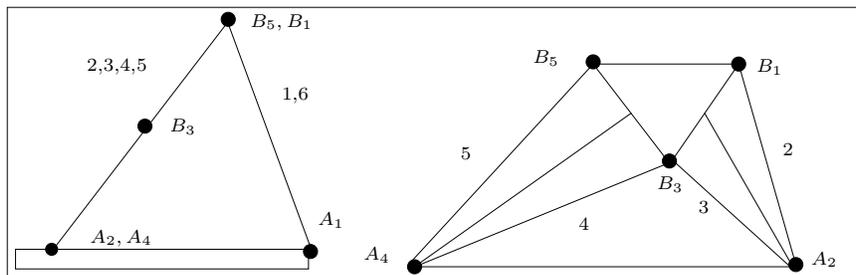


Figure 5.7: *Configuration singulière de type 3d pour un MSSM.*

exprimer les coordonnées des centres des d'articulation par :

$$A_6 = A_1 = \begin{pmatrix} x_{a_0} \\ y_{a_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = A_2 = \begin{pmatrix} x_{a_1} \\ y_{a_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_5 = A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{a_3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B_3 = B_4 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B_5 = B_6 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La condition de coplanarité des droites s'exprime à l'aide des équations :

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \wedge \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 = 0 \quad (5.4)$$

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \wedge \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{A}_6\mathbf{B}_6 = 0 \quad (5.5)$$

Les équations (??), (??) constituent un système linéaire en y_c, z_c où x_c n'est pas présent. Le déterminant Δ de ce système est

$$\Delta = -\sin(\theta)\sin(\psi)(x_{a_0} - x_{a_1})^2(-x_3 + x_2)(-y_2 + y_0) \quad (5.6)$$

Si ce déterminant est non nul on peut alors calculer y_c, z_c :

$$y_c = y_0 \sin(\psi) \sin(\phi) - y_0 \cos(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi) + y_{a_0} \quad (5.7)$$

$$z_c = -\sin(\theta) \cos(\phi) y_0 \quad (5.8)$$

mais il est alors possible de montrer que ces valeurs conduisent à :

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \wedge \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2) = 0 \quad (5.9)$$

Les segments 1, 2 sont alors colinéaires et dans le plan de la base, ce qui est exclu par hypothèse. On est donc amené à considérer le cas où $\Delta = 0$. Cette condition est satisfaite si $\sin(\theta) = 0$, soit $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Si $\theta = 0$ les équations (??), (??) s'écrivent alors :

$$-z_c(-x_{a_1} + x_{a_0})(-\sin(\psi)x_2 - \cos(\psi)y_2 + \cos(\psi)y_0) = 0 \quad (5.10)$$

$$-z_c(-x_{a_1} + x_{a_0})(-\sin(\psi)x_3 - \cos(\psi)y_2 + \cos(\psi)y_0) = 0 \quad (5.11)$$

qui ne peuvent être satisfaites que si $z_c = 0$. Tous les segments sont alors dans le plan de la base. Pour $\theta = \pi$ les équations (??), (??) s'écrivent alors :

$$z_c(-x_{a_1} + x_{a_0})(\sin(\psi - \phi)x_2 + \cos(\psi - \phi)y_0 - \cos(\psi - \phi)y_2) = 0 \quad (5.12)$$

$$z_c(-x_{a_1} + x_{a_0})(\sin(\psi - \phi)x_3 + \cos(\psi - \phi)y_0 - \cos(\psi - \phi)y_2) = 0 \quad (5.13)$$

qui ne peuvent être satisfaites que si $z_c = 0$. Tous les segments sont alors dans le plan de la base.

L'autre cas d'annulation du déterminant Δ est obtenu pour $\sin(\psi) = 0$, soit $\psi = 0$ ou $\psi = \pi$. Dans le premier cas les équations (??), (??) sont identiques et s'écrivent :

$$z_c = -\frac{(y_{a_0} - y_c) \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = H_{3d_3}(y_c, \theta) \quad (5.14)$$

et dans le second cas :

$$z_c = \frac{(y_{a_0} - y_c) \sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad (5.15)$$

La condition de singularité 3d s'écrit donc :

$$\psi = 0 \quad z_c = H_{3d_3}(y_c, \theta) \quad \forall x_c \quad (5.16)$$

$$\psi = \pi \quad z_c = -H_{3d_3}(y_c, \theta) \quad \forall x_c \quad (5.17)$$

Il est important de remarquer que dans cette configuration 3d les 6 lignes coupent la ligne passant par B_3, B_5 : c'est donc aussi une configuration 5b et les lignes constituent un complexe singulier.

Considérons maintenant le cas 3c où les 4 droites passent par un même point. Dans un quadruplet de droites, deux droites ont un point A_i commun sur la base alors que les deux autres ont en commun B_j sur le plateau mobile. Dans chacun de ces couples les droites ne peuvent pas avoir d'autre point commun, sous peine d'être confondues. Le seul cas où ces 4 droites auront un point commun serait celui où les centres A_i et B_j des articulations sont confondus, ce qui est exclu par hypothèse. Cette configuration n'est donc pas possible.

Considérons maintenant le cas 3b, où les 4 droites appartiennent à l'union de deux faisceaux plan de droites. Les différents types de quadruplets possibles peuvent se ramener à l'étude des quadruplets suivants : (1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 3, 6).

- quadruplet (1, 2, 3, 4) : nous connaissons le centre des deux faisceaux, B_1 et B_3 ainsi que leur plan, P_{12}, P_{34} . Si une droite appartient aux deux faisceaux elle sera donc supportée par B_1B_3 . Par conséquent B_1B_3 appartient à l'intersection du plan des deux faisceaux, soit P_{12}, P_{34} . Or le point A_2 appartient à cette intersection et en conséquence les points A_2, B_1, B_3 seraient alignés ce qui veut dire que les lignes 2 et 3 sont confondues, ce que nous avons exclu.
- quadruplet (1, 2, 3, 5) : la ligne commune aux deux faisceaux appartient à l'intersection des plans P_{12}, P_{35} et par conséquent le point A_2 appartient à cette ligne. Le centre B_1 du faisceau engendré par 1 et 2 appartient aussi à cette ligne commune et donc cette ligne est la ligne 2. Un point de la ligne 3 appartient aussi à cette ligne et en conséquence les droites 2 et 3 sont confondues, ce que nous avons exclu.
- quadruplet (1, 2, 3, 6) : les plans P_{12}, P_{36} ont en commun les points A_1, A_2 qui supportent donc la ligne commune mais cette ligne ne passe par le

centre B_1 du faisceau engendré par 1 et 2. La condition ne peut donc pas être satisfaite.

Dans le cas 3a les 4 droites appartiennent au même *regulus*. Rappelons que toutes les lignes d'un *regulus* sont gauches : on peut alors constater qu'il n'existe pas de quadruplet de segments du MSSM tel que les droites associées soient toutes gauches, et donc il n'existe pas de droites appartenant au même *regulus*.

Ayant épuisé les conditions géométriques pour les ensembles de 4 droites nous passons maintenant au cas de 5 droites en commençant par la configuration 4d où les 5 droites sont coplanaires ou passent par le même point du plan. Tout d'abord il faut remarquer que nous ne pouvons pas avoir 5 droites coplanaires. Nous avons aussi déjà traité le cas où 4 droites seraient coplanaires (cas 3d) : il reste donc à traiter le cas où nous aurions trois droites coplanaires. On peut alors distinguer deux cas. Le premier est celui où deux de ces trois droites ont un point d'articulation commun sur le plateau mobile (2, 3, 4 par exemple) et le deuxième celui où aucune de ces trois droites n'a un point d'articulation commun sur le plateau mobile (2, 3, 5 par exemple). Dans ce dernier cas une des droites restantes est alors coplanaire avec le triplet considéré (la ligne 4 dans notre exemple) et nous pouvons appliquer le résultat obtenu pour 4 droites coplanaires. Dans le premier cas il est facile de montrer que, pour chaque couplet de droites restant, les points d'intersection avec le plan sont des couplets de type (A_i, B_j) , points qui ne peuvent être confondus par hypothèse. Par exemple pour le triplet initial (2-3-4) on aura comme point d'intersection avec le plan (2-3-4) pour le couplet (1-5) les points (A_5, B_2) .

Reste à traiter le cas où 3 droites auraient un point commun, dans le plan des deux droites restantes. Sans perte de généralité on suppose que les droites coplanaire sont les droites 1-2. Les lignes 3-6 coupent ce plan en des points distincts $(A_1$ et $A_2)$ et donc seuls les 2 quintuplets (1,2,3,4,5) et (1,2,4,5,6) peuvent éventuellement satisfaire la condition géométrique. Pour ceux-ci le point d'intersection avec le plan est alors A_3 ou A_6 . Mais dans les triplets de droites (3,4,5), (4,5,6) deux droites ont déjà un point commun (B_3 ou B_5). Elles ne peuvent donc pas avoir un autre point commun, ce qui conclut l'étude de ce cas.

On peut écarter rapidement le cas 4c puisqu'il faut que 3 droites appartiennent à un faisceau de lignes. Reste donc à traiter le cas 4b où les 5 droites coupent toutes deux droites gauches. Sans perte de généralité on peut considérer le quintuplet (1,2,3,4,5). Remarquons tout d'abord qu'il n'est pas possible que deux droites gauches soient concourantes avec deux (ou plus) droites coplanaires : 1,2,3 doivent donc être non coplanaires. Si une ligne coupe les droites 1, 2, 3 alors nous avons trois possibilités :

- (4b1) elle est dans le plan 2-3 et passe par le point d'articulation du plateau mobile commun à 1-2 (droite D1, figure ??).
- (4b2) elle est dans le plan 1-2 et coupe 3 au point d'articulation de la

base commun à 3 et 2 (droite D2, figure ??).

- (4b3) elle passe à la fois par B_1 et B_3 .

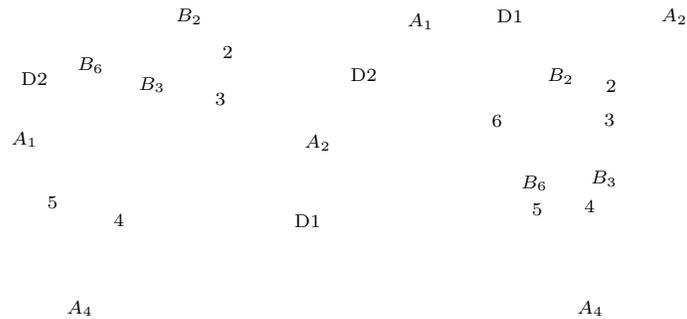


Figure 5.8: Comment deux droites gauches ($D1$, $D2$) peuvent couper les droites associées aux segments 1,2,3.

Remarquons alors qu'une ligne qui a un point commun avec 4-5 se trouve dans le plan 4-5 ou passe par le point d'articulation sur la base commun à 4 et 5 (A_4). Dans le cas 4b1 la ligne ne passe pas en même temps par B_1 et B_3 . Si elle coupe 1-2-3-4-5 elle est donc soit dans le plan 1-2 ou dans le plan 2-3, en même temps que dans le plan 4-5 ce qui n'est possible que si 2-3-4 sont coplanaires, auquel cas on ne peut pas trouver une deuxième droite satisfaisant à la condition et qui soit gauche avec la première. Remarquons que dans ce cas pour que la ligne coupe 5 elle doit passer par A_4 (on exclut le cas où 5 est coplanaire avec 2-3-4 qui nous ramène à la configuration de Hunt).

Dans le cas 4b2 remarquons qu'il n'y a pas de ligne dans le plan 1-2 ou 2-3 qui passe par A_4 , donc qu'aucune ligne de ce type ne peut couper en même temps 1-2-3-4-5.

Dans le cas 4b3 si la ligne passant par B_1, B_3 coupe 5 alors 2-3-4-5 sont coplanaires (configuration de Hunt) et il n'existera alors pas d'autre ligne gauche coupant les 5 droites. On ne peut donc pas trouver deux droites gauches concourantes avec toutes les droites du quintuplet.

Pour terminer l'examen des quintuplets de droite il reste à traiter le cas 4a. Il s'agit de déterminer si deux des droites peuvent couper le *regulus* généré par les trois autres en un point propre. Considérons les droites (1,2,3,4,5) ; dans ce quintuplet le seul triplet de droites gauches est (1,3,5), mais les droites 2 et 4 coupent les droites de ce triplet. La condition ne peut donc pas être satisfaite.

Nous pouvons maintenant considérer le cas des sextuplets de droites et traiter tout d'abord le cas 5b (complexe singulier), où les 6 droites sont toutes concourantes avec la même droite. Nous avons vu (dans le cas 4b) que toutes les droites d'un quintuplet ne coupent une ligne que dans deux cas :

- la ligne contient une arête du plateau mobile et les 4 segments successifs

du manipulateur sont coplanaires (configuration de Hunt).

- trois segments sont coplanaires et la ligne passe par les points d'articulation sur la base et le plateau mobile qui ne sont pas communs à deux des trois segments (figure ??).

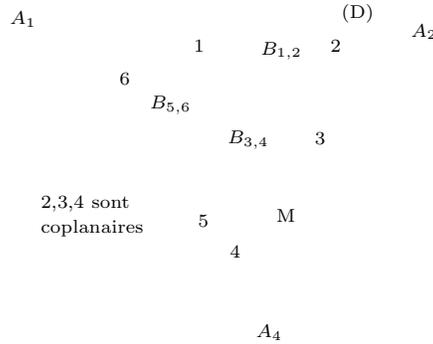


Figure 5.9: La ligne (D) coupe ici par construction les 5 droites (1,2,3,4,5). En faisant tourner le plateau mobile autour de B_2B_4 on peut rendre concurrente la sixième droite avec (D) au point M.

Dans le premier cas prenons la droite passant par B_4, B_5 qui coupe par construction les droites 3,4,5,6. Si elle possède un point commun avec 1, alors les segments 1,2,3,6 sont coplanaires et toutes les droites sont bien concurrentes avec une ligne : on retrouve la configuration de Hunt.

Dans le second cas supposons que les segments coplanaires soient 2,3,4 et considérons la ligne (D) passant par B_2 et A_4 . Cette ligne coupe les segments 1,2,3,4,5 ; faisons tourner maintenant le plateau mobile autour de l'arête B_4B_2 . Soit M le point d'intersection de la droite 6 avec le plan 2-3-4 : il apparaît clairement sur la figure ?? que l'on peut trouver une rotation qui amène M sur la ligne (D). Cette ligne a alors un point commun avec chacune des 6 droites associées aux segments.

Une telle configuration est caractérisée par son triplet de droites coplanaires. Il est facile de montrer que si l'on ne veut pas avoir 4 droites coplanaires les seuls triplets à considérer sont (1,2,3), (1,5,6), (2,3,4), (3,4,5), (4,5,6). De la même manière que pour le cas 3d on peut toujours ramener l'étude de ces triplets à l'étude du triplet (1,2,3) par des changements de repère appropriés. Dans ce cas la ligne (D) passant par A_1, B_3 coupe par construction les lignes (1, 2, 3, 4, 6). On doit ensuite écrire la condition qui indique que la ligne 5 coupe (D). La coplanarité de (1,2,3) s'exprime par l'équation :

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \wedge \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 = 0 \quad (5.18)$$

La condition d'intersection de 5 avec la droite passant par A_1, B_3 s'écrit :

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_3 \cdot (\mathbf{OA}_5 \wedge \mathbf{OB}_5) + \mathbf{A}_5\mathbf{B}_5 \cdot (\mathbf{OA}_1 \wedge \mathbf{OB}_3) = 0 \quad (5.19)$$

Les équations (??)(??) constituent un système linéaire en y_c, z_c dont le déterminant est :

$$\begin{aligned} \Delta = & \sin \theta (x_2 - x_3) (y_0 x_{a_0} \sin \psi + y_0 y_{a_3} (\cos^2 \phi \cos \psi - \cos \phi \sin \psi \cos \theta \sin \phi) \\ & x_2 y_{a_3} (\sin \psi \cos \theta - \sin \psi \cos \theta \cos^2 \phi - \sin \phi \cos \psi \cos \phi)) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Dans le cas où $\Delta \neq 0$ la condition de singularité s'écrit :

$$y_c = H_{5b_1}(x_c, \mathbf{\Omega}_c) \quad z_c = H_{5b_2}(x_c, \mathbf{\Omega}_c) \quad (5.21)$$

Un exemple de configuration singulière de ce type est présenté en figure ???. Dans le cas où $\Delta = 0$ avec $\sin(\theta) = 0$ et $\theta = 0$ les équations (??)(??) se

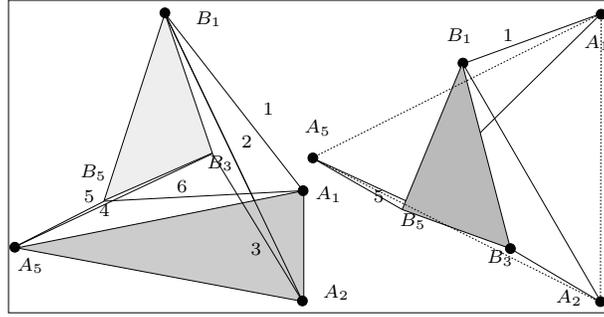


Figure 5.10: Un exemple de configuration singulière de type 5b pour le MSSM. Les lignes 1,2,3 sont coplanaires donc la ligne A_1B_3 coupe les segments 1, 2, 3, 4, 6. De plus par construction la ligne A_5B_5 coupe la ligne A_1B_3 .

réduisent à :

$$-z_c(-x_{a_1} + x_{a_0})(-\sin(\psi)x_2 + \cos(\psi)y_0) = 0 \quad (5.22)$$

$$z_c(y_{a_3} \cos(\psi) + x_{a_0} \sin(\psi))(-x_3 + x_2) = 0 \quad (5.23)$$

qui ont comme solutions $z_c = 0$ (les segments sont dans le plan de la base) et :

$$\tan \psi = \frac{y_0}{x_2} = -\frac{y_{a_3}}{x_{a_0}} \quad (5.24)$$

qui ne peut être vérifiée que pour des géométries particulières du manipulateur.

Si $\theta = \pi$ les équations (??)(??) se réduisent à :

$$z_c(-x_{a_1} + x_{a_0})(-\sin(\psi - \phi)x_2 + y_0 \cos(\psi - \phi)) = 0 \quad (5.25)$$

$$-z_c(\sin(\psi - \phi)x_{a_0} - \cos(\psi - \phi)y_{a_3})(-x_3 + x_2) = 0 \quad (5.26)$$

qui ne sont vérifiées que pour des géométries particulières du manipulateur. L'autre cas d'annulation du déterminant est obtenu pour :

$$\begin{aligned} y_0 x_{a_0} \sin \psi + y_0 y_{a_3} (\cos^2 \phi \cos \psi - \cos \phi \sin \psi \cos \theta \sin \phi) \\ x_2 y_{a_3} (\sin \psi \cos \theta - \sin \psi \cos \theta \cos^2 \phi - \sin \phi \cos \psi \cos \phi) = 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

qui permet de calculer ψ .

$$\begin{aligned} \psi = & -\arctan(y_{a_3} \cos \phi (\cos \phi y_0 - x_2 \sin \phi) / (x_2 y_{a_3} \cos \theta \sin^2 \phi \\ & + y_0 (x_{a_0} - y_{a_3} \cos \phi \cos \theta \sin \phi)) \end{aligned} \quad (5.28)$$

L'équation (??) permet alors de calculer z_c et l'équation (??) permet alors de calculer x_c . La condition de singularité s'écrit donc :

$$\psi = H_{5b_3}(\theta, \phi) \quad z_c = H_{5b_4}(y_c, \theta, \phi) \quad x_c = H_{5b_5}(y_c, \theta, \phi) \quad (5.29)$$

Ayant traité le cas du complexe singulier, considérons maintenant celui du complexe général (cas 5a). Remarquons que nous avons déjà retrouvé une des deux configurations singulières exposées dans la littérature, celle de Hunt, mais que nous n'avons pas encore trouvé celle de Fichter, observée tout d'abord expérimentalement par cet auteur [107] puis justifiée théoriquement [109], obtenue pour une rotation du plateau mobile autour de l'axe z de $\pm\pi/2$ lorsque les plateaux sont des triangles équilatéraux.

Nous avons vu qu'une des caractéristiques du complexe général est que toutes les droites du complexe qui sont coplanaires font partie d'un faisceau plan c'est-à-dire qu'elles coupent toute le même point. Considérons les faisceaux plan de droites générés par les couples de droites (1,6), (2,3) et (4,5). Dans chacun de ces faisceaux il existe, dans le cas général, une droite D_i qui est coplanaire avec le plateau de base (figure ??). Si les 6 droites appartiennent à un complexe non singulier alors les droites D_i , appartenant à des faisceaux de droites générés par des droites du complexe, appartiennent elles aussi au complexe. Donc les droites D_i doivent se couper au même point M , dont les coordonnées dans le repère de référence sont $(x, y, 0)$. Soit \mathbf{v}_{ij} le vecteur normal au faisceau de droites généré par les droites i, j . Les conditions pour que les droites D_i appartiennent au faisceau et coupent le point M s'écrivent :

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_{16} = 0 \quad (5.30)$$

$$\mathbf{A}_3 \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_{23} = 0 \quad (5.31)$$

$$\mathbf{A}_5 \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_{45} = 0 \quad (5.32)$$

Ces trois équations sont linéaires en terme de x, y . On peut donc utiliser deux de ces équations pour obtenir ces deux inconnues et reporter leurs valeurs dans la troisième pour obtenir l'équation de contrainte. On obtient alors une équation du troisième degré en z_c et du deuxième degré en x_c, y_c . On peut donc écrire

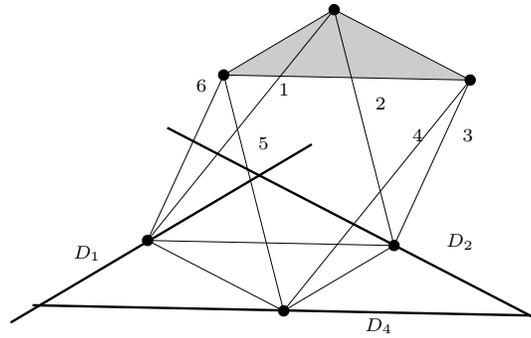


Figure 5.11: Les droites D_1, D_2, D_4 des faisceaux $(1,6)$, $(2,3)$, $(4,5)$ sont coplanaires avec le plateau de base. Si les droites $(1,2,3,4,5,6)$ constituent un complexe non singulier alors les droites D appartiennent au même faisceau.

cette équation de contrainte de trois manières différentes.

$$a_3 z_c^3 + a_2 z_c^2 + a_1 z_c + a_0 = 0 \quad (5.33)$$

$$b_2 y_c^2 + b_1 y_c + b_0 = 0 \quad (5.34)$$

$$c_2 x_c^2 + c_1 x_c + c_0 = 0 \quad (5.35)$$

Si $\theta = \phi = 0$ cette équation se modifie sensiblement puisqu'elle s'écrit :

$$\tan(\psi) = \frac{(y_0 x_{a_0} - y_0 x_{a_1} - x_2 y_{a_0} + y_{a_3} x_2 - y_{a_3} x_3 - x_{a_0} y_2 + x_{a_1} y_2 + y_{a_0} x_3)}{x_2 x_{a_1} - x_{a_0} x_3} \quad (5.36)$$

qui se simplifie encore si le plateau mobile est symétrique puisque l'on obtient $\cos(\psi) = 0$. On généralise ainsi la configuration de Fichter. Notons que si le déterminant du système linéaire est nul on obtient alors des équations non cohérentes entre elle.

A titre d'exemple de configurations singulières pour le cas 5a si l'on choisit pour le MSSM standard comme valeur des paramètres $x_c = 0$, $y_c = 0$, $\psi = 40^\circ$, $\theta = 40^\circ$, $\phi = 40^\circ$ le polynôme admet trois racines réelles, ce qui conduit aux trois configurations singulières décrites dans les figures ??, ??, ??.

On peut remarquer que tous les cas de singularité d'un MSSM se réduisent à la génération d'un complexe. La condition 5a est donc l'équation générale définissant les configurations singulières et prend simplement une forme particulière dans les cas 3b, 5b (il a d'ailleurs été montré que le développement du déterminant de la jacobienne inverse conduit à l'équation obtenue pour le cas 5a). Il faut alors noter que l'approche géométrique permet d'obtenir plus aisément les conditions de singularités que le développement direct du déterminant.

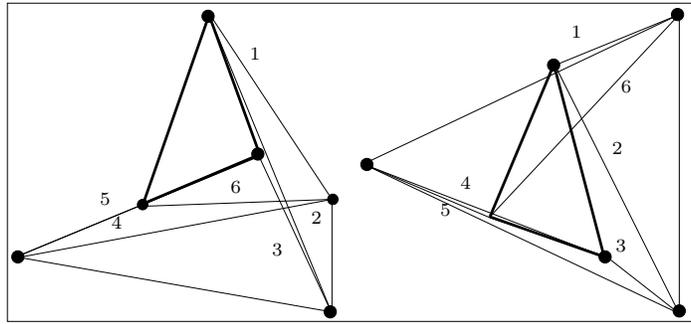


Figure 5.12: *Perspective et vue de dessus de la première singularité 5a.*

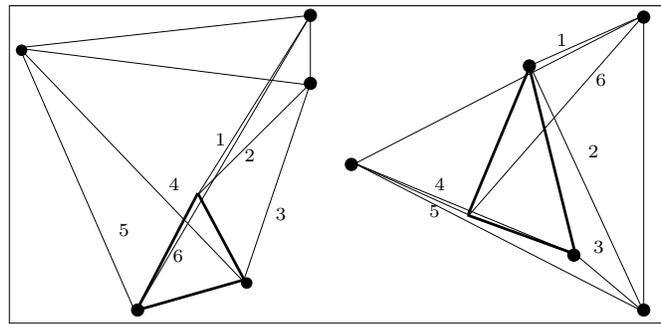


Figure 5.13: *Perspective et vue de dessus de la seconde singularité 5a.*

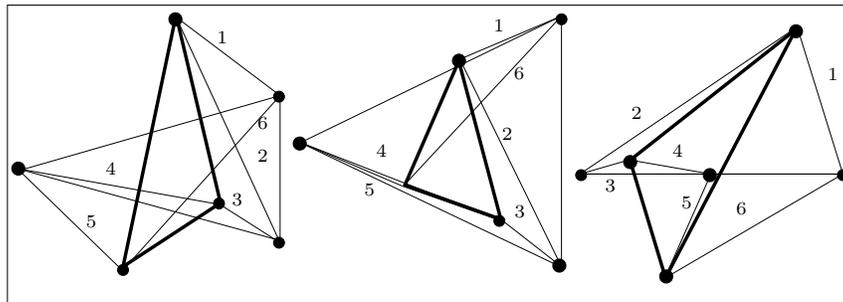


Figure 5.14: *Perspective, vues de dessus et de côté de la troisième singularité 5a.*

La table ?? résume les conditions à satisfaire par les paramètres de position et d'orientation du plateau mobile pour que le MSSM soit en configuration singulière. Dans cette table on note $\mathbf{X}_c = (x_c, y_c, z_c)$, $\mathbf{\Omega}_c = (\psi, \theta, \phi)$.

cas	conditions de singularité		
3d	$\psi = 0$	$z_c = H_{3d_3}(y_c, \theta)$	$\forall x_c$
	$\psi = \pi$	$z_c = -H_{3d_3}(y_c, \theta)$	$\forall x_c$
5a	$\sum_{i=0}^{i=3} a_i(x_c, y_c, \mathbf{\Omega}_c) z_c^i = 0$		
	$\sum_{i=0}^{i=2} b_i(x_c, z_c, \mathbf{\Omega}_c) y_c^i = 0$		
	$\sum_{i=0}^{i=2} c_i(y_c, z_c, \mathbf{\Omega}_c) x_c^i = 0$		
	$\theta = \phi = 0$	$\psi = \pm \frac{\pi}{2}$	$\forall(\mathbf{X}_c)$
5b	$y_c = H_{5b_1}(x_c, \mathbf{\Omega}_c)$	$z_c = H_{5b_2}(x_c, \mathbf{\Omega}_c)$	
	$\psi = H_{5b_3}(\theta, \phi)$	$z_c = H_{5b_4}(y_c, \theta, \phi)$	$x_c = H_{5b_5}(y_c, \theta, \phi)$

Tableau 5.1: Les conditions de singularité d'un MSSM.

5.3.4. Analyse d'autres manipulateurs spatiaux

L'analyse des configurations singulières du MSSM a montré l'avantage de l'approche géométrique par rapport à l'approche analytique reposant sur l'étude des racines du déterminant de la matrice jacobienne inverse. Toutefois dans un cas plus général (le SSM ou le poignet actif par exemple) l'approche géométrique conduit parfois à résoudre des problèmes géométriques difficiles. Nous présentons cependant l'analyse de quelques manipulateurs pour lesquels les relations définissant les singularités peuvent être obtenues. Cette présentation ne prétend pas à l'exhaustivité, ainsi le robot d'Inoue a été étudié du point de vue des configurations singulières par Collins [68].

5.3.4.1. TSSM

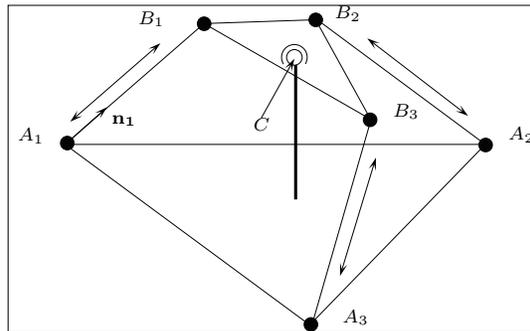
L'approche géométrique a pu être aussi appliquée dans le cas du TSSM et a conduit à la détermination de toutes les configurations singulières de ce type de manipulateur. Les calculs sont détaillés dans [289] et nous rappelons ici simplement les résultats dans la table ??.

5.3.4.2. Poignet à 3 degrés de liberté en rotation

Il faut maintenant faire remarquer que la détermination des singularités à partir de la géométrie de Grassmann ne s'applique pas qu'aux manipulateurs à 6 degrés de liberté. Considérons par exemple le poignet à 3 degrés de liberté en rotation décrit en figure ?. Le plateau mobile est articulé sur une rotule R liée rigidement à la base. Les trois segments articulés aux points A_i, B_i , de longueur variable, permettent de commander l'orientation du plateau mobile. Si C est le

cas	conditions de singularité
3c	$\tan \psi = (y_{a_3} - y_{a_4}) / (x_{a_3} + x_{a_4})$ $x_c = A(\psi, \theta, \phi), y_c = B(\psi, \theta, \phi), z_c = C(\psi, \theta, \phi)$
congruence dégénérée	$x_c = A(\psi, \theta, \phi), y_c = B(\psi, \theta, \phi), z_c = C(\psi, \theta, \phi)$
congruence 4b (1 ^{er} cas)	$x_c = A(z_c, \psi, \theta, \phi), y_c = B(z_c, \psi, \theta, \phi)$
congruence 4b (2 ^{eme} cas)	$y_c = A(x_c, z_c, \psi, \theta, \phi), F(x_c, z_c, \psi, \theta, \phi) = 0$
complexe 5a (1 ^{er} cas)	$\theta = \phi = 0 \quad \psi = \pm \frac{\pi}{2}$
complexe 5a (2 ^{eme} cas)	$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ou $\psi = \phi$ $A(x_c, y_c, \psi, \theta, \phi)z_c^3 + B(x_c, y_c, \psi, \theta, \phi)z_c^2 +$ $C(x_c, y_c, \psi, \theta, \phi)z_c + D(x_c, y_c, \psi, \theta, \phi) = 0$
complexe spécial	$x_c = A(z_c, \psi, \theta, \phi), y_c = B(z_c, \psi, \theta, \phi)$

Tableau 5.2: Les conditions de singularité d'un TSSM.

Figure 5.15: Un poignet parallèle à 3 degrés de liberté. Le plateau mobile est articulé sur une rotule R de centre C .

centre de la rotule et \mathbf{n}_i le vecteur unitaire du segment i le vecteur des vitesses articulaires $\dot{\rho}$ est relié au vecteur des vitesses angulaires du plateau mobile $\dot{\omega}$ par :

$$\dot{\rho} = J^{-1}\dot{\omega} \quad (5.37)$$

où une ligne de la matrice J^{-1} est définie par :

$$J_i^{-1} = ((\mathbf{CB}_i \wedge \mathbf{n}_i)) \quad (5.38)$$

Les configurations singulières sont obtenues lorsque la matrice J^{-1} est singulière. Notons \mathbf{F}_c la force appliquée sur la rotule, τ le vecteur des forces articulaires et $\mathbf{T} = (\mathbf{F}, \mathbf{M})$ un torseur externe appliqué sur le plateau mobile. On a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = J_f \begin{pmatrix} \mathbf{F}_c \\ \tau \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

où J_f est la matrice 6×6 définie par :

$$\begin{pmatrix} \vdots & \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \vdots & & \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{CB}_1 \wedge \mathbf{n}_1 & \mathbf{CB}_2 \wedge \mathbf{n}_2 & \mathbf{CB}_3 \wedge \mathbf{n}_3 \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

où \mathbf{I}_3 est la matrice identité d'ordre 3. En développant par rapport aux trois premières colonnes il apparaît clairement que les matrices J^{-1} et J_f ont le même déterminant. On peut aussi noter que les trois premières colonnes de J_f sont les vecteurs de Plücker des lignes $D_{o_1}, D_{o_2}, D_{o_3}$ passant par C et parallèles aux axes du repère de référence. Quant aux trois dernières colonnes ce sont les vecteurs de Plücker des lignes associées aux segments. On peut donc appliquer la méthode géométrique pour trouver les singularités de ce poignet.

Remarquons tout de suite qu'il n'est pas possible que 3 droites soient coplanaires. Par conséquent il ne peut pas y avoir trois vecteurs dépendants et l'on peut aussi éliminer le cas 3d pour quatre vecteurs (4 lignes coplanaires).

Pour le cas 3c (4 lignes coupant le même point) si dans l'ensemble des 4 lignes on a au moins deux droites D_{o_i}, D_{o_j} le seul point commun possible est le centre de la rotule. On obtiendra donc une singularité dans le cas où l'un des segments coupe le centre de la rotule.

Pour le cas 4b (5 lignes coupent deux droites gauches) remarquons que dans un ensemble de 5 lignes il y a toujours au moins deux lignes D_{o_i}, D_{o_j} . Les seules droites coupant ces droites sont dans un plan et ne peuvent donc pas être gauches : ce type de singularité n'est donc pas envisageable. Les autres types de singularité s'exprime moins aisément mais on retrouve donc les configurations décrites par Sefrioui [398] où l'une des droites associées aux segments passent par le centre de la rotule. On voit ici l'intérêt de l'approche géométrique qui permet d'interpréter de manière très simple les singularités alors que la méthode analytique de Gosselin amène à une équation dont l'interprétation géométrique est plus complexe.

5.3.4.3. Poignet INRIA

Nous prenons ici comme exemple un robot à chaîne *PRRS* du type poignet actif INRIA. Les configurations singulières de ce mécanisme ont été étudiées par Mouly [311]. Cet auteur montre qu'il y a singularité lorsque les vecteurs de Plücker des lignes associées aux segments attachés à la plate-forme mobile sont linéairement dépendants. Il montre qu'à l'exception du regulus tous les cas de singularité définis par la géométrie de Grassmann peuvent être obtenus et calcule les relations à satisfaire sur les paramètres de position et d'orientation dans chaque cas.

5.4. Degrés de liberté associés aux singularités

L'étude des configurations singulières faite dans la section précédente nous a permis de mettre en évidence des familles de singularités. Nous n'avons cependant pas examiné le type des degrés de liberté supplémentaires obtenus dans ces configurations. Ceci se fait de manière simple en considérant les vecteurs propres associés aux valeurs propres nulles de la matrice jacobienne inverse. Ces vecteurs propres fixent le mouvement du manipulateur qui est effectué avec des vitesses articulaires nulles. En vertu du principe de réciprocité, ils donnent aussi les torseurs de forces extérieures qui ne peuvent être équilibrés par les forces articulaires. Pour la détermination des vecteurs propres nous reportons les relations déterminées lors de l'analyse des singularités dans la matrice jacobienne inverse et calculons une base du noyau de la matrice obtenue. Cette opération peut se faire de manière symbolique en utilisant la fonction `kernel` de Maple qui permet de calculer une base du noyau d'une application linéaire définie par sa matrice A . On trouve ici un autre intérêt à l'approche géométrique qui permet de mieux caractériser la nature géométrique des mouvements infinitésimaux associés aux configurations singulières.

5.4.1. Exemple : le MSSM

Nous allons examiner les différents cas de singularités exposés pour le MSSM. Les vecteurs de base du noyau de l'inverse jacobienne seront notés \mathbf{A}_i (si le noyau est de dimension 1 on notera \mathbf{A} le vecteur de la base)

5.4.1.1. Configuration de type 3d

Nous avons vu que les conditions de singularité s'écrivent :

$$\psi = 0 \quad z_c = H_{3b_3}(y_c, \theta) \quad \forall x_c \quad (5.41)$$

$$\psi = \pi \quad z_c = -H_{3b_3}(y_c, \theta) \quad \forall x_c \quad (5.42)$$

On suppose tout d'abord que $\psi = 0$. Le vecteur de base du noyau de de l'inverse jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{A} = \left(0, \frac{y_2 \sin(\theta)}{\sin(\phi) \cos(\theta)}, -\frac{y_2}{\sin(\phi)}, \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi) \cos(\theta)}, 1, \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) \quad (5.43)$$

Notons que dans le cas particulier où $\phi = 0$ on obtient :

$$\mathbf{A} = (0, \sin(\theta)y_2, -\cos(\theta)y_2, 1, 0, 0) \quad (5.44)$$

On peut alors s'intéresser à l'axe de rotation instantanée du mouvement correspondant. Pour calculer cet axe on utilise la formule permettant de déterminer la vitesse \mathbf{V}_M d'un point M . On a

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_C + \mathbf{M}\mathbf{C} \wedge \boldsymbol{\Omega}_C = 0 \quad (5.45)$$

où \mathbf{V}_C , $\boldsymbol{\Omega}_C$ sont obtenus à partir de la base du noyau.

Dans notre cas il est facile de vérifier que :

$$\mathbf{V}_{B_4} = \mathbf{V}_{B_5} = 0 \quad (5.46)$$

L'axe instantané de rotation est donc la droite passant par les points B_4, B_5 du plateau mobile.

Dans le cas où $\psi = \pi$ le vecteur de base du noyau s'écrit :

$$\mathbf{A} = \left(0, \frac{y_2 \sin(\theta)}{\sin(\phi) \cos(\theta)}, \frac{y_2}{\sin(\phi)}, \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi) \cos(\theta)}, 1, -\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) \quad (5.47)$$

et dans le cas particulier où $\phi = 0$:

$$\mathbf{A} = (0, \sin(\theta)y_2, \cos(\theta)y_2, 1, 0, 0) \quad (5.48)$$

De la même manière que précédemment on trouve que l'axe instantané de rotation est la droite passant par les points B_4, B_5 du plateau mobile.

5.4.1.2. Configuration de type 5a

Il est connu que le mouvement infinitésimal associé à un complexe est un mouvement de vissage [25, 178, 206].

Pour déterminer l'axe instantané de rotation (ISA) on utilise la méthode suivante. Supposons que le point $M(x, y, z)$ appartienne à l'ISA. Sa vitesse est alors colinéaire à $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\mathbf{V}_M = \alpha \boldsymbol{\Omega} \quad (5.49)$$

Mais l'on a :

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_C + \mathbf{M}\mathbf{C} \wedge \boldsymbol{\Omega} \quad (5.50)$$

ce qui amène à :

$$\mathbf{V}_M \wedge \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{V}_C \wedge \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{MC} \wedge \boldsymbol{\Omega}) \wedge \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad (5.51)$$

soit :

$$\mathbf{V}_C \wedge \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{MC} + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{MC}) \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad (5.52)$$

qui conduit à 2 équations indépendantes en x, y, z , définissant deux plans. L'ISA est alors l'intersection de ces deux plans. Le pas h du vissage est défini par :

$$\mathbf{V}_M = h \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\|\boldsymbol{\Omega}\|} \quad (5.53)$$

On limite ici notre étude au cas où $\theta = \phi = 0$ et où le plateau mobile est symétrique. Dans ce cas on sait que les singularités sont obtenues pour $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ (configuration de Fichter). Pour $\psi = \frac{\pi}{2}$ le vecteur de base du noyau s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{x_2 x_{a_0} - y_2 y_{a_0} + y_2 y_{a_3}}{y_{a_0} - y_{a_3}} \\ \frac{(y_{a_0} - y_c)(y_{a_0} - y_{a_3})(y_2 y_0 + y_2^2) + y_c x_2 x_{a_0}(y_0 - y_2) + y_{a_0} x_2 x_{a_0} y_2 - y_0 y_{a_3} x_2 x_{a_0}}{(y_{a_0} - y_{a_3})(y_0 - y_2) z_c} \\ \frac{x_2 x_{a_0} + y_2 y_{a_3} + y_{a_0} x_c - y_2 y_{a_0} - y_{a_3} x_c}{z_c (y_{a_0} - y_{a_3})} \\ -\frac{y_2 y_c - y_2 y_{a_0} + x_2 x_{a_0} + y_0 y_{a_0} - y_0 y_c}{(y_0 - y_2) z_c} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

Cette base conduit à un mouvement de vissage de pas :

$$h = \frac{(x_2 x_{a_0} + l_m l_b) x_2 x_{a_0}}{(x_2^2 x_{a_0}^2 (l_b^2 + l_m^2) + 2 x_2 x_{a_0} l_m l_b (l_b (y_{a_0} - y_c) + l_m (x_c - y_2)) + l_b^2 l_m^2 ((x_c - y_2)^2 + (l_b - y_c)^2 + y_{a_3} (y_{a_3} - 2 y_c + 2 l_b) + z_c^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.55)$$

avec

$$l_m = y_0 - y_2 \quad l_b = y_{a_0} - y_{a_3}$$

L'axe instantané de rotation est trop complexe pour être donné ici. Toutefois si les plateaux sont des triangles équilatéraux inscrits dans des cercles de rayon R_m (pour le plateau mobile) et R_b (pour la base) on trouve :

$$\mathbf{A} = \left(0, 0, -\frac{R_m R_b}{2 x_c}, \frac{y_c}{x_c}, \frac{z_c}{x_c}, 1\right) \quad (5.56)$$

si x_c est non nulle ; dans le cas contraire on trouve :

$$\mathbf{A} = \left(0, 0, -\frac{R_m R_b}{2 z_c}, 0, \frac{y_c}{z_c}, 1\right) \quad (5.57)$$

Si y_c est nul on trouve bien un mouvement de vissage autour de l'axe z tel que décrit par Fichter. Nous pouvons même dire que le pas h en est :

$$h = -\frac{R_m R_b}{2z_c} \quad (5.58)$$

Si $x_c = 0$ et y_c est non nul on trouve un mouvement de vissage autour d'un axe défini par :

$$x = -\frac{R_m R_b y_c}{2(y_c^2 + z_c^2)} \quad y = \frac{y_c z}{z_c} \quad (5.59)$$

et dont le pas est :

$$h = -\frac{R_m R_b}{2\sqrt{y_c^2 + z_c^2}} \quad (5.60)$$

Si x_c et y_c sont non nuls on trouve un mouvement de vissage autour d'un axe défini par :

$$\begin{aligned} x &= -\frac{x_c^2 R_m R_b - 2x_c y_c^2 y - 2x_c z_c^2 y - 2x_c^3 y + y_c^2 R_m R_b}{2y_c(x_c^2 + y_c^2 + z_c^2)} \\ z &= -\frac{z_c(R_m R_b x_c - 2y_c^2 y - 2z_c^2 y - 2x_c^2 y)}{2y_c(x_c^2 + y_c^2 + z_c^2)} \end{aligned} \quad (5.61)$$

et dont le pas est :

$$h = -\frac{z_c R_m R_b}{2\sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2}} \quad (5.62)$$

Pour $\psi = -\frac{\pi}{2}$ le vecteur de base du noyau s'écrit :

$$\mathbf{A} = (0, 0, \frac{R_m R_b}{2z_c}, 0, 0, 1) \quad (5.63)$$

qui correspond bien à un mouvement de vissage autour de l'axe z de pas :

$$h = \frac{R_m R_b}{2z_c} \quad (5.64)$$

5.4.1.3. Configuration de type 5b

Dans ce cas nous avons vu que l'on peut calculer y_c, z_c comme fonction des autres paramètres. On trouve alors que la base du noyau de l'inverse jacobienne

s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \frac{x_2 y_0 \sin(\psi)}{y_0 \cos(\phi) - \sin(\phi) x_2} \\ \frac{\sin(\psi) y_0 x_{a_0} x_2}{y_{a_3} (y_0 \cos(\phi) - \sin(\phi) x_2)} \\ - \frac{x_2 y_0 \sin(\psi) (x_{a_0} \cos \phi \sin \psi + x_{a_0} \cos \psi \cos \theta \sin \phi - y_{a_3} \sin \psi \cos \theta \sin \phi + \cos(\psi) y_{a_3} \cos(\phi))}{\sin \phi \sin \theta (y_0 \cos(\phi) - \sin(\phi) x_2) y_{a_3}} \\ \frac{((\sin \psi \cos \theta \sin \phi - \cos \psi \cos \phi) (x_2 y_{a_3} \sin(\phi) - y_0 y_{a_3} \cos(\phi)) + x_{a_0} y_{a_0} \sin(\psi))}{\sin \phi \sin \theta (y_0 \cos(\phi) - \sin(\phi) x_2) y_{a_3}} \\ - \frac{x_2 \cos \psi \cos \theta \sin \phi + x_2 \sin \psi \cos \phi - y_0 \cos \theta \cos \phi \cos \psi + y_0 \sin \psi \sin \phi}{(y_0 \cos(\phi) - \sin(\phi) x_2) \sin(\theta)} \\ 1 \end{cases} \quad (5.65)$$

On peut montrer que dans ce mouvement on a :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{B}_3} = \mathbf{V}_{\mathbf{A}_1} = \mathbf{0} \quad (5.66)$$

L'axe instantané de rotation est donc défini par ces deux points.

Un cas particulier est obtenu lorsque le déterminant du système linéaire Δ est nul, ce qui conduit à des relations du type :

$$\psi = H_{5b_3}(\theta, \phi) \quad z_c = H_{5b_4}(y_c, \theta, \phi) \quad x_c = H_{5b_5}(y_c, \theta, \phi) \quad (5.67)$$

La base du noyau de l'inverse jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\sin(\theta) y_{a_3} (-y_{a_3} x_2 \cos \theta \sin^2 \phi - x_{a_0} y_0 + \cos(\phi) y_0 y_{a_3} \cos \theta \sin \phi)}{\cos(\psi) x_{a_0} (-x_2 y_{a_3} (\cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \phi) - x_{a_0} \cos(\theta) y_0 - y_{a_3} y_0 \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta)} \\ - \frac{\sin \theta (-y_{a_3} x_2 \cos \theta \sin^2 \phi - x_{a_0} y_0 + \cos(\phi) y_0 y_{a_3} \cos \theta \sin \phi)}{\cos(\psi) (-x_2 y_{a_3} (\cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \phi) - x_{a_0} \cos(\theta) y_0 - y_{a_3} y_0 \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta)} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{(x_2 y_{a_3} \sin^2 \phi \cos \theta + x_{a_0} y_0 - y_0 y_{a_3} \sin \phi \cos \phi \cos \theta)^2 \sin \theta}{\cos^2(\psi) x_{a_0} x_2 y_0 \cos \phi (-x_2 y_{a_3} (\cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \phi) - x_{a_0} \cos(\theta) y_0 - y_{a_3} y_0 \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta)} \end{cases} \quad (5.68)$$

On peut montrer que dans ce mouvement on a :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{B}_3} = \mathbf{V}_{\mathbf{A}_1} = \mathbf{0} \quad (5.69)$$

L'axe instantané de rotation est donc, là aussi, défini par ces deux points.

5.5. Manœuvrabilité et nombre de condition

Nous avons vu dans l'introduction de la notion de configuration singulière qu'au voisinage d'une telle configuration les forces articulaires pouvaient devenir très importantes. Il est donc intéressant de pouvoir quantifier ce que l'on entend par «proche» d'une configuration singulière. Malheureusement la définition d'une configuration singulière est basée sur la notion de dégénérescence d'une matrice et il est connu qu'il n'existe pas de métrique pour ce type de notion. Toutefois

on peut définir des critères de performance permettant d'obtenir une information intéressante sur la proximité d'une configuration singulière. Un index couramment utilisé, défini par Yoshikawa [472], est de considérer la valeur absolue du déterminant de l'inverse jacobienne. Cet index est appelé généralement *manœuvrabilité*. Il permet de mettre en exergue la valeur propre la plus petite de l'inverse de la jacobienne. Une valeur propre faible indique que les forces articulaires peuvent devenir fortes pour une combinaison de forces et moments extérieurs appliqués, le rapport des forces articulaires sur les forces extérieures étant l'inverse de la valeur propre en question. On conçoit alors l'importance de l'index pour la conception du manipulateur.

Dans les figures suivantes nous présentons des représentations tridimensionnelles de la manœuvrabilité de la «main gauche» INRIA lorsque deux degrés de liberté du manipulateur sont laissés libres. Considérons tout d'abord le cas des déplacements en translation uniquement (figure ??). Dans le plan $x - y$ la

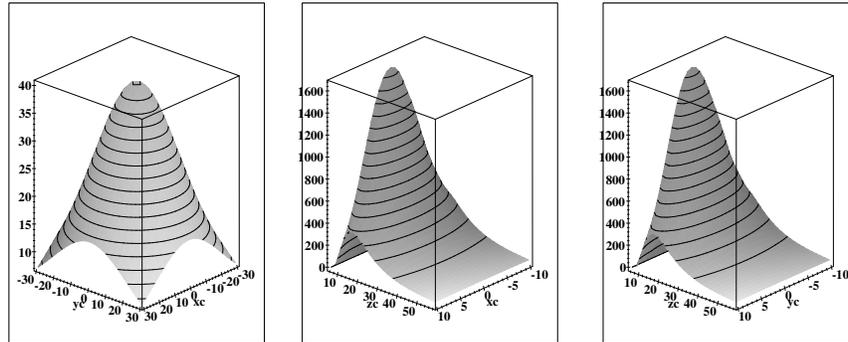


Figure 5.16: De gauche à droite manœuvrabilité pour $(x_c = \pm 30, y_c = \pm 30, z_c = 53, 3, \psi = 0, \theta = 0, \phi = 0)$, $(x_c = \pm 30, y_c = 0, z_c = [48.3, 58.3], \psi = 0, \theta = 0, \phi = 0)$, $(x_c = 0, y_c = \pm 30, z_c = [48.3, 58.3], \psi = 0, \theta = 0, \phi = 0)$, valeur des angles en degré.

manœuvrabilité est maximum dans la position nominale du manipulateur et décroît lorsque l'on s'en écarte. Dans les plans $x - z, y - z$ la manœuvrabilité diminue lorsque z augmente au delà d'une certaine borne et lorsque x s'éloigne de 0. Nous constatons aussi dans ce cas un phénomène intéressant : la manœuvrabilité présente un pic très élevé juste avant la singularité. Ce pic correspond à une position extrêmement stable du manipulateur où les segments du manipulateur font un angle de 30 degrés avec la base. Dans cette configuration des forces externes fortes sont équilibrées par des forces articulaires faibles. Mais cette caractéristique favorable n'existe que dans une petite région de l'espace.

Considérons le cas où les degrés libres sont les translations selon un des axes x, y, z et une rotation autour de l'axe x , d'angle θ (figure ??). Pour les translations selon les axes x, y la manœuvrabilité admet un maximum unique dans la configuration nominale et décroît fortement dès que l'on s'éloigne de

cette configuration. Pour les translations selon l'axe z la manœuvrabilité décroît dès que l'on s'écarte de la valeur $\theta = 0$ et diminue lorsque z augmente.

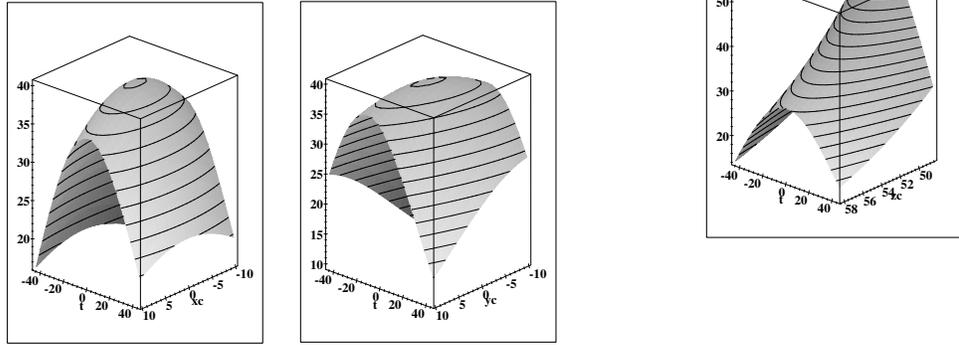


Figure 5.17: De gauche à droite manœuvrabilité pour $(x_c = \pm 10, y_c = 0, z_c = 53, 3, \psi = 0, \theta = \pm 45, \phi = 0)$, $(x_c = 0, y_c = \pm 10, z_c = 53, 3, \psi = 0, \theta = \pm 45, \phi = 0)$, $(x_c = 0, y_c = 0, z_c = [48, 3, 58.3], \psi = 0, \theta = \pm 45, \phi = 0)$, valeurs des angles en degré.

Pour examiner les rotations on considère comme libres les angles ψ, θ (c'est-à-dire que l'on permet une rotation autour de l'axe z puis une rotation autour du nouvel axe x) en laissant le centre du plateau dans sa position nominale, ceci pour différentes valeurs de l'angle ϕ (figure ??).

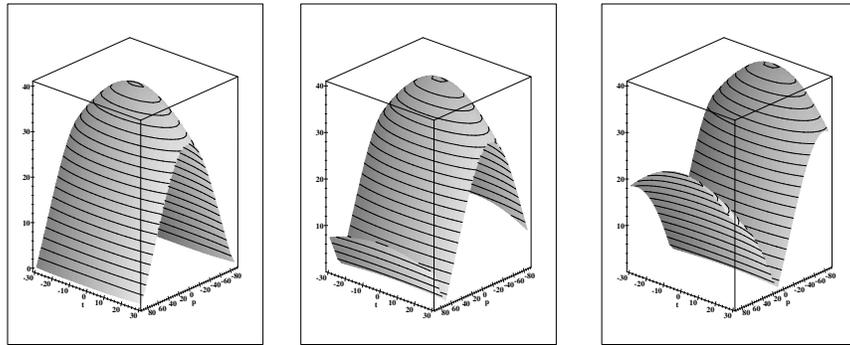


Figure 5.18: De gauche à droite manœuvrabilité pour $(x_c = 0, y_c = 0, z_c = 53, 3, \psi = \pm 90, \theta = \pm 30, \phi = 0)$, $(x_c = 0, y_c = 0, z_c = 53, 3, \psi = \pm 90, \theta = \pm 30, \phi = 20)$, $(x_c = 0, y_c = 0, z_c = 53, 3, \psi = \pm 90, \theta = \pm 30, \phi = 80)$, valeur des angles en degré.

Pour $\phi = 0$ nous constatons une rapide décroissance de la manœuvrabilité lorsque l'angle ψ augmente sans que les variations de θ influent considérablement sur l'amplitude de cette décroissance (ce résultat n'est pas surprenant puisque nous savons qu'il existe une singularité pour $\psi = \pm \pi/2$). Parallèlement on remarque une décroissance lorsque θ augmente, sans que la

valeur de ψ influe sur cette décroissance. Ce schéma se reproduit pour les autres valeurs de ϕ avec un aspect périodique due à la nature des variables employées.

Un autre index possible est d'utiliser le nombre de condition. Les enseignements que l'on peut en tirer serait évidemment de même nature. Par exemple la figure ?? présente l'inverse du nombre de condition (donc une quantité comprise entre 0 et 1 et qui sera nulle pour une singularité) dans les mêmes conditions que la figure ?. Le nombre de condition considéré ici est la racine carré du rapport de la plus grande valeur propre de la matrice $J^{-T}J^{-1}$ sur sa plus petite valeur propre. Les éléments caractérisant l'orientation dans J^{-1} ont été divisés par la longueur des segments dans la position nominale du robot.

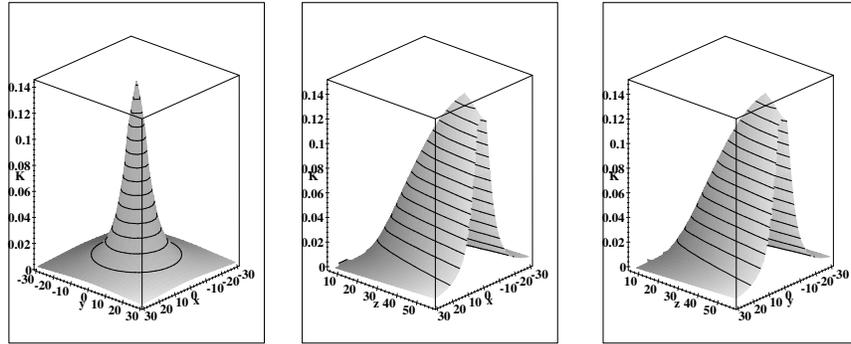


Figure 5.19: De gauche à droite inverse du nombre de condition pour $(x_c = \pm 30, y_c = \pm 30, z_c = 53, 3, \psi = 0 \theta = 0, \phi = 0)$, $(x_c = \pm 30, y_c = 0, z_c = [48.3, 58.3], \psi = 0 \theta = 0, \phi = 0)$, $(x_c = 0, y_c = \pm 30, z_c = [48.3, 58.3], \psi = 0 \theta = 0, \phi = 0)$, valeur des angles en degré.

5.6. Recherche des singularités en pratique

Dans les sections précédentes nous avons vu que la géométrie de Grassmann permet d'obtenir les relations définissant les singularités de certains manipulateurs parallèles. Dans la pratique la question la plus souvent posée est de savoir s'il existe des lieux de singularité dans un espace de travail donné.

Dans certains cas les lieux de singularité se prêtent bien à une représentation conjointe avec l'espace de travail. C'est le cas, par exemple, des robots parallèles plans et Sefrioui a proposé une méthode pour la représentation et le calcul de l'espace de travail combinée avec les lieux de singularité [397, 399].

Une autre approche a été proposée par Douady [92] pour le robot «Space». Dans ce cas, bien que le robot ait 6 degrés de liberté, les lieux de singularité correspondent à l'annulation d'un déterminant 3×3 . Cet auteur montre que l'on peut majorer le déterminant de manière à définir une triangulation dans l'espace de travail telle que si la valeur du déterminant au milieu d'une cellule

est supérieure à une valeur donnée alors le déterminant sera non nulle dans toute la cellule. Si le déterminant est inférieur à la valeur critique il faut subdiviser la cellule et Douady propose l'utilisation d'une méthode de descente à cet effet. En raison de la faible taille du déterminant les calculs restent alors praticables et permettent l'obtention d'une triangulation de l'espace de travail contenant l'information sur les lieux de singularité.

5.6.1. Méthode de la semi-jacobienne

Nous décrivons ici une méthode qui permet de répondre à la question de savoir s'il existe une singularité dans un *espace de travail en translation* donné, ceci pour un robot général à base plane. On introduit tout d'abord la notion de *semi-jacobienne inverse* J_s^{-1} que l'on définit comme la matrice constituée des vecteurs de Plücker non normalisés des droites associées aux segments. Notons que $|J^{-1}| = 0$ est équivalent à $|J_s^{-1}| = 0$. De plus le déterminant de J_s^{-1} s'exprime de manière algébrique en fonction des coordonnées de C . L'idée de base de l'algorithme est de chercher à déterminer quelles sont les valeurs minimales et maximales de $|J_s^{-1}|$ lorsque C évolue dans l'espace de travail. Si ces valeurs sont de signe opposé, le déterminant étant une fonction continue de \mathcal{R}^3 dans \mathcal{R} alors il existe une singularité dans l'espace de travail, alors que si ces valeurs sont de même signe il n'existe pas de singularité. On se ramène ainsi à un problème d'optimisation sous contrainte : trouver les extremums de $|J_s^{-1}(x_c, y_c, z_c)|$, le point C devant appartenir à l'espace de travail.

On va maintenant décrire comment calculer ces extremums lorsque l'espace de travail est un parallélépipède rectangle, puis on étendra la méthode à d'autres types d'espace de travail.

5.6.1.1. Singularité dans un parallélépipède rectangle

Les extremums peuvent être obtenus soit à l'intérieur du parallélépipède, soit sur une face. Dans ce dernier cas les extremums peuvent être localisés soit sur les arêtes de la face, soit dans son intérieur. On voit donc qu'il est nécessaire de savoir calculer les extremums lorsque l'espace de travail est un segment (pour les arêtes des faces), l'intérieur d'un rectangle et l'intérieur d'un parallélépipède. Résumons les résultats :

- pour un segment allant de M_1 à M_2 on pose $\mathbf{OC} = \mathbf{OM}_1 + \lambda\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ avec λ dans l'intervalle $[0,1]$. On calcule ensuite $|J_s^{-1}|$ comme fonction de λ . La dérivée de cette expression est un polynôme de degré 4 en λ . Les extremums sont donc obtenus soit pour $\lambda = 0, 1$ ou pour les racines du polynôme.
- pour l'intérieur d'un rectangle horizontaux on pose $x_1 \leq x_c \leq x_2$, $y_1 \leq y_c \leq y_2$ ce qui se traduit par $x = x_1 + (1 + \sin \alpha)(x_2 - x_1)/2$,

$y = y_1 + (1 + \sin \beta)(y_2 - y_1)/2$. Si la base est plane on peut calculer $|J_s^{-1}|$ comme fonction de α, β . Sa dérivée par rapport à ces inconnues donne deux équations de contrainte que l'on peut réduire à la résolution d'un polynôme de degré 9 en $\tan(\beta/2)$.

- pour l'intérieur d'un rectangle vertical on procède de la même manière que pour les rectangles horizontaux en substituant y par z . La résolution est identique.
- pour l'intérieur du parallélépipède on pose :

$$\begin{aligned}x &= x_1 + \frac{(1 + \sin \alpha)(x_2 - x_1)}{2} \\y &= y_1 + \frac{(1 + \sin \beta)(y_2 - y_1)}{2} \\z &= z_1 + \frac{(1 + \sin \mu)(z_2 - z_1)}{2}\end{aligned}$$

Si la base est plane on peut calculer $|J_s^{-1}|$ comme fonction de α, β, μ . Sa dérivée par rapport à ces inconnues donne trois équations de contrainte que l'on peut réduire à la résolution d'un polynôme de degré 6 en $\tan(\mu/2)$.

Après traitement de ces différents cas on dispose des extremums de $|J_s^{-1}|$ pour tout point dans le parallélépipède rectangle ainsi que les positions de C où les extremums sont obtenus. Le temps de calcul de l'algorithme varie entre 400 et 500 ms.

Remarque : Rappelons que la matrice jacobienne inverse n'est pas invariante avec le choix des unités de dimension. On peut donc rencontrer un problème avec cet algorithme si la valeur d'un extremum est proche de 0. Dans ce cas il est nécessaire d'utiliser d'autres méthodes pour évaluer le signe des extremums comme celle de Clarkson¹ qui permet de calculer exactement le signe d'un déterminant dont les éléments sont codés sur des entiers, s'il n'excède pas 2^{53} [58].

5.6.1.2. Singularités dans un espace quelconque

Supposons finalement que l'espace de travail soit défini par un ensemble de coupes polygonales horizontales à différentes hauteurs, contenant le même nombre de sommets. Entre deux sections l'espace de travail est le polyèdre obtenu en joignant les sommets de même numéro des deux polygones.

¹Dans notre algorithme nous utilisons l'implantation de la méthode de Clarkson de H. Bronnimann

On va utiliser une méthode de bisection reposant sur l'usage de la détermination des extremums dans un parallélépipède rectangle. Pour l'espace de travail compris entre deux coupes successives on va décomposer l'espace de travail en autant de boîte que nécessaire pour déterminer s'il existe une singularité dans l'espace de travail.

Une liste de boîtes, initialisée avec la boîte englobante de l'espace de travail B_0 , est maintenue à jour dans l'algorithme. L'algorithme renvoie 1 s'il a détecté une singularité dans l'espace de travail.

A l'itération k l'algorithme effectue les étapes suivantes :

1. si la boîte B_k est complètement en dehors de l'espace de travail on passe à la boîte suivante dans la liste.
2. si la boîte B_k est complètement à l'intérieur de l'espace de travail on calcule les extremums de $|J_s^{-1}|$ pour cette boîte. Si cette boîte contient une singularité on renvoie 1.
3. si la boîte B_k est partiellement à l'intérieur de l'espace de travail on calcule les extremums de $|J_s^{-1}|$ pour cette boîte. Si ces extremums sont de même signe on passe à la boîte suivante dans la liste. Sinon :
 - (a) si les positions de C correspondant aux extremums sont dans l'espace de travail l'algorithme renvoie 1
 - (b) sinon on crée 8 nouvelles boîtes à partir de B_k en divisant chacune de ses dimensions par 2. Ces boîtes sont placées à la fin de la liste et l'on passe à la boîte suivante.

L'algorithme renvoie 0 lorsque la liste est vide. Le temps de calcul de cet algorithme est évidemment très dépendant de l'espace de travail.

Cet algorithme peut être étendu pour déterminer la présence d'une singularité dans un espace dont la définition peut être quelconque à partir du moment où l'on dispose d'une méthode pour statuer sur l'appartenance d'une boîte à l'espace. Par exemple l'espace de travail peut être défini par un hypercube dans les coordonnées articulaires : pour tester l'appartenance d'une boîte à ce type d'espace on utilisera l'algorithme qui a été décrit dans le chapitre «Modèle géométrique» permettant de calculer les extremums des coordonnées articulaires pour toute position de C dans un parallélépipède rectangle. Le temps de calcul moyen pour cet algorithme est de l'ordre de 10 secondes.

5.7. Mécanismes en singularité permanente

Nous avons vu dans ce chapitre qu'on essaie, en général, d'éviter les singularités pour les manipulateurs parallèles. Une approche totalement différente peut être considérée : on peut vouloir au contraire concevoir un mécanisme

qui reste de manière permanente en singularité, donc dont l'organe terminal va décrire une trajectoire complexe. C'est l'approche suivie par Husty, Karger et Zsombor-Murray [184, 211, 492]. Leur but est de concevoir un mécanisme à un degré de liberté reposant sur un mécanisme parallèle en singularité permanente : ce problème a fait l'objet du concours Vaillant de l'Institut de France gagné par Borel et Bricard. Il s'agissait de déterminer sous quelles conditions un solide peut exhiber un mouvement continu alors que certains points du solide sont astreint à rester sur des sphères fixées. La solution est unique quel que soit le nombre de points sur les solides et Husty rappelle la loi du mouvement en fonction du déplacement angulaire de la plate-forme mobile. L'intérêt de ce type d'étude est la découverte de nouveaux mécanismes très raides, à faible nombre d'actionneurs, pouvant décrire des trajectoires complexes (donc intéressant pour des problèmes d'usinage comme le mentionne Soni [411]).

5.8. Exercices

Exercice 5.1: Déterminer les caractéristiques du mouvement infinitésimal d'un robot parallèle plan de type 3 – $R\underline{P}R$ en configuration singulière pour un angle d'orientation nul.

Exercice 5.2: On considère un robot parallèle plan de type 3 – $R\underline{P}R$ dont les coordonnées des centres des articulations sont :

$$\begin{array}{cccc} x_{a_1} = 0 & y_{a_1} = 0 & x_{b_1} = 0 & y_{b_1} = 0 \\ x_{a_2} = 5 & y_{a_2} = 0 & x_{b_2} = 3 & y_{b_2} = 0 \\ x_{a_3} = 1 & y_{a_3} = 5 & x_{b_3} = 2 & y_{b_3} = 2 \end{array}$$

Établir pour un angle d'orientation nul quelle est la valeur de y_c en fonction de x_c pour que le robot soit en configuration singulière. Montrer qu'en général les forces articulaires tendent vers l'infini si l'on applique un moment pur autour de C dans ces configurations singulières.

Exercice 5.3: Expliquer à l'aide de la géométrie de Grassmann pourquoi les configurations suivantes sont singulières pour le robot «Delta» [60] :

1. lorsque les 6 barres sont toutes parallèles
2. lorsque 4 barres sont parallèles
3. lorsque 4 barres sont dans un même plan
4. lorsque les 6 barres sont dans le même plan

Indiquer le nombre de degré de liberté que l'on va trouver dans chacun de ces cas.

Exercice 5.4: On considère un SSM dont les plateaux sont similaires avec un rapport k . Déterminer sous quelle condition le manipulateur est toujours

en configuration singulière. Pour cela on utilisera les équations du modèle géométrique inverse en définissant la matrice de rotation par ces colonnes (x_1, x_2, x_3) (x_4, x_5, x_6) , (x_{10}, x_{11}, x_{12}) et la position du point de référence par (x_7, x_8, x_9) . On définira aussi les variables intermédiaires $U = x_1 x_7 + x_2 x_8 + x_3 x_9$, $V = x_4 x_7 + x_5 x_8 + x_6 x_9$, $W = x_7^2 + x_8^2 + x_9^2$ et l'on notera $a_i, b_i, 0$ les coordonnées du point B_i . Cet exercice est inspiré de l'article de Guozhen [150].

Exercice 5.5: On considère un SSM dont les coordonnées des centres des articulations sont :

$$\begin{array}{lll} A_1(-9, 13, 0) & A_2(9, 13, 0) & A_3(6, 5, 0) \\ A_4(2, -10, 0) & A_5(-2, 10, 0) & A_6(-6, 5, 0) \\ B_1(-1, 5, 0) & B_2(1, 5, 0) & B_3(4, -1, 0) \\ B_4(2, -3, 0) & B_5(-2, -3, 0) & B_6(-1, 5, 0) \end{array}$$

Calculer le numérateur du déterminant de J^{-1} en fonction de x_c, y_c, z_c lorsque l'orientation du robot est $\psi = 0, \theta = \pi/2, \phi = 0$. Quelle est la nature de la courbe de singularité dans le plan $z_c = C^{\text{te}} > 0$?

Exercice 5.6: Dans l'exercice précédent exprimer le déterminant de J^{-1} en fonction uniquement des longueurs des segments.

Exercice 5.7: Expliquer comment on pourrait déterminer les conditions de singularité du robot «Hexa».

Problème 5.1: Déterminer si les configurations singulières délimitent des composantes connexes par rapport aux solutions du modèle géométrique direct des robots spatiaux.

Problème 5.2: Classifier les singularités d'un MSSM pour distinguer celle qui ne conduisent pas à des forces articulaires infinies.

Problème 5.3: Étendre la méthode de détermination des extremums du déterminant de la semi-jacobienne inverse pour un espace de travail en translation de type boîte au cas du robot général.

Problème 5.4: Reprendre le problème précédent pour un espace de travail incluant l'orientation.

Table des matières

Chapitre 6

Espace de travail

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux méthodes de détermination de l'espace de travail des manipulateurs parallèles. Différents types d'espace de travail sont définis et des algorithmes géométriques pour les calculer sont présentés. On conclut ce chapitre en présentant des algorithmes de planification de trajectoire pour les robots parallèles.

6.1. Espace de travail et représentation

Pour les manipulateurs parallèles l'espace de travail peut être restreint par trois facteurs : les débattements des articulations passives, les intersections entre segments et les limitations dues aux actionneurs.

Si la représentation des translations possibles de l'organe terminal ne pose pas de problème il n'en est pas de même pour les rotations. Si l'on considère l'exemple des robots série à 6 degrés de liberté à poignet découplé on représente généralement l'espace de travail par le volume 3D atteignable par le centre du poignet (illustration des translations) et par le volume 3D atteignable par l'extrémité de l'organe terminal (illustration de 2 degrés de liberté en rotation), ces deux volumes étant indépendants. Pour les robots parallèles à 6 degrés de liberté cette représentation n'est plus possible : les translations possibles sont, en général, dépendantes de l'orientation du plateau mobile. Une représentation complète de l'espace de travail est donc un volume en dimension 6 pour lequel il n'existe pas d'illustration possible. On ne peut donc que représenter des sous-ensembles de l'espace de travail, que l'on appelle des *types d'espace de travail*.

6.1.1. Les différents types d'espace de travail

La position de l'organe terminal d'un robot est généralement paramétrée par la donnée de la position dans l'espace ou dans le plan d'un point spécifique de l'organe terminal. *L'espace de travail en translation* est défini comme le volume (ou la région plane) que peut parcourir ce point spécifique.

Certains exemples d'applications des robots parallèles ont conduit à rechercher *l'espace de travail à orientation constante* qui est l'ensemble des positions du point de référence du plateau mobile atteignable lorsque l'orientation de ce plateau est fixe. De même on peut s'intéresser à *l'espace de travail à centre fixé*, c'est-à-dire l'ensemble des rotations possibles autour du point de référence lorsque celui-ci occupe une position fixe dans le repère absolu.

On peut aussi introduire *l'espace maximal*, défini comme l'ensemble des positions du point de référence qui peuvent être atteintes avec au moins une orientation de la plate-forme. Pour les robots plans on pourra parler de *l'espace pour un intervalle d'orientation*, défini comme l'ensemble des positions du point de référence qui peuvent être atteintes avec au moins une orientation dans un intervalle donné (l'espace maximal est alors un cas particulier d'espace pour intervalle de rotation, l'intervalle étant $[0, 2\pi]$). Pour ces mêmes robots on peut aussi parler de *l'espace total pour un intervalle d'orientation*, défini comme l'ensemble des positions du point de référence qui peuvent être atteintes avec toutes les orientations dans un intervalle donné.

Finalement on peut définir *l'espace dextre* qui est l'ensemble des positions du point de référence pour lesquelles toutes les orientations sont permises (pour les robots plans l'espace dextre est un cas particulier d'espace total, l'intervalle sur l'angle d'orientation étant $[0, 2\pi]$). Une définition précise de ces types d'espace de travail pourra être trouvée dans [83].

On peut aussi introduire des contraintes supplémentaires pour définir un espace de travail plus significatif. Par exemple pour les robots plans Funabashi [114] étudie la contribution des vitesses de chacun des segments d'un robot du type 3 – *RPR* lors d'un déplacement de la plate-forme. Pour cela il utilise le *facteur de transmission* défini comme le cosinus de l'angle entre la direction de la force transmise par le segment et la vitesse de la plate-forme. L'efficacité d'un segment pour la création du mouvement est d'autant plus grande que le facteur de transmission est proche de 1. Il montre alors sur des exemples que la partie de l'espace de travail où les facteurs de transmissions sont supérieurs à 0,5 est en fait extrêmement réduite.

6.1.2. État de l'art

Pour certaines structures simples comme celle du «Delta» le calcul de l'espace de travail peut être effectué directement par CAO [61, 417] car ce calcul se ramène à l'intersection de volumes 3D simples. Un autre cas favorable est celui des robots sphériques étudiés par Alizade [7], Gosselin [135] (avec prise en

compte des intersections entre segments) et Takeda [435]. Arun [21] a pu aussi établir le volume de travail de son robot constitué d'un empilement de deux octaèdres dont la base commune a des côtés de longueur variable. Mais ces cas favorables ne concerne que des robots à 3 degrés de liberté de structure simple.

Les recherches dans les laboratoires ont porté principalement sur les limitations induites par les contraintes sur les variables articulaires. Dans ce domaine Liu [259, 261] a étudié géométriquement quelques positions limites pour un TSSM : position la plus haute, la plus basse, la plus inclinée et établit leurs valeurs à partir de la géométrie du robot et des longueurs limites des segments. De nombreux travaux dans ce domaine décrivent des méthodes reposant sur la discrétisation des paramètres pour déterminer l'enveloppe de l'espace de travail en tenant compte seulement des bornes sur les variables articulaires [94, 106, 109, 412, 433] ou en considérant aussi partiellement les contraintes sur les débattements des articulations [31, 141, 250, 365, 465] ainsi que les risques d'interférence entre segments [14, 63, 277].

Dans ce type de méthode l'espace des paramètres est découpé selon une grille régulière (soit cartésienne, soit polaire), chaque nœud de la grille correspondant à une posture du robot. On teste alors à chaque nœud l'appartenance de la posture à l'espace de travail et l'on conserve les nœuds dont au moins un voisin immédiat n'appartient pas à l'espace de travail. La frontière de l'espace de travail est alors obtenue sous la forme d'un nuage de points qui approxime la frontière réelle. La qualité de l'approximation est bien sûr très dépendante de la finesse de la grille mais les temps de calcul imposent une limite à cette finesse. De plus se pose des problèmes lorsque l'espace de travail comporte des zones interdites. La manipulation de ce type de représentation est donc lourde et leur calcul est coûteux en temps. Masory [277], qui utilise la discrétisation, a présenté des résultats intéressants pour des robots de type SSM :

- les débattements des articulations jouent un grand rôle et le volume de l'espace de travail augmente quand on oriente les rotules dans la même direction que les segments du robot dans sa position nominale.
- le volume est en gros proportionnel au cube de la course des actionneurs.
- le volume est peu sensible à la disposition des points sur la plate-forme même s'il est maximum quand les deux plateaux présentent le même aspect (mais dans ce cas le robot est en configuration singulière).
- le volume est maximum quand les plateaux ont les mêmes dimensions.

Une autre approche proposée par Jo [208], si l'on ne tient compte que des bornes sur les variables articulaires, consiste à transformer les inégalités imposées par ces bornes en égalités en introduisant des variables supplémentaires. On considère alors les coordonnées généralisées (vecteur \mathbf{X}), les variables articulaires (vecteur Θ) et les variables introduites par la transformation en égalité

des inégalités (vecteur \mathbf{w}). Soit \mathbf{q} le vecteur constitué de l'ensemble de ces vecteurs. La structure du mécanisme implique qu'il existe une fonction de contrainte $\Phi(\mathbf{q}) = 0$. Soit J_Φ la jacobienne de cette équation, c'est-à-dire la matrice :

$$J_\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} = \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}, \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{w}} \right) \right)$$

La frontière de l'espace de travail est constituée des vecteurs \mathbf{q} tels que pour un \mathbf{X} donné il n'y a pas unicité des vecteurs Θ, \mathbf{w} . En d'autres termes le rang de la matrice

$$\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}, \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{w}} \right) \right)$$

est inférieur à sa dimension. Une procédure numérique permet de calculer le lieu des points où cette matrice est singulière. Notons cependant que Jo n'a illustré cette approche que pour le calcul de l'espace de travail d'un robot général lorsque l'orientation est constante. L'introduction des autres contraintes limitant l'espace de travail ferait croître très rapidement la taille de la jacobienne et rendrait la méthode très lourde en temps de calcul.

Une méthode similaire est proposée par Weng [459] : elle repose sur le fait que la vitesse de la plate-forme sur la frontière de l'espace de travail ne peut pas contenir de composante selon la normale à la frontière ; en conséquence, la frontière est définie par une zone de singularité comme l'ont remarqué Agrawal [2], Gosselin et Angeles [127]. Notons cependant que l'espace de travail ainsi défini correspond à une limite *structurale* de l'architecture puisqu'elle est indépendante des contraintes physiques (par exemple une limitation sur la valeur des variables articulaires). Cette approche semble cependant délicate à utiliser pour des robots à 6 degrés de liberté. D'ailleurs Weng, après l'avoir introduit, se ramène rapidement à des concepts géométriques.

Kumar [229] a proposé une méthode de même inspiration pour les manipulateurs à articulations rotoïdes. Cette méthode est appliquée dans le cas de différents robots plans pour le calcul de l'espace maximal et de l'espace dextre et a été utilisée par Ouerfelli [336] pour un cas particulier de robot spatial. Kumar introduit la notion *d'espace dextre avec contrôle total* comme toutes les régions de l'espace dextre ne contenant pas de configuration singulière. Les inconvénients principaux de cette méthode sont qu'elle ne s'applique pas aux actionneurs prismatiques et que la prise en compte des butées mécaniques et des risques d'intersection entre segment sont difficiles à introduire. Une méthode similaire est proposée par Feng pour les robots plans à 2 degrés de liberté [103] et à 3 degrés de liberté [104].

Certains auteurs ont tenté de traiter le problème selon une démarche d'optimisation (cf. Bessala [36]) ou avec une approche algébrique (cf. Pasqui-Boutard [348]). Les contraintes inégalités permettent de définir des fonctions à optimiser, les dérivées de ces fonctions définissant alors des équations de contraintes dont l'intersection constitue la frontière de l'espace de travail. Cette

intersection est obtenue numériquement en utilisant des systèmes de calcul formel. Une approche similaire est proposée par Haugh [161] qui, après transformation des contraintes inégalités en contraintes égalités en ajoutant des variables supplémentaires, arrive à exprimer les contraintes en fonction d'une variable unique. La frontière est ensuite déterminée numériquement.

Des auteurs ont porté leurs efforts pour les manipulateurs parallèles plans, plus simples, sur la recherche de l'espace dextre comme Pennock [351] ou maximal comme Kassner [212] (pour les robots de type 3-*RRR*) ou Williams [461]. Notons cependant que les résultats obtenus pour l'espace maximal sont soit inexacts, soit utilise une méthode de discrétisation.

Un cas particulier de calcul concerne l'espace de travail des micro-robots. Arai [18] suppose que les déplacements des actionneurs sont suffisamment faibles pour que l'on puisse considérer que la jacobienne inverse est constante. Si l'on suppose de plus que les changements d'orientation sont faibles, on considère la restriction C de la jacobienne aux déplacements cartésiens et l'on peut écrire pour chaque segment $\|\Delta\rho\|^2 = \Delta X^T J^{-T} J^{-1} \Delta X$. Pour chaque segment cette relation implique que, pour un $\Delta\rho$ fixé, le centre de la plate-forme est à l'intérieur d'une zone délimitée par une quadrique et l'espace de travail est constitué de l'intersection de ces quadriques.

Mentionnons enfin les travaux de Landsberger [235], qui sortent un peu du cadre de cette étude dans la mesure où ces segments ne sont pas des corps rigides mais des câbles. Il se pose donc de plus des problèmes de maintien de la tension de ces câbles. Ce problème a aussi été traité par Albus [5] qui, à l'opposé de Landsberger, ne dispose pas d'un mât central pour imposer une précontrainte de tension à ces câbles. L'espace de travail est alors plutôt défini comme les régions où l'ensemble des câbles reste en tension lorsque le plateau mobile est soumis à une force verticale créée par la masse transportée. Ming [306] a aussi mentionné ce problème en calculant un espace de travail dont les bornes correspondent à une valeur maximum de la tension dans les câbles.

Dans ce chapitre nous privilégierons les méthodes géométriques qui seront en général très efficaces pour déterminer les différents types d'espace de travail.

6.2. Principe général du calcul de l'espace de travail à orientation constante

Pour ce type d'espace de travail il existe une méthode générale qui permet de calculer géométriquement la frontière de l'espace de travail sous l'hypothèse que *les contraintes sur les chaînes cinématiques permettent de définir la région maximal que peut parcourir le point d'attache de la chaîne à la plate-forme, ceci de manière indépendante pour chaque chaîne.*

Supposons en effet que les contraintes sur une chaîne i permettent de définir le volume V_i atteignable par le point B_i , point d'attache de la chaîne à la plate-

forme. Lorsque le point B_i décrit ce volume le point C décrit un volume V_i^C identique obtenu en translatant V_i par le vecteur $\mathbf{B}_i\mathbf{C}$ qui est constant puisque l'orientation est fixée. Ce volume V_i^C est le volume de travail permis pour le point C vis-à-vis des contraintes sur le segment i . L'espace de travail étant celui où les contraintes sur *tous* les segments sont vérifiées, il s'obtient donc comme l'intersection des V_i^C . Pour simplifier on pourra parfois être amené à calculer des coupes de l'espace de travail. Il suffit alors de procéder à l'intersection de chacun des V_i^C avec le plan de coupe, puis de procéder à l'intersection des éléments résultants.

Ce principe très simple est celui que nous allons utiliser dans les sections suivantes. Une approche pragmatique du problème permet par ailleurs de traiter rapidement le calcul des coupes pour un grand nombre de cas. Pour cela, il suffit de disposer d'une bonne bibliothèque géométrique exécutant des opérations booléennes sur les polygones : intersection, union, différence, ceci sur des éléments pouvant avoir un nombre arbitrairement grand de côtés. En effet on peut approximer, si nécessaire, les coupes de V_i^C par des polygones (ce sera la partie spécifique pour chaque robot) puis faire appel à la bibliothèque pour calculer la frontière de l'espace de travail. Nous verrons de plus que la manipulation de polygones pourra être utile lorsque l'on prendra en compte les débattements limite des articulations passives. Notons qu'une branche de la géométrie, la *géométrie algorithmique*, est dédiée, entre autres, aux manipulations sur les polygones et que l'on pourra s'inspirer utilement des algorithmes qui ont été développés dans ce cadre (on pourra ainsi consulter le livre de Boissonnat-Yvinec [39]).

6.3. Manipulateur plan

Nous considérons dans cette section le manipulateur plan du type 3 – $R\underline{P}R$ ¹ décrit en figure ?? . L'étude des robots 3 – $\underline{R}RR$, 3 – $\underline{P}RR$ fera l'objet simplement d'exercices car elle se déduit facilement du cas que nous allons traiter.

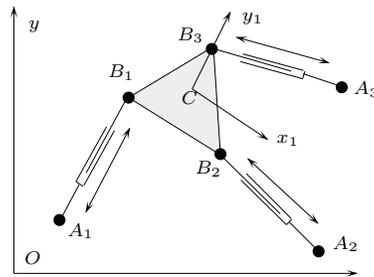


Figure 6.1: Un robot plan du type 3 – $R\underline{P}R$.

¹La plupart des algorithmes décrits dans cette section sont disponibles par ftp anonyme, répertoire `prisme/Workspace/3-RPR`

6.3.1. Espace de travail à orientation constante

Dans cette section on suppose que l'orientation de la plate-forme mobile est fixée et on veut déterminer l'ensemble des positions possibles d'un point de référence de la plate-forme. Les algorithmes proposés sont une application directe de la méthode générale décrite dans la section précédente. On va examiner successivement l'influence de divers facteurs sur cet ensemble de position.

6.3.1.1. Prise en compte des limitations articulaires

On suppose que les vérins ont une longueur minimum ρ_{min} et une longueur maximum ρ_{max} . En conséquence, les points B_i de la plate-forme se trouvent dans une zone annulaire dont la frontière extérieure est un cercle C_{e_i} de centre A_i et de rayon ρ_{max} et la frontière intérieure un cercle C_{i_i} de même centre et de rayon ρ_{min} .

Lorsque le point B_i se déplace dans cette zone le point C , puisque l'orientation est constante, se déplace dans une zone analogue \mathcal{W}_i dont les frontières sont des cercles C_{e_i}, C_{i_i} de même rayon mais dont le centre S_i s'obtient par une translation de A_i de vecteur $\mathbf{B}_i\mathbf{C}$ (ce sont les cercles en pointillé de la figure ??). Si les contraintes sur le segment i sont satisfaites alors C doit se

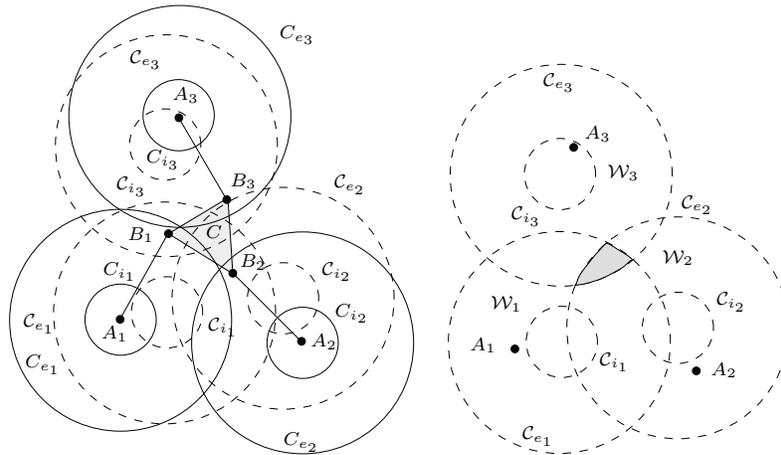


Figure 6.2: *A gauche les objets géométriques intervenant pour la détermination de l'espace de travail à orientation constante d'un robot plan 3-RRR. A droite l'espace de travail déduit de ces objets (en grisé).*

trouver à l'intérieur de \mathcal{W}_i . L'espace de travail est obtenu lorsque les contraintes sur tous les segments sont satisfaites et sera donc l'intersection des trois zones $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$, qu'il est aisé de calculer. On voit donc que la frontière de l'espace de travail sera constituée d'arcs de cercle (figure ??). Le temps de calcul de l'espace de travail est de l'ordre de 4-5 ms.

6.3.1.2. Prise en compte des contraintes mécaniques

Dans cette section on va supposer qu'en plus des limitations articulaires les articulations de la base sont soumises à des limitations mécaniques qui réduisent leur possibilité de rotation. On peut donc supposer que les segments ne peuvent se déplacer que dans un secteur annulaire d'angle au centre α_i . Les zones permises \mathcal{W}_i ne sont donc pas les zones annulaires complètes mais des secteurs annulaires dont l'intersection est l'espace de travail. La frontière de l'espace de travail est donc constituée d'arcs de cercles et de segments (figure ??). On

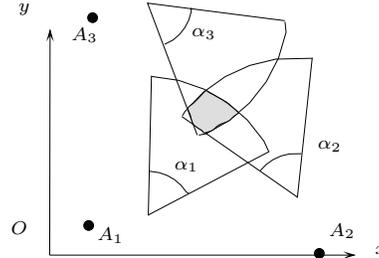


Figure 6.3: En grisé l'espace de travail lorsque les contraintes sont les limitations articulaires et des contraintes sur les articulations de la base.

peut aussi sans difficulté imposer des contraintes sur les articulations de la plate-forme, du même type que pour les articulations de la base (cf. exercice).

6.3.2. Espace de travail à centre fixé

Nous proposons ici les bases d'un algorithme permettant une représentation commode de l'espace atteignable en rotation pour un manipulateur plan de type 3 – $R\underline{P}R$ dont le centre est en position fixe. Pour cela nous représentons les déplacements possibles d'un point fixé sur la plate-forme, autre que son centre. Cette approche se généralise aux autres types de robots plans.

Nous allons tout d'abord déterminer les rotations possibles des points B_i . Un point B_i doit se trouver à l'intérieur de la couronne annulaire définie par les longueurs minimum et maximum du vérin. Mais pour un centre fixé ce point se trouve aussi sur le cercle C_{B_i} de centre C et de rayon $\|\mathbf{CB}_i\|$ (figure ??). En conséquence, le point B_i se trouve sur les portions $C_{B_i}^j$ de C_{B_i} compris dans la zone annulaire. Considérons maintenant un point M rigidement lié à la plate-forme. Ce point se trouve sur un cercle C_M de centre C . L'angle entre B_i et M étant fixé on peut déduire des zones permises pour B_i les zones C_{M_j} permises pour M en ne considérant que les contraintes sur le segment i (figure ??). Les déplacements permis pour le point M sont donc tout simplement l'intersection de tous les arcs C_{M_j} lorsque l'on prend en compte l'ensemble des segments. Il est aussi clair que l'on peut introduire sans problème des contraintes sur les articulations comme nous l'avons fait dans la section précédente.

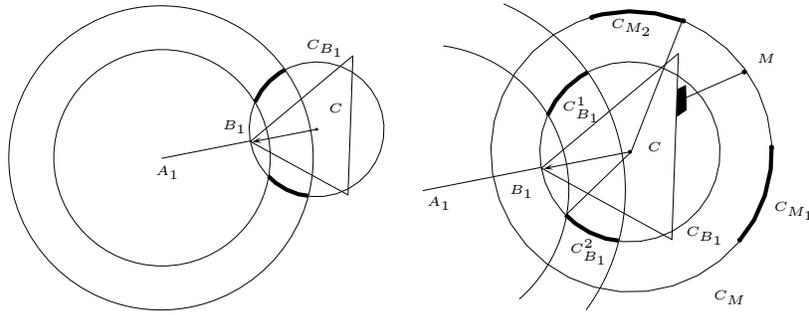


Figure 6.4: *A gauche les déplacements possibles pour un point B_i lorsque le point C est fixe (en trait épais). A droite les déplacements possibles, lorsque le point C est fixe, d'un point M lié à la plate-forme en prenant en compte les contraintes sur un segment : ce sont les parties C_{M_1}, C_{M_2} du cercle de centre C , de rayon $\|CM\|$, obtenues à partir des zones permises pour $B_1, C_{B_1}^1, C_{B_1}^2$.*

6.3.3. Espace dextre

Rappelons que l'espace dextre est l'ensemble des positions du centre de la plate-forme où toutes les orientations sont permises. Considérons un robot de type 3- $R\underline{P}R$ et un point particulier C_1 de cet espace ; comme toutes les orientations

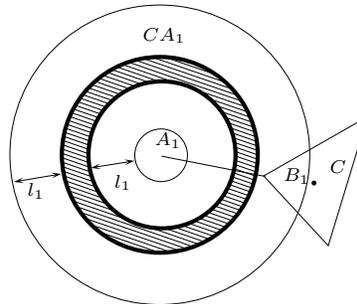


Figure 6.5: *L'espace dextre de C en prenant en compte uniquement les contraintes sur le segment 1 (en trait hachuré, $l_1 = \|\mathbf{CB}_1\|$).*

sont permises un point B_i doit pouvoir décrire un cercle de centre C_1 et de rayon $\|\mathbf{CB}_i\|$. Ce cercle doit être contenu dans la zone annulaire du segment i . La zone permise pour C en raison des contraintes sur le segment i , si elle existe, est donc la couronne annulaire CA_i dont les frontières sont les cercles de centre A_i et de rayons $\rho_{min_i} + \|\mathbf{CB}_i\|$ et $\rho_{max_i} - \|\mathbf{CB}_i\|$ qui n'existe que si $\rho_{max_i} - \rho_{min_i} \geq 2\|\mathbf{CB}_i\|$ (figure ??) et l'espace dextre est l'intersection des trois zones CA_i . On peut aussi inclure dans cette méthode des contraintes sur les articulations. Le temps de calcul de l'espace dextre est de l'ordre de 4-5 ms.

6.3.4. Espace maximal

L'espace maximal est défini comme l'ensemble des positions de C atteignable avec au moins une orientation. Le problème de la détermination de l'espace maximal pour les robots de type 3 – $R\underline{P}R$ a été abordé par Kassner [212] qui a remarqué que la frontière de cet espace était constituée d'arcs de cercle ou de sextique. Mais la détermination de ces éléments est ensuite obtenue par une méthode de discrétisation. La même remarque a été faite incidemment par Kumar [229] qui a observé que le lieu des configurations singulières définissant la frontière de l'espace de travail des robots 3 – $\underline{R}RR$ correspond à des arcs de cercle ou de sextiques. Nous allons présenter les grandes lignes d'une méthode permettant de calculer la frontière de l'espace maximal pour les robots de type 3 – $R\underline{P}R$, les autres types se dérivant de cette étude et étant traités dans les exercices. Les détails de cet algorithme sont décrit dans [294].

Remarquons tout d'abord qu'il est facile de savoir si un point appartient à l'espace maximal. Pour cela il s'agit de déterminer si au moins une orientation de l'organe terminal est possible pour cette position. Considérons tout d'abord le point B_1 pour la position de C que l'on examine. Ce point peut se déplacer sur le cercle C_1 de centre C et de rayon $\|\mathbf{CB}_1\|$. On calcule alors l'intersection de C_1 avec la couronne annulaire correspondant aux contraintes sur la longueur du segment 1, composée de deux cercles C_{max}^1, C_{min}^1 tout deux centrés en A_1 et de rayon $\rho_{max}^1, \rho_{min}^1$.

Si il n'y a pas de point d'intersection on examine si le cercle C_1 est à l'intérieur de C_{max}^1 et à l'extérieur de C_{min}^1 ce qui se fait simplement en testant l'appartenance du point C à l'intérieur de C_{max}^1 et à l'extérieur de C_{min}^1 . Si tel est le cas alors toute les orientations autour de C sont permises pour le plateau mobile du point de vue des contraintes sur le segment 1. Si C_1 est à l'extérieur de C_{max}^1 ou à l'intérieur de C_{min}^1 alors aucune orientation n'est permise et C n'appartient pas à l'espace maximal. On procède la même manière avec les segments 2 et 3.

Supposons maintenant qu'au moins un des C_1, C_2, C_3 a une intersection avec sa couronne annulaire. A chacun des points d'intersection correspond un angle de rotation et l'on ordonne ces angles dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ pour obtenir des intervalles I_n^i (figure ??). On obtient ainsi pour les 3 segments trois listes d'intervalles permis. On calcule ensuite l'intersection de tous les triplets d'intervalles constitués d'éléments appartenant à chacune des listes. Si cette intersection est non vide le point appartient à l'espace maximal. Notons que par cette procédure on détermine non seulement si le point est dans l'espace maximal mais aussi les valeurs permises de l'angle de rotation.

On va maintenant déterminer la frontière de l'espace maximal d'un point particulier, le point B_3 (pour un point différent l'algorithme utilise le même principe mais est légèrement plus complexe). On remarque tout d'abord que

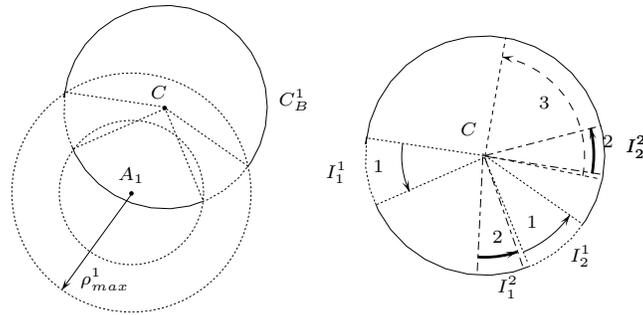


Figure 6.6: *A gauche pour une position fixée de C les points B_i peuvent décrire un cercle C_B^i centré en C . Les positions possibles de B_i , et donc les angles de rotations autour de C , sont les intersections des cercles C_B^i avec les cercles de centre A_i et de rayons $\rho_{max}^i, \rho_{min}^i$. Pour les 3 segments on obtient ainsi 3 listes d'intervalles définissant des angles de rotation permis. Si ces trois listes ont une intersection non vide alors le point C est dans l'espace maximal. Ici l'intersection est vide : le point considéré ne fait pas partie de l'espace maximal. si B_3 est sur la frontière de l'espace maximal alors au moins un des segments a une longueur correspondant à un extremum de sa gamme permise. On peut alors distinguer différents cas selon le nombre de segments en butée.*

- un segment est en butée : pour le segment i en butée le robot doit se trouver dans une configuration telle que les points A_i, B_i, C sont alignés. Trois cas sont possibles, définis par l'ordre des points : $A_i B_i B_3, A_i B_3 B_i, B_3 A_i B_i$. Le point B_3 décrit alors des cercles $C_{B_3}^i$. On obtient ainsi une liste de cercles candidats à être sur la frontière de l'espace maximal, à laquelle on rajoute les cercles de la couronne annulaire du point B_3 .
- deux segments en butée : lorsque les deux segments 1 et 2 ont une longueur fixe la trajectoire du point B_3 est celle d'un mécanisme à 4 barres, c'est-à-dire un sextique comme nous l'avons vu dans le chapitre «Modèle géométrique direct». Potentiellement il existe 4 sextiques qui correspondent aux différentes combinaisons possibles pour les longueurs des segments 1 et 2 : $(\rho_{max}^1, \rho_{max}^2), (\rho_{max}^1, \rho_{min}^2), (\rho_{min}^1, \rho_{min}^2), (\rho_{min}^1, \rho_{max}^2)$.

La figure ?? présente ainsi les différents objets géométriques intervenant dans un exemple typique de calcul d'espace maximal. Tous ces objets sont rassemblés dans une liste unique. Dans une deuxième phase on procède à l'intersection de toutes les paires d'éléments de la liste. A noter que cette phase implique de calculer l'intersection des courbes de coupleur de deux mécanismes à 4 barres, problème résolu par Innocenti [197]. Il est aussi nécessaire dans cette phase de déterminer les points multiples des sextiques. Après calcul les points trouvés découpent les éléments de la liste en portion. La troisième phase consiste à déterminer quelles sont les portions qui font partie de la frontière. Pour chaque

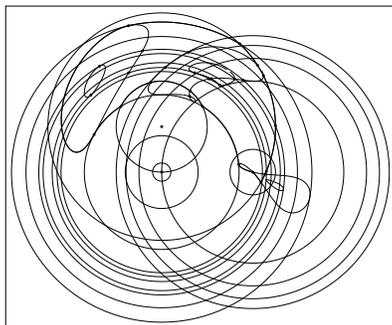
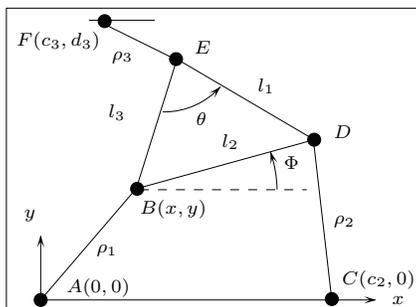


Figure 6.7: *Objets géométriques intervenant dans le calcul de l'espace maximal.*

portion on détermine si elle fait partie de la frontière de l'espace maximal en prenant son point milieu et en calculant l'inverse jacobienne cinématique du robot en ce point, les normales unitaires $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ à la courbe en ce point et en calculant les vitesses articulaires correspondant à des vitesses cartésiennes dirigées selon $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$. Les signes des vitesses articulaires obtenues permettent de conclure sur l'appartenance de la portion à la frontière. En effet un élément de la frontière sera tel qu'un déplacement selon une normale conduira à la violation des contraintes sur les longueurs alors qu'un déplacement selon la normale opposée ne violera pas ces contraintes. Par exemple pour une portion de sextique correspondant à une valeur maximum de ρ_1, ρ_2 , si les vitesses articulaires $\dot{\rho}_1, \dot{\rho}_2$ sont toutes les deux positives pour la normale \mathbf{N}_1 (et donc négative pour \mathbf{N}_2) alors la portion de sextique fait partie de la frontière, puisque un déplacement selon \mathbf{N}_1 conduirait à une augmentation des longueurs ρ_1, ρ_2 , déjà à leur maximum. Le temps de calcul de l'espace de travail varie entre 1500 et 5000 ms. A titre d'exemple on considère les robots plans dont les dimensions sont définies dans la figure ??, la figure ?? présentant leur espace maximal. A



Robot	1	2	3
l_1	25	20.839	25
l_2	25	17.045	25
l_3	25	16.54	25
c_2	20	15.91	20
c_3	0	0	10
d_3	10	10	17.32
θ	60	52.74	60

Figure 6.8: *Notation pour les robots plans*

noter que certaines sextiques vont découper l'espace maximal en zones. Selon le montage initial du robot l'espace maximal effectif sera celui calculé ou sera réduit à la zone dans laquelle se trouve le montage initial.

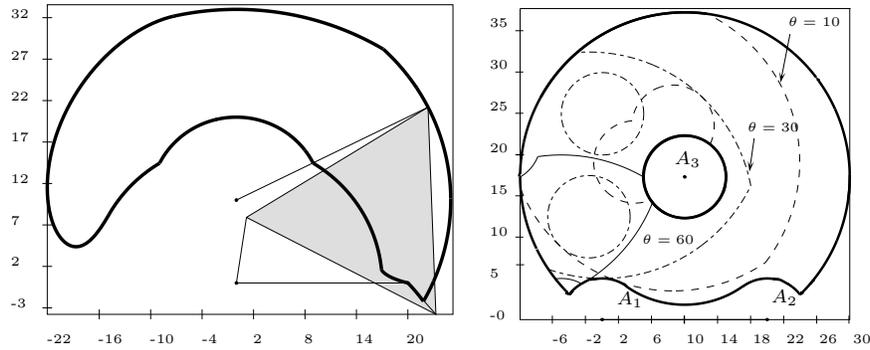


Figure 6.9: *A gauche espace de travail maximal pour le robot 1, longueurs des segments $[2,8]$, $[5,25]$, $[10,25]$. A droite en trait épais espace de travail maximal pour le robot 3, longueurs des segments $[5,20]$, $[5,20]$, $[5,20]$. En pointillé espace de travail pour différentes orientations.*

6.3.5. Espace pour un intervalle d'orientation

Il est peut être aussi intéressant de calculer l'ensemble des positions du point de référence atteignables par le robot avec au moins une orientation dans un intervalle donné, l'espace de travail maximal que nous avons présenté dans la section précédente n'en étant qu'un cas particulier.

Là aussi nous allons supposer que le point de référence est le point B_3 . Dans le principe l'algorithme permettant de calculer cet espace de travail va être similaire à celui que nous avons exposé précédemment. Remarquons qu'il est facile de déterminer si un point est dans cet espace puisque l'on sait calculer en chaque point les intervalles d'orientation possibles. Il suffit donc de tester si l'intersection de ces intervalles avec l'intervalle d'orientation est non vide.

La deuxième phase diffère car pour la construction des portions on considère non seulement les points d'intersection mais aussi ceux pour lesquels l'orientation est égale à l'une des bornes de l'intervalle d'orientation (il convient de noter que pour chaque élément de la liste il existe une seule orientation de la plate-forme pour une position donnée de B_3 sur l'élément).

Dans la troisième phase on détermine l'appartenance de la portion à la frontière non seulement en testant si un déplacement selon une normale à la portion conduit à une violation des contraintes sur les longueurs mais aussi en testant si l'orientation pour le point milieu est bien compris dans l'intervalle d'orientation. La figure ?? présente des espaces calculés pour divers intervalles d'orientation (le temps de calcul est de l'ordre de 1000 à 2000 ms).

6.3.6. Espace à orientation totale

Il est peut-être aussi intéressant de calculer l'ensemble des positions du point de référence atteignables par le robot avec toutes les orientations possibles dans

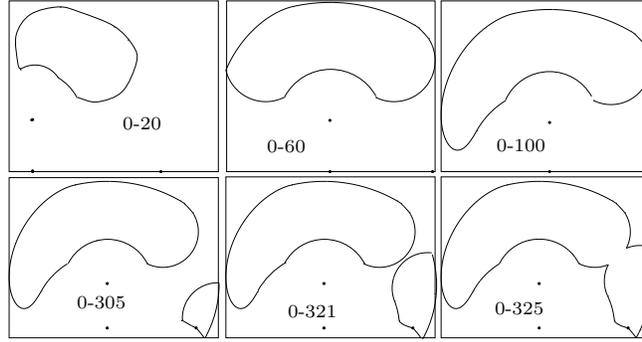


Figure 6.10: *Espaces de travail pour différents intervalles d'orientation du robot 1 (longueur des segments $[2, 8]$, $[5, 25]$, $[10, 25]$)*

un intervalle donné $[\theta_i, \theta_j]$, l'espace dextre en étant un exemple.

Remarquons tout d'abord qu'il est facile de déterminer si un point fait partie de cet espace : pour cela il suffit de calculer les intervalles d'orientation permis en ce point et de vérifier qu'un de ces intervalles contient l'intervalle d'orientation. Pour un point de la frontière de l'espace à orientation totale le robot aura un segment en butée. En effet, s'il est clair qu'au moins un segment doit être en butée, il ne peut y en avoir deux puisque dans ce cas l'orientation du manipulateur est unique.

Supposons tout d'abord qu'un point soit sur la frontière parce qu'une borne des intervalles d'orientation possibles correspond à l'une des bornes θ_i, θ_j de l'intervalle d'orientation. Pour une orientation donnée de la plate-forme lorsque le point B_i se déplace sur un des cercles de la couronne annulaire \mathcal{G}_i le point B_3 se déplace sur un cercle de même rayon dont le centre est celui de la couronne annulaire, translaté par le vecteur $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_3$ (qui est constant puisque l'orientation est fixée). Pour chacune des orientations θ_i, θ_j on obtient ainsi comme éléments potentiels de la frontière 6 cercles de centre et rayon $(A_3, \rho_{max}^3), (A_3, \rho_{min}^3), (A_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_3, \rho_{max}^1), (A_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_3, \rho_{min}^1), (A_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_3, \rho_{max}^2), (A_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_3, \rho_{min}^2)$, soit un total de 12 cercles.

Supposons maintenant qu'un point de la frontière soit atteint parce que pour une orientation θ de l'intervalle $[\theta_i, \theta_j]$ l'un des segments atteint une longueur limite. Comme le point fait partie de la frontière l'arc de cercle de centre B_3 , de rayon $\|\mathbf{B}_3\mathbf{B}_1\|$, d'angle θ_i, θ_j qui est décrit par B_1 lorsque l'orientation de la plate-forme varie entre θ_i et θ_j doit être inclus dans \mathcal{G}_1 et est tangent en un point à cette couronne, par exemple au cercle de rayon ρ_{max}^1 . Cette tangence implique que dans cette configuration le point B_3 se trouve sur un cercle de centre A_1 , de rayon $\rho_{max}^1 - \|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_3\|$. Ce cas de figure introduit donc comme élément potentiel de la frontière de l'espace les cercles de centre et rayon $(A_1, \rho_{max}^1 - \|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_3\|), (A_1, \rho_{min}^1 - \|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_3\|), (A_2, \rho_{max}^2 - \|\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3\|), (A_2, \rho_{min}^2 - \|\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3\|)$, soit 4 cercles supplémentaires. L'espace à orientation totale est alors

obtenu comme l'intersection des 16 cercles. La figure ?? présente des exemples d'espace à orientation totale. Le temps de calcul s'établit à environ 100 ms.

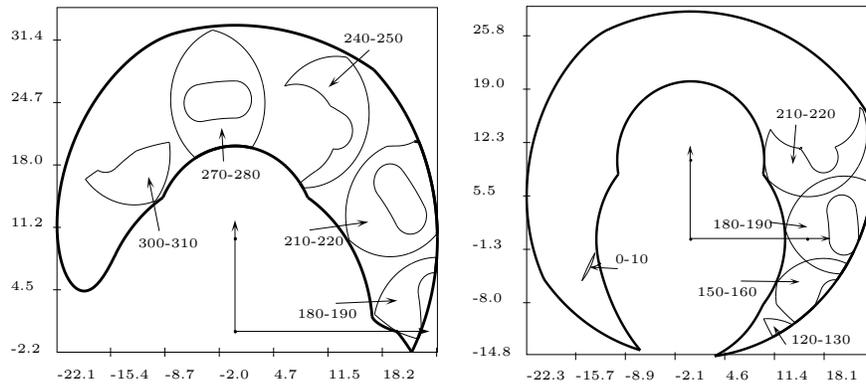


Figure 6.11: Exemples d'espace à orientation totale pour le robot 1 et le robot 2 avec en trait épais l'espace maximal.

6.4. Manipulateur à 6 degrés de liberté

Nous considérons maintenant les robots à déplacement dans l'espace et examinons les différents types d'espace. Bien entendu on se heurte dans ce cas à une difficulté de représentation puisque l'espace de travail se trouve défini dans un espace de dimension 6. Dans cette section nous considérerons principalement le cas du robot général². D'autres exemples sont présentés dans les exercices.

6.4.1. Coupes de l'espace de travail à orientation fixée

On applique le principe général présenté dans la section ?? en examinant les déplacements possibles des points d'articulation sur le mobile (B_i). Nous remarquons que les points B_i se trouvent toujours dans un volume limité par deux sphères concentriques centrées en A_i , dont les rayons sont les longueurs minima et maxima des segments.

L'intersection avec un plan de coupe donnera donc soit une région vide (l'espace de travail est alors aussi vide), soit une région limitée par un ou deux cercles concentriques. La zone permise par le point C est alors obtenu en traduisant cette région par le vecteur $\mathbf{B}_i\mathbf{C}$. Si l'on prend en compte tous les segments, l'intersection du plan et de l'espace de travail est une surface correspondant à l'intersection de 6 couronnes annulaires. La figure ?? montre deux cas possibles (nous avons limité le nombre de couronnes à 3 pour simplifier le dessin et en faciliter la compréhension).

²La plupart des algorithmes décrits dans cette section sont disponibles par ftp anonyme, répertoire `prisme/Workspace/Gough`

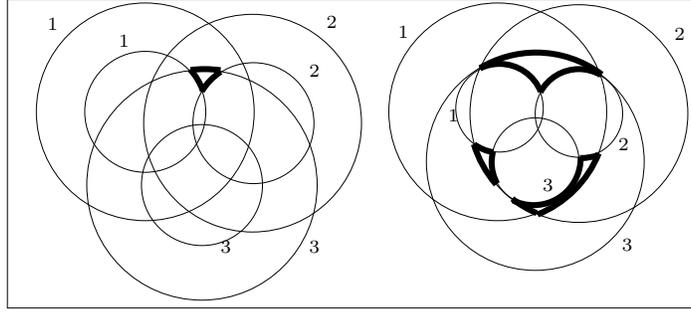


Figure 6.12: *En traits épais la frontière de l'espace de travail dans un plan, délimitée par l'intersection de 3 couronnes annulaires.*

On peut donc en déduire que l'espace de travail dans le plan sera délimité par des arcs de cercle, ce qui nous donne la structure géométrique de la frontière. Cette structure va permettre une détermination rapide des bornes de l'espace de travail en x, y sans recourir à une discrétisation, ainsi que le calcul de l'aire de la coupe de l'espace atteignable.

Une telle approche ne prend en compte cependant que les limitations sur les variables articulaires. Nous verrons qu'elle pourra être généralisée pour prendre aussi en compte les autres facteurs limitatifs de l'espace de travail.

Entrons maintenant dans une description plus précise de l'algorithme tel que présenté par C. Gosselin [126]. Reprenant les équations du modèle géométrique inverse on peut écrire :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{OC} - \mathbf{OA} + R\mathbf{CB}_r \quad (6.1)$$

Posons $\mathbf{U}_i = \mathbf{OA} - R\mathbf{CB}_r$ et notons (u_i, v_i, w_i) les composantes de ce vecteur. Pour une orientation fixée ces composantes sont constantes. Le point C se trouve compris entre deux sphères, de centre U_i , définies par :

$$(x_c - u_i)^2 + (y_c - v_i)^2 + (z_c - w_i)^2 = \rho_{i_{min}}^2 \quad (6.2)$$

$$(x_c - u_i)^2 + (y_c - v_i)^2 + (z_c - w_i)^2 = \rho_{i_{max}}^2 \quad (6.3)$$

où $\rho_{i_{min}}$ et $\rho_{i_{max}}$ représentent les longueurs minima et maxima des segments obtenues à partir des courses des actionneurs. Ces sphères représentent donc le domaine d'évolution possible du point C , étant données les contraintes sur le segment considéré.

Si l'on considère maintenant les mouvements possibles dans un plan donné, par exemple le plan défini par $z_c = z_H$, les frontières de la surface décrite par le point C (toujours en prenant en compte les contraintes sur le segment considéré) vont être des cercles définies par :

$$(x_c - u_i)^2 + (y_c - v_i)^2 = R_{\min,i}^2 \quad (6.4)$$

$$(x_c - u_i)^2 + (y_c - v_i)^2 = R_{\max,i}^2 \quad (6.5)$$

dont les rayons sont $R_{\min,i}$ et $R_{\max,i}$ définis par :

$$R_{\min,i}^2 = \begin{cases} \rho_{i_{\min}}^2 - (z_H - w_i)^2 & , \text{ si } \rho_{i_{\min}}^2 - (z_H - w_i)^2 > 0 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (6.6)$$

$$R_{\max,i}^2 = \begin{cases} \rho_{i_{\max}}^2 - (z_H - w_i)^2 & , \text{ si } \rho_{i_{\max}}^2 - (z_H - w_i)^2 > 0 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (6.7)$$

Les cercles de rayon maximum seront appelés les *cercles extérieurs* de la couronne annulaire alors que les cercles de rayon minimum seront dénommés les *cercles intérieurs*. On pourrait, bien sûr, définir les cercles de manière similaire si l'on considérait un autre plan de coupe. La frontière de l'espace de travail est constituée des intersections des 6 couronnes annulaires définies par les équations précédentes, donc par une liste d'arcs de cercle facilement calculable.

Le principe général de calcul du volume de l'espace de travail a donc été ici appliqué au robot général. On trouvera dans les exercices d'autres exemples (robot «Hexa», robot d'Arai). Notons que dans certains cas pour un prototypage rapide d'un programme de calcul de l'espace de travail il peut être intéressant d'approximer les frontières des zones décrites par les B_i par des polygones.

Nous présentons tout d'abord des coupes dans un plan horizontal pour la «main gauche» de l'INRIA lorsque la matrice de rotation est l'identité (figure ??). La course des actionneurs est de 3 cm. Les formes et les aires de ces

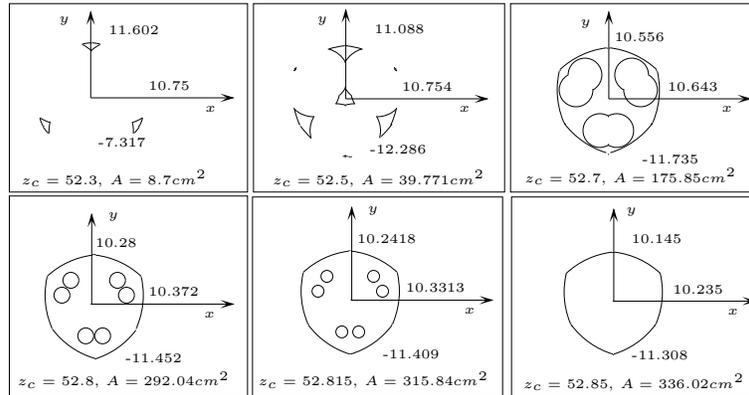


Figure 6.13: Coupes dans un plan horizontal de l'espace de travail de la «main gauche» INRIA pour $R = I_3$.

coupes sont très sensibles aux variations des angles d'orientation. La figure ?? présentent des nouvelles coupes pour les angles d'Euler $\psi = 30^\circ$, $\theta = \phi = 0^\circ$.

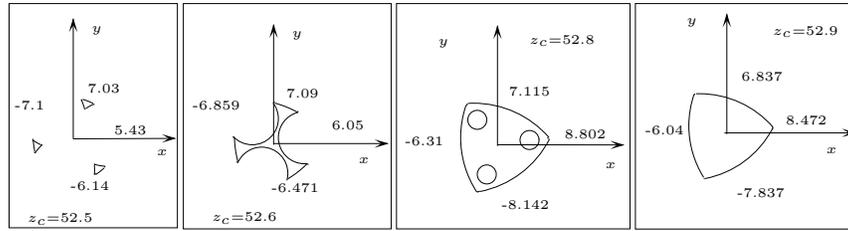


Figure 6.14: Coupes dans un plan horizontal de l'espace de travail de la « main gauche » INRIA pour $\psi = 30^\circ, \theta = \phi = 0^\circ$.

6.4.2. Espace de travail 3D à orientation constante

Il est aussi possible de calculer directement le volume de travail un prix d'une plus grande complexité. Ainsi dans le cas du robot général nous aurons à calculer l'intersection de volumes limités par deux sphères concentriques, ce qui a été traité par Gosselin [131]. Le calcul de cette intersection est effectué de la manière suivante :

- calcul des cercles intersection de chaque paire de sphères parmi les 12 sphères délimitant les volumes.
- calcul de l'intersection de tous les cercles appartenant à une même sphère.
- détermination des différents arcs de cercle définis à partir des points d'intersection de l'étape précédente
- test de chaque arc pour savoir s'il fait partie de la frontière de l'espace de travail. Le test d'appartenance se fait en prenant le point milieu de l'arc et en vérifiant s'il satisfait les contraintes.

La représentation 3D est obtenue en traçant simplement les arcs de cercles qui ont vérifié l'appartenance à la frontière. Les figures ??,?? présentent des exemples de représentation 3D de l'espace de travail. On pourra noter la similitude

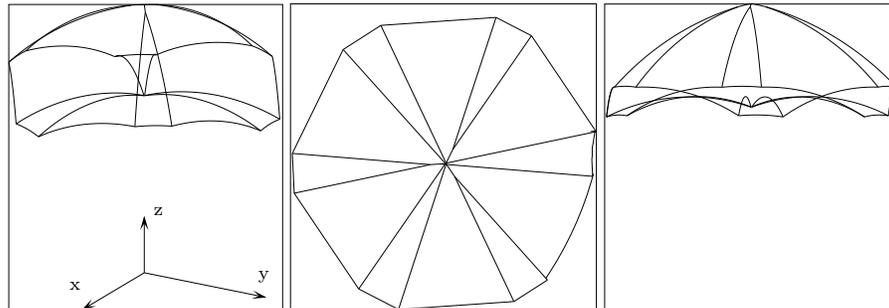


Figure 6.15: Espace de travail 3D du prototype de Arai ($\psi = \theta = \phi = 0^\circ$).

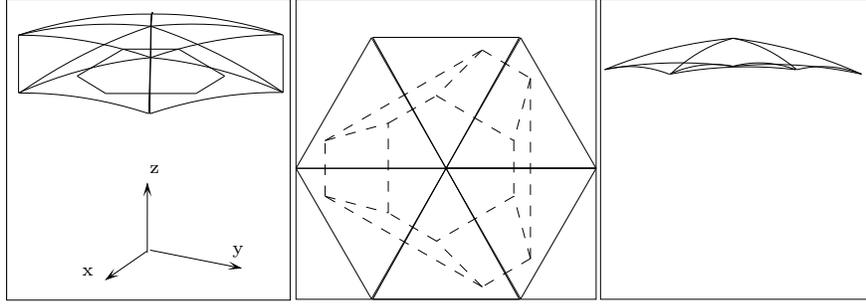


Figure 6.16: Espace de travail 3D de la « main gauche » INRIA ($\psi = \theta = \phi = 0^\circ$).

des résultats avec ceux présentés par Claudinon [59] qui ne décrit cependant pas comment ils ont été obtenus.

6.4.2.1. Aire des coupes et volume de l'espace de travail

A partir de la description analytique de la frontière il sera en général facile de calculer l'aire d'une coupe, au besoin en recourant à une approximation polygonale. Dans le cas du robot général nous pouvons appliquer le théorème de la divergence de Gauss exprimant l'aire A d'une section plane par :

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega \quad (6.8)$$

où $\partial\Omega$ représente la frontière de la région, \mathbf{s} le vecteur position d'un point arbitraire de $\partial\Omega$ et \mathbf{n} le vecteur normal unitaire extérieur à la courbe $\partial\Omega$. Comme l'espace de travail est défini ici par une liste d'arcs de cercle nous pouvons écrire l'équation (??) sous la forme :

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_a} A_i \quad (6.9)$$

avec

$$A_i = \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega_i \quad (6.10)$$

où N_a est le nombre d'arcs constituant la frontière et $\partial\Omega_i$ est le i^{eme} arc. Si l'arc a pour centre un point de coordonnées $[h, g]$, pour rayon r et que ses extrémités sont définies par les angles θ_1 et θ_2 , nous pouvons alors exprimer s et \mathbf{n} par :

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$\mathbf{n} = \begin{cases} [\cos \theta, \sin \theta]^T & , \text{ si l'arc est sur la frontière extérieure} \\ [-\cos \theta, -\sin \theta]^T & , \text{ si l'arc est sur la frontière intérieure} \end{cases} \quad (6.12)$$

La définition de \mathbf{n} correspond à la nécessité pour ce vecteur d'être vers l'extérieur de la région considérée. On obtient alors :

$$A_i = hr[\sin \theta_2 - \sin \theta_1] + gr[\cos \theta_1 - \cos \theta_2] + r^2[\theta_2 - \theta_1] \quad (6.13)$$

pour un arc extérieur et

$$A_i = -hr[\sin \theta_2 - \sin \theta_1] - gr[\cos \theta_1 - \cos \theta_2] - r^2[\theta_2 - \theta_1] \quad (6.14)$$

pour un arc intérieur. Le temps de calcul pour une coupe et son aire s'établit à environ 20 ms. Le calcul du volume atteignable se fait simplement à partir de l'aire des coupes en supposant que le volume varie linéairement entre deux coupes si la distance entre les deux plans de coupe est suffisamment petite. Ce calcul permet de vérifier certains résultats obtenus par Masory [277]. La figure ?? présente ainsi les variations du volume de l'espace de travail en fonction des courses des actionneurs. On peut effectivement vérifier que le volume est sensiblement proportionnel au cube de la course. La figure ?? montre le

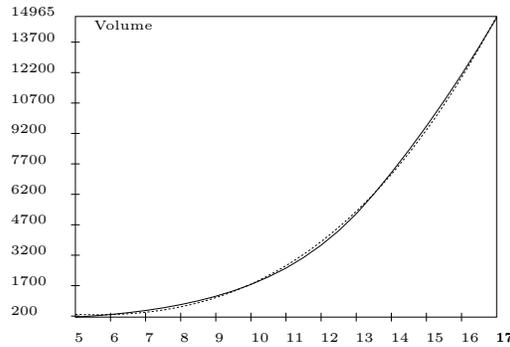


Figure 6.17: *Volume de l'espace de travail à orientation constante de la «main gauche» INRIA en fonction de la course des actionneurs (en traits fins). En traits pointillés le polynôme de degré 3 qui approxime cette variation.*

volume de l'espace de travail en fonction du rapport du rayon de la plate-forme sur celui de la base. On constate que ce volume est maximal si le rayon de la plate-forme est très légèrement inférieur à celui de la base.

6.4.2.2. Prise en compte des limitations mécaniques sur les articulations

Dans cette section nous allons généraliser la méthode proposée pour permettre la prise en compte des contraintes de débattement sur les articulations passives. Notre but est de trouver une modélisation des limitations mécaniques

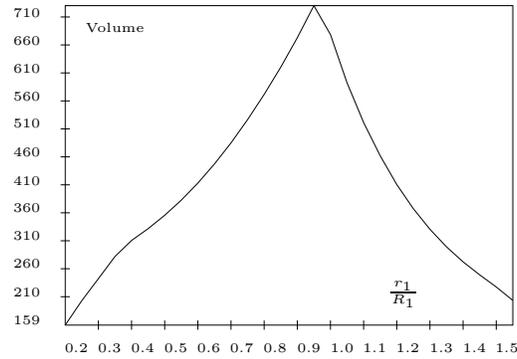


Figure 6.18: *Volume de l'espace de travail en fonction du rapport du rayon de la plate-forme sur celui de la base.*

sur les articulations, permettant de considérer le plus grand nombre possible d'articulations réelles. Cette modélisation doit être géométrique pour pouvoir déterminer la nature de la frontière de l'espace de travail.

Notons que nous avons à modéliser le plus souvent des contraintes sur des articulations de type joint de Cardan ou rotule. Si l'on suppose que chaque segment est une ligne ou un corps de révolution la rotation du segment autour de son axe n'intervient donc pas. Dans un premier temps nous allons examiner comment on peut modéliser les contraintes sur les articulations liées à la base.

6.4.2.2.1 Contraintes sur les articulations de la base

Les limites mécaniques peuvent être définies par une surface délimitant un volume à l'intérieur duquel doit se trouver le segment du manipulateur lié à l'articulation. Nous allons supposer que l'on peut modéliser cette surface par une pyramide avec des facettes planes. L'opérateur doit définir ces pyramides selon les contraintes de l'articulation utilisée. Pour cela on définit un repère $(A_i, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r, \mathbf{z}_r)$ lié à la pyramide, de sommet A_i (figure ??). Chacune des n facettes est définie complètement par le vecteur normal \mathbf{n}_i à la facette.

6.4.2.2.2 Positions admissibles des points de la plate-forme

Supposons que l'analyse du robot parallèle ait permis d'établir que les contraintes articulaires imposent aux points B_i de se trouver dans un volume \mathcal{V}_a . L'intersection de ce volume avec la pyramide définit alors le volume permis pour le point B_i lorsque l'on prend en compte à la fois les contraintes articulaires et les contraintes sur les articulations passives. Si l'on s'intéresse seulement à des coupes de l'espace de travail il faudra d'abord calculer l'intersection \mathcal{P}_a de \mathcal{V}_a avec le plan de coupe puis l'intersection \mathcal{P}_p de la pyramide avec le plan de coupe (c'est-à-dire un polygone). La région permise pour le point B_i est

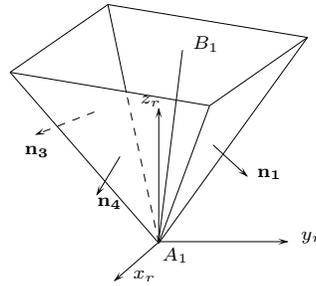


Figure 6.19: La définition d'une pyramide modélisant les contraintes sur l'articulation en A_1 . La pyramide possède ici 4 facettes définies par les vecteurs normaux \mathbf{n}_i . Si les contraintes sur l'articulation sont satisfaites le segment A_1B_1 doit être contenu à l'intérieur de la pyramide.

alors l'intersection de \mathcal{P}_a avec \mathcal{P}_p . Après avoir déterminé les zones permises pour les B_i on obtient par simple translation les zones permises pour le point C , l'espace de travail étant alors l'intersection de ces zones. Par exemple pour un robot général nous avons vu que les zones \mathcal{P}_a sont des couronnes annulaires. L'intersection de \mathcal{P}_a avec \mathcal{P}_p va donc donner un objet géométrique dont la frontière sera composée d'une succession de segments et d'arcs de cercle que l'on appelle usuellement *polygone généralisé*. L'espace de travail est alors obtenu comme intersection de 6 polygones généralisés, ce qui est facilement calculable [296]. La figure ?? montre en 3D les contraintes sur la position des B_i imposées par les conditions sur les longueurs et par celles sur les articulations de base.

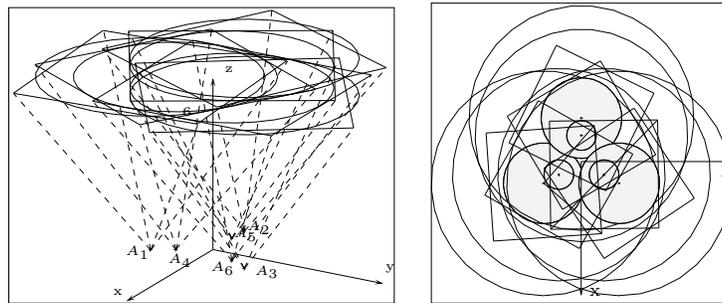


Figure 6.20: A gauche vue 3D de l'ensemble des zones permises pour les points B_i . Les pyramides sont en pointillé. A droite les contraintes vue de dessus : les cercles correspondent aux cercles externes, les cercles grisés aux cercles internes et les carrés aux zones dues aux contraintes sur les articulations de base.

La figure ?? montre l'influence importante des débattements des articulations passives : on y a tracé le volume de l'espace de travail de la «main gauche» INRIA en fonction de la course des actionneurs avec et sans

prise en compte des débattements des articulations passives.

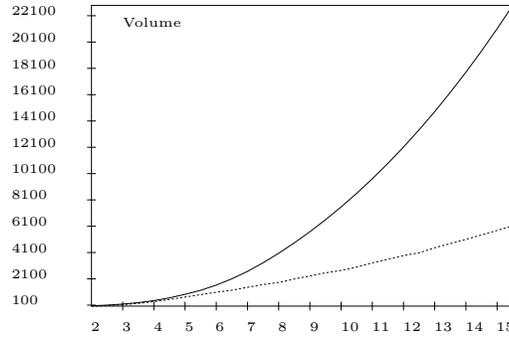


Figure 6.21: *En traits fins le volume de l'espace de travail en fonction de la course sans prendre en compte les contraintes sur les articulations. En pointillé le même volume lorsque les contraintes sur les articulations sont modélisées par une pyramide à 4 faces faisant un angle de 30 degrés avec la verticale.*

6.4.2.2.3 Contraintes sur les articulations de la plate-forme mobile

Pour ce qui concerne les contraintes sur les articulations du mobile on adopte le même modèle que celui utilisé pour les articulations de la base. On peut ainsi définir une pyramide P_i de sommet B_i telle que si les contraintes sur l'articulation sont satisfaites le segment attaché au point B_i se trouve à l'intérieur de la pyramide. On peut définir alors une pyramide équivalente à P_i ,

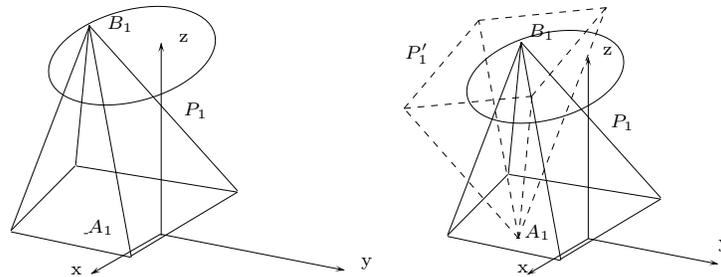


Figure 6.22: *A gauche, définition de la pyramide caractérisant les contraintes sur l'articulation du plateau mobile. Le point A_1 se trouve à l'intérieur de la pyramide si les contraintes sont satisfaites. A droite, définition de la pyramide équivalente (en pointillé).*

P'_i , de sommet A_i tel que si A_i est à l'intérieur de P_i alors B_i est à l'intérieur de P'_i (figure ??). On se ramène ainsi au cas d'une articulation en A_i .

6.4.2.2.4 Exemples

Dans un prototype de robot développé au MEL de Tsukuba par Arai [13] les articulations en A_i se trouvent en dessous du plateau de base, les segments émergeant d'un orifice carré (figure ??). On peut donc modéliser les contraintes sur ces

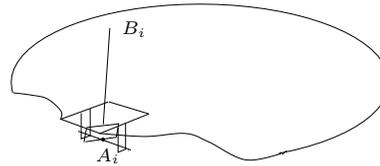


Figure 6.23: Les articulations de base du prototype de Arai se trouvent en dessous du plateau de base et les segments débouchent par un orifice carré.

articulations par des pyramides à 4 faces orientées vers le centre de la base. Nous présentons ici des vues de l'espace de travail avec prise en compte seulement des limitations articulaires, puis, pour les mêmes orientations, avec prise en compte des contraintes sur les articulations. On peut constater que les contraintes sur les articulations influent sensiblement sur l'espace de travail (figures ??) puisque le volume de travail diminue d'un facteur sensiblement égal à 6.

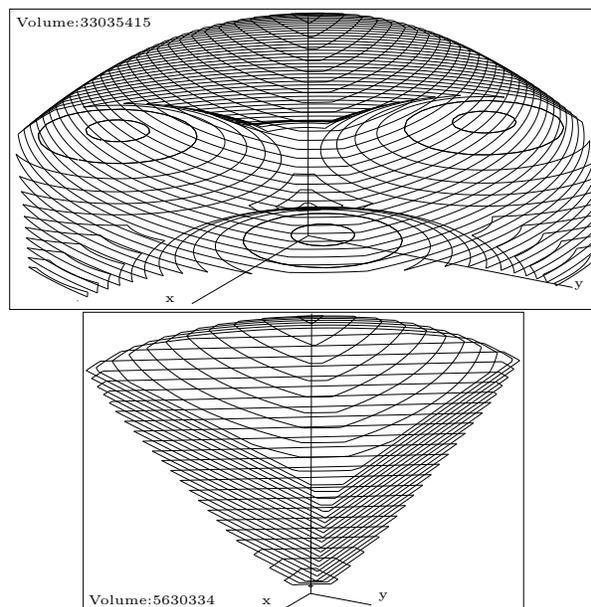


Figure 6.24: Vue perspective de l'espace de travail du prototype d'Arai, orientation $\psi = \theta = \phi = 0^\circ$. En haut les contraintes sont les longueurs des segments, en bas on a pris en compte les débattements des articulations passives.

6.4.2.3. Prise en compte des intersections entre segments

Les résultats présentés dans la section précédente permettent d'établir la zone de travail \mathbf{W} en prenant en compte les contraintes articulaires et les contraintes sur les articulations. Le dernier facteur limitatif pour l'espace de travail est le risque d'intersection entre les segments. Cette notion est très dépendante de l'architecture du robot. Nous allons donc nous limiter au cas du robot général.

6.4.2.3.1 Notion de distance entre segment

Notre but est de rechercher les lieux de l'espace de travail tels que la distance minimum entre tous les points des couples de segment soit égale à une constante d non nulle appelée *distance de sécurité*, dont on supposera, pour des raisons évidentes qu'elle est inférieure au minimum des distances entre les paires (A_i, A_j) , (B_i, B_j) des couples de segment i, j considérés. La distance de sécurité a une valeur qui est associée au couple choisi de segments. Par la suite nous considérons le couple particulier de segment 1, 2 pour illustrer notre propos. Une telle approche permettra de traiter le cas des intersections entre segments de type cylindrique en imposant comme distance de sécurité pour la recherche de l'intersection entre deux segments la somme des rayons de chacun des segments. On dira que tous les segments sont à la distance de sécurité d pour exprimer que la distance entre tous les couples de segments est au moins égale à leur distance de sécurité. La distance entre les segments est obtenue de la manière suivante (figure ??) :

- si deux points de la perpendiculaire commune aux droites associées aux segments sont sur les segments la distance est la distance entre les droites.
- sinon soient les projections des points A_1, B_1 sur la droite 2 et les projections des points A_2, B_2 sur la droite 1. On considère seulement les points dont la projection appartient au segment associé à la droite. Si l'ensemble de ces points est non vide la distance d est alors le minimum des distances de ces points au droite, sinon la distance d est définie comme le minimum des distances entre les points A_1, B_1, A_2, B_2 .

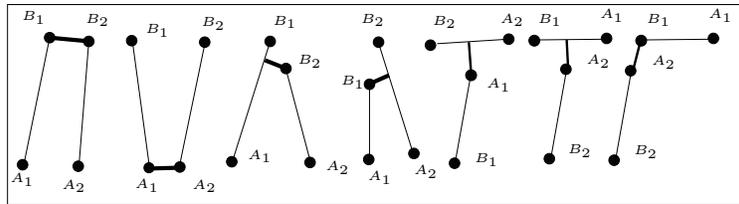


Figure 6.25: *En trait épais la distance minimale entre deux segments.*

Il est aisé de montrer que la distance ainsi définie correspond bien au minimum des distances entre tout couple de points appartenant aux segments 1 et 2.

6.4.2.3.2 Calcul des lieux d'intersection entre segments

En utilisant la notion de distance entre segments on peut déterminer les lieux de C où la distance entre une paire de segments est égale à la distance de sécurité. Dans le cas où l'on se limite à des coupes horizontales de l'espace de travail il apparaît que ces lieux sont des coniques qui vont partager le plan en zones où la distance entre les segments est soit inférieure soit supérieure à la distance de sécurité [296]. Il suffit alors de calculer pour chaque paire de segments les zones où la distance entre les segments est supérieur à la distance de sécurité et de calculer l'intersection de ces zones pour obtenir l'espace de travail avec prise en compte des intersections entre segments. La figure ?? présente quelques cas de détermination de l'espace de travail sans et avec contrainte sur les articulations de base ainsi que sans et avec prise en compte des intersections entre segments. Le temps de calcul de l'espace de travail est de l'ordre de 120 ms.

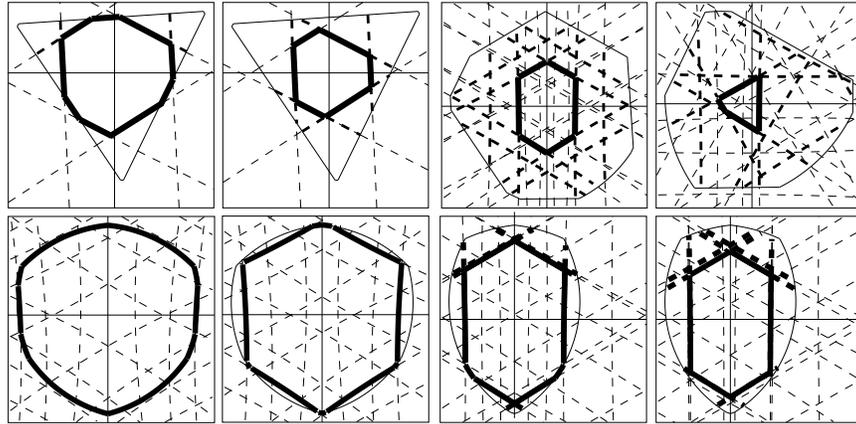


Figure 6.26: Détermination d'espace de travail. Les coniques intervenant dans les distances entre segments sont en pointillé. L'espace de travail sans (avec) prise en compte des intersections entre segments est en trait fin (épais).

6.4.3. Espace de travail à centre fixé

Il existe très peu de travaux dans la littérature sur le calcul des possibilités en rotation des robots parallèles. Des méthodes reposant sur une technique de discrétisation pour calculer les variations angulaires possibles ont été proposées [35] mais la représentation des résultats n'est guère satisfaisante. Bénée [32] utilise aussi une méthode de discrétisation mais utilise une représentation sphérique où les angles d'Euler ψ, θ sont la longitude et la latitude et le rayon est proportionnel à l'angle ϕ . Romdhane [382] a proposé une méthode géométrique pour le MSSM, mais dont la généralisation paraît délicate.

Dans cette partie nous supposons que le point C d'un robot général est fixe dans le repère de référence et on s'intéresse aux rotations de l'organe terminal autour de ce point. La représentation de l'orientation d'un corps est chose difficile : celle utilisant des valeurs d'angle est peu parlante et nous avons donc choisi un autre mode de représentation. Nous considérons un segment CN_e de longueur unité lié au plateau mobile dont une extrémité est le centre de la rotation du plateau mobile. Lorsque le plateau mobile tourne autour du centre de rotation l'extrémité N_e du segment se déplace sur la sphère centrée en C , de rayon unité, que nous appellerons la *sphère unité*. Ces déplacements caractérisent les rotations de la plate-forme hormis celle correspondant à la rotation autour du segment lui-même. En représentant les régions de la sphère unité dans lesquelles peut se trouver l'extrémité du segment on caractérise deux degrés de liberté en rotation du manipulateur. En choisissant convenablement la direction du segment on peut obtenir l'ensemble des rotations permises pour l'organe terminal. Notons qu'une telle représentation a aussi été adoptée par Takeda [435] pour illustrer l'espace de travail d'un robot de type sphérique où typiquement il n'y a que des rotations de l'organe terminal.

Nous supposons d'abord que le plateau mobile tourne d'un angle θ_1 autour d'un vecteur \mathbf{X}_1 fixé dans le repère de référence. Une fois le plateau dans cette position on s'intéresse au rotation possible autour d'un vecteur \mathbf{X}_2 exprimé dans le repère de référence. Si le manipulateur n'est soumis à aucune contrainte l'extrémité N_e décrit sur la sphère unité, pour une valeur fixée de θ_1 , un cercle C_e (figure ??). En fait les contraintes sur le manipulateur vont faire que seule

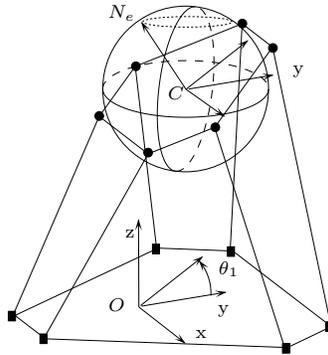


Figure 6.27: *Un exemple de calcul d'orientation. Le plateau mobile tourne d'abord autour de l'axe x d'un angle θ_1 . Dans cette position lorsque le plateau tourne autour de l'axe z , N_e décrit sur la sphère unité un cercle (l'ellipse en trait pointillé). Ici nous avons $\mathbf{X}_1 = [1, 0, 0]$, $\mathbf{X}_2 = [0, 0, 1]$.*

certaines parties de ce cercle pourront être occupées par N_e . Le but de notre algorithme est justement de calculer quelles sont ces parties. En faisant varier de manière discrète l'angle θ_1 on balayera la sphère unité et l'on obtiendra les régions possibles pour N_e sur la sphère unité.

Notons cependant que l'on devra couper l'intervalle de variation de θ_1 en deux parties puisqu'il existe deux angles θ_1 pour lesquelles le point N_e décrit le même cercle. Ainsi si le segment CN_e est selon la normale au plateau mobile et que le vecteur \mathbf{X}_1 est selon l'axe x , des rotations d'angle θ_1 et $-\theta_1$ conduiront au même cercle d'évolution pour N_e .

Nous avons décrit dans [298] une méthode permettant de calculer les arcs valides pour chaque cercle correspondant à une valeur fixée de θ_1 . Cette méthode permet de prendre en compte l'ensemble des contraintes. A partir des arcs obtenus pour chacun des cercles on peut construire la région permise pour N_e , comme présenté dans les figures ??,??,??,??.

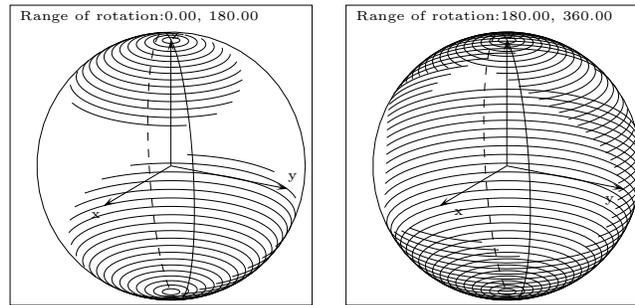


Figure 6.28: Sur la sphère unité en trait fin les zones permises pour l'extrémité de la normale au plateau mobile, pour des rotations autour de l'axe x dans l'intervalle $[0-2\pi]$ suivie de rotation autour de l'axe z . Les contraintes portent sur les longueurs des segments.

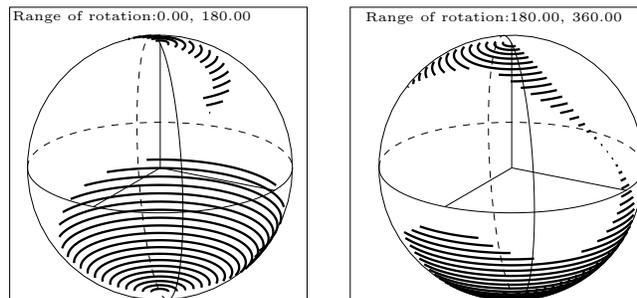


Figure 6.29: Sur la sphère unité en trait fin les zones permises pour la normale au plateau mobile pour des rotations autour de l'axe x dans l'intervalle $[0-2\pi]$ suivie de rotation autour de l'axe z . Les contraintes sont les longueurs des segments et des limites sur les débattements des articulations de la base.

Le temps de calcul est de l'ordre de 400 ms si l'on prend en compte que les contraintes articulaires, 1000 ms si l'on rajoute des contraintes articulaires sous la forme de pyramides à 4 faces et 70 secondes si l'on prend en compte en

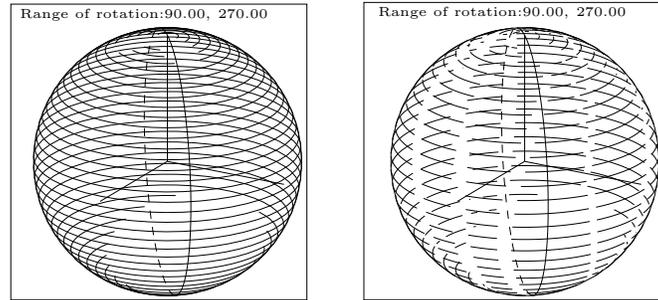


Figure 6.30: *Les zones permises pour l'axe $-y_r$ du plateau mobile pour les rotations autour de l'axe x dans l'intervalle $[\pi/2-3\pi/2]$ suivie de rotation autour de l'axe z . A gauche on n'a pris en compte que les contraintes sur les longueurs de segment et à droite on a pris en compte les intersections entre segment : on voit clairement que des rotations permises du point de vue des longueurs sur les segments sont en fait impossibles en raison des intersections entre segments.*
plus les intersections entre segment, ceci pour calculer 30 coupes.

6.4.4. Espace dextre

La détermination de l'espace dextre peut se faire avec le même type d'algorithme que pour les robots plans. Soit un point de l'espace dextre C_1 : les points B_i peuvent donc se trouver en n'importe quelle position sur la sphère de centre C_1 et de rayon $\|\mathbf{CB}_i\|$. Les positions admissibles de C , si elles existent, en prenant en compte les contraintes sur le segment i sont donc dans la couronne sphérique CS_i dont la frontière extérieure est la sphère de centre A_i et de rayon $\rho_{i_{max}} - \|\mathbf{CB}_i\|$ et la frontière intérieure la sphère de centre A_i et de rayon $\rho_{i_{min}} + \|\mathbf{CB}_i\|$ (figure ??). L'espace dextre est alors l'intersection, si elle existe, des 6 zones CS_i . On pourrait clairement considérer dans cet algorithme les contraintes sur les articulations, les zones à intersecter étant alors les intersections des couronnes sphériques avec les pyramides. Le temps de calcul de l'espace dextre est de l'ordre de 500 ms.

6.4.5. Espace maximal

Pooran [363] a proposé une méthode reposant sur la discrétisation pour déterminer les lieux de C atteignable pour au moins une orientation autour d'un axe (les deux autres angles d'orientation sont fixés). L'idée est de déterminer la sphère maximale qui contient l'espace de travail puis d'éliminer sur cette sphère les portions qui ne font pas partie de l'espace de travail en faisant des tests en divers points de la sphère. Puis l'on recommence avec une sphère de rayon inférieur jusqu'à la sphère de rayon nul. Luh [266] utilise une autre approche : les contraintes sont regroupées dans un système d'équations (les inégalités sont

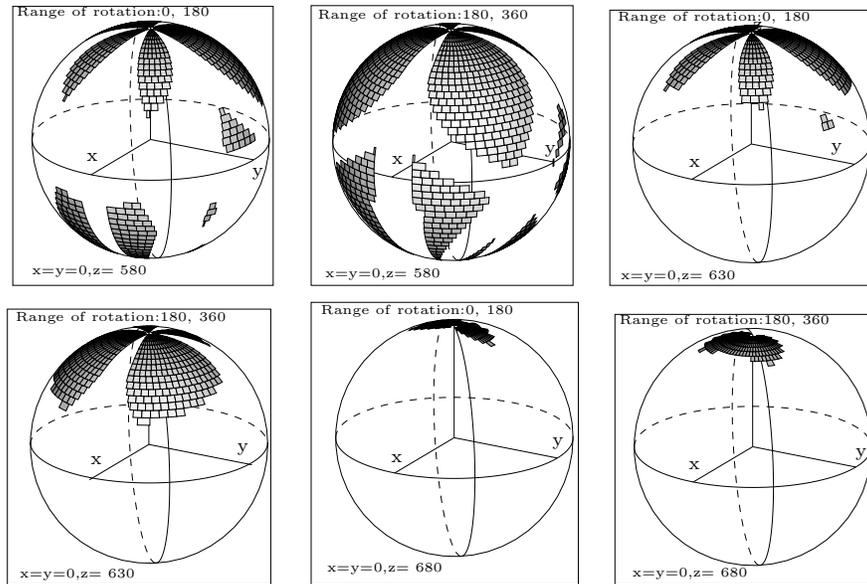


Figure 6.31: Espace de travail en orientation. Représentation des zones permises pour l'extrémité de la normale du plateau mobile pour des rotations autour de l'axe x suivie de rotation autour de l'axe z . Les contraintes sont les longueurs des segments, les contraintes sur les articulations de la base et la non intersection des segments.

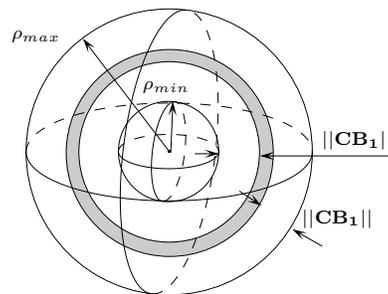


Figure 6.32: La zone droite permise pour C en ne prenant en compte que les contraintes sur le segment i .

transformées en égalités à l'aide de variables supplémentaires). La frontière de l'espace maximal est le lieu des points où la matrice jacobienne du système est dégénérée. Luh utilise alors un algorithme numérique pour suivre les composantes de la frontière en gérant le problème des points et branches multiples. A ce jour il n'existe pas de méthode géométrique connue pour la détermination de l'espace maximal d'un robot à 6 degrés de liberté.

6.5. Vérification de trajectoire

Il existe peu, à notre connaissance, de travaux dans la littérature concernant le problème de la planification et de la vérification de trajectoire d'un robot parallèle. Nguyen [328] a abordé le problème de la réalisation d'une trajectoire mais uniquement du point de vue de la commande alors que Nenchev [325] s'est penché sur celui de la commande au voisinage de singularités. Harris [157] s'est intéressé à la planification pour relier une posture d'un robot général à une autre en recherchant les paramètres du mouvement de vissage reliant les deux postures en estimant que ce mouvement serait celui qui minimiserait les changements de longueur des segments. On peut aussi mentionner l'utilisation du nombre de condition pour gérer la trajectoire d'un robot parallèle qui est redondant par rapport à la tâche à exécuter. Ainsi Gosselin et Angeles [128] présente un algorithme pour trouver l'orientation du robot telle qu'il présente la meilleure précision en des points de passage définis en cartésien : cette méthode est illustrée sur un robot plan et un robot sphérique.

Nous allons poser le problème de la planification de trajectoire pour un robot parallèle comme celui de la détermination d'une trajectoire entre deux positions appartenant à l'espace de travail, telle que chaque point de la trajectoire se trouve à l'intérieur de l'espace de travail.

Pour ce problème une pierre de base est évidemment un algorithme permettant de vérifier que la trajectoire en ligne droite dans l'espace des coordonnées généralisées est ou non une trajectoire satisfaisante. Nous allons étudier ce problème en deux étapes, d'abord en supposant que l'orientation est constante le long de la trajectoire puis en généralisant l'algorithme au cas avec changement d'orientation. On se limitera ici au cas du robot général³.

6.5.1. Trajectoire à orientation constante

Soit M_1, M_2 les points de départ et d'arrivée de la trajectoire à tester et soit C un point de la trajectoire. On a :

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OM}_1 + \lambda \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \quad \text{avec } \lambda \in [0, 1] \quad (6.15)$$

³Les algorithmes décrits dans cette section sont intégrés dans le programme de calcul de l'espace de travail disponible par ftp anonyme, répertoire `prisme/Workspace/Gough`

6.5.1.1. Prise en compte des limites sur les longueurs des segments

Calculons la longueur d'un segment pour un point quelconque de la trajectoire entre M_1 et M_2 . On a :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AO} + \mathbf{OC} + \mathbf{CB} \quad (6.16)$$

où $\mathbf{CB} = R\mathbf{CB}_r$ est un vecteur constant. La longueur ρ d'un segment est donc :

$$\rho^2 = \|\mathbf{AO}\|^2 + \|\mathbf{OC}\|^2 + \|\mathbf{CB}\|^2 + 2(\mathbf{AO} + \mathbf{CB}) \cdot \mathbf{OC} + 2\mathbf{OA} \cdot \mathbf{CB} \quad (6.17)$$

En utilisant l'équation (??) on obtient :

$$\rho^2 = \lambda^2 \|\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\|^2 + 2\lambda(\mathbf{AM}_1 + \mathbf{CB}) \cdot \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 + \|\mathbf{AM}_1 + \mathbf{CB}\|^2 \quad (6.18)$$

Soit une équation du type :

$$\rho^2 = a\lambda^2 + b\lambda + c \quad (6.19)$$

où a, b, c sont des coefficients qui ne dépendent que de la trajectoire et de la géométrie du robot :

$$a = \|\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\|^2 \quad (6.20)$$

$$b = 2(\mathbf{AM}_1 + \mathbf{CB}) \cdot \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \quad (6.21)$$

$$c = \|\mathbf{AM}_1 + \mathbf{CB}\|^2 \quad (6.22)$$

Remarquons que nous avons $a > 0, c > 0, a + b + c > 0$. Intéressons nous à l'équation :

$$a\lambda^2 + b\lambda + c - \rho_{max}^2 = 0 \quad (6.23)$$

Si cette équation n'a pas de racine et puisque $a > 0$ alors pour tout λ l'équation est positive et la longueur du segment en tout point de la trajectoire est supérieure à la longueur maximum.

Admettons maintenant que l'équation ait deux racines x_1, x_2 classées par ordre croissant. Puisque $a > 0$ l'équation sera positive dans les intervalles $]-\infty, x_1[,]x_2, +\infty[$. L'intersection de ces intervalles avec l'intervalle $[0, 1]$ donnera les intervalles de λ (c'est-à-dire les portions de trajectoire) où la longueur du segment sera supérieure à la longueur maximum.

En répétant cet algorithme pour les 6 segments et en faisant l'union des intervalles obtenus on obtiendra les portions de trajectoire où au moins un des segments dépasse sa longueur maximum. Intéressons nous maintenant à l'équation :

$$a\lambda^2 + b\lambda + c - \rho_{min}^2 = 0 \quad (6.24)$$

Si cette équation n'a pas de racine et puisque $a > 0$ alors pour tout λ l'équation est positive et la longueur du segment en tout point de la trajectoire est supérieure à la longueur minimum.

Admettons maintenant que l'équation ait deux racines x_1, x_2 classées par ordre croissant. Puisque $a > 0$ l'équation sera négative dans l'intervalle $]x_1, x_2[$ et l'intersection de cette intervalle avec l'intervalle $[0, 1]$ donnera l'intervalle où la longueur du segment sera inférieure à la longueur minimum.

En répétant cet algorithme pour les 6 segments et en faisant l'union des intervalles obtenus on obtiendra les portions de trajectoire où au moins un des segments a une longueur inférieure à sa longueur minimum.

Une analyse plus poussée de ces équations permet d'obtenir des règles simplificatrices qui permettent parfois de statuer directement sur la nature de la trajectoire sans passer par l'analyse des intervalles (cf. exercice et [295]). Il est aussi possible de déterminer les modifications à apporter aux longueurs extrêmes des segments pour qu'un segment soit inclus dans l'espace de travail et ceci sera en général vrai pour l'ensemble des contraintes que nous considérons [295].

6.5.1.2. Contraintes sur les articulations

Nous supposons comme dans la section consacrée au calcul de l'espace de travail que les restrictions sur les débattements des articulations de la base peuvent être modélisées par une pyramide à faces planes dont le centre est le point A_i . En ce qui concerne les contraintes sur les articulations du mobile on adopte le même modèle que celui utilisé pour les articulations de la base avec la notion de pyramide équivalente.

Soit \mathbf{n}_i la normale extérieure à la facette i de la pyramide associée à l'articulation placée en A . Si le point B est bien placé à l'intérieur de la pyramide par rapport à la facette i on doit avoir :

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{n}_i \leq 0 \quad (6.25)$$

En utilisant l'équation (??) on obtient :

$$\lambda \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{n}_i + (\mathbf{OM}_1 + \mathbf{AO} + \mathbf{CB}) \cdot \mathbf{n}_i \leq 0 \quad (6.26)$$

Soit une équation du type :

$$\lambda a_1 + b_1 \leq 0 \quad (6.27)$$

où a_1, b_1 ne dépendent que de la géométrie et de la trajectoire. Si $a_1 > 0$ cette inégalité ne sera pas satisfaite si $\lambda \in]-b_1/a_1, +\infty[$ alors que pour $a_1 < 0$ on devra avoir $\lambda \in]-\infty, -b_1/a_1[$.

L'intersection de l'intervalle obtenu avec l'intervalle $[0, 1]$ donnera les portions de trajectoire où la contrainte sur les articulations de base n'est pas respectée. Cet algorithme devra être utilisé pour chaque facette de chaque pyramide associée aux articulations et l'union des intervalles obtenues décrira les portions de trajectoire où au moins une des contraintes sur les articulations ne sera pas respectée. La même procédure sera utilisée avec les pyramides

équivalentes et l'on obtiendra ainsi les intervalles où les contraintes sur les articulations du plateau mobile ne sont pas satisfaites.

Pour conclure, avant de passer à des exemples, mentionnons que la prise en compte des intersections entre segments, sous les mêmes hypothèses que pour le calcul de l'espace de travail, est tout à fait possible.

6.5.1.3. Temps de calcul

Le temps de calcul nécessaire à la vérification d'une trajectoire vis-à-vis des contraintes sur les longueurs des segments est inférieur à 2 ms. Si en plus des longueurs on vérifie l'intersection entre toutes les paires de segments on obtient un temps de calcul de l'ordre de 25 ms. Si l'on suppose que les articulations de la base ont des débattements que l'on peut modéliser par des pyramides à 4 facettes on obtient pour une vérification des longueurs combinée à une vérification des contraintes sur les articulations un temps de calcul de l'ordre de 9 ms. Enfin pour l'ensemble des contraintes le temps de vérification est de l'ordre de 29 ms. On peut estimer qu'un tel temps de calcul permet d'envisager l'utilisation en temps réel de la méthode. Les figures ??,?? montrent pour le robot d'Arai quelques trajectoires où sont déterminées les portions interdites.

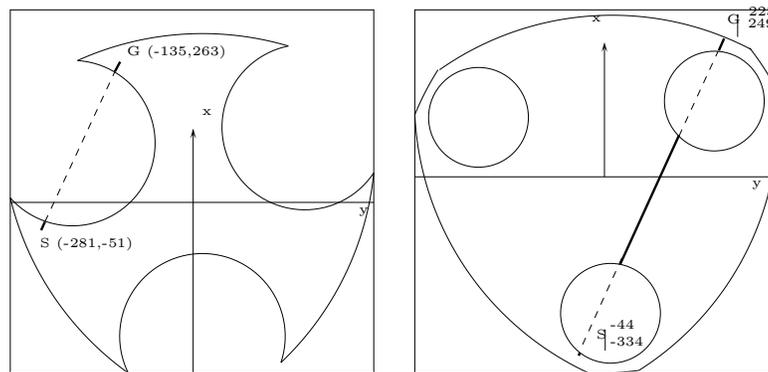


Figure 6.33: Exemples de test de trajectoire : les portions interdites sont en pointillé et les portions permises en trait épais.

6.5.2. Trajectoire à orientation non constante

L'intérêt de l'étude des trajectoires à orientation constante est que les contraintes s'expriment toutes sous la forme d'équations algébriques dans le paramètre λ décrivant chaque point de la trajectoire. Si l'on introduit maintenant les orientations nous n'obtenons évidemment plus d'équations algébriques en raison de la présence des termes de la matrice de rotation qui contiennent des sinus et des cosinus.

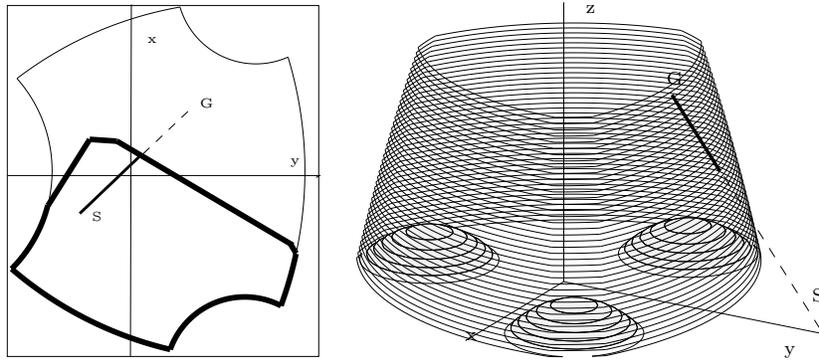


Figure 6.34: Exemples de test de trajectoire : à gauche la frontière de l'espace de travail où il n'y a pas intersection entre des segments est en trait épais. Les portions interdites sont en pointillé et les portions permises en trait épais.

Pour se ramener à des équations algébriques nous allons découper la trajectoire en tronçons de manière à ce que le changement d'orientation de l'organe terminal entre les deux points extrêmes du tronçon soit faible. Notons M_1, M_2 les points extrêmes du tronçon considéré, ψ_1, θ_1, ϕ_1 les angles d'Euler décrivant l'orientation de l'organe terminal au point M_1 et ψ_2, θ_2, ϕ_2 ceux décrivant l'orientation au point M_2 . Entre les points M_1 et M_2 la position du point C est telle que :

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OM}_1 + \lambda \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \quad (6.28)$$

avec λ compris dans $[0,1]$. La matrice de rotation intervient dans le calcul des composantes du vecteur \mathbf{CB} qui va être approximé soit au premier soit au second ordre. En utilisant une approximation au premier ordre on a :

$$\mathbf{CB}(\psi, \theta, \phi) = \mathbf{CB}(\psi_1, \theta_1, \phi_1) + \lambda \mathbf{U}_1 \quad (6.29)$$

alors qu'au second ordre on a :

$$\mathbf{CB}(\psi, \theta, \phi) = \mathbf{CB}(\psi_1, \theta_1, \phi_1) + \lambda \mathbf{U}_1 + \lambda^2 \mathbf{U}_2 \quad (6.30)$$

où $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ ne dépendent que des angles $\psi_1, \theta_1, \phi_1, \psi_2, \theta_2, \phi_2$. On peut maintenant étudier les diverses contraintes. Nous allons procéder à l'analyse des contraintes sur un tronçon et l'analyse de la trajectoire complète consistera à examiner successivement chacun des tronçons de la trajectoire.

6.5.2.1. Prise en compte des limites sur les longueurs des segments

Calculons la longueur d'un segment pour un point quelconque de la trajectoire entre M_1 et M_2 . En utilisant l'équation (??) et une approximation au second

ordre (??) on obtient une équation du type :

$$P_\rho(\lambda) = \rho^2 = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \quad (6.31)$$

où les a_i sont des coefficients qui ne dépendent que de la trajectoire et de la géométrie du robot. De la même manière que dans le cas à orientation constante l'étude des polynômes $P_\rho(\lambda) - \rho_{max}^2, P_\rho(\lambda) - \rho_{min}^2$ permet de déterminer les intervalles pour λ contenus dans $[0,1]$ où la longueur des segments est supérieure à la longueur maximum ou inférieure à la longueur minimum.

6.5.2.2. Contraintes sur les articulations

Soit \mathbf{n}_i la normale extérieure à la facette i de la pyramide associée à l'articulation placée en A . Si le point B est bien placé à l'intérieur de la pyramide par rapport à la facette i on doit avoir :

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{n}_i \leq 0 \quad (6.32)$$

L'expérience a montré que l'approximation au premier ordre de la matrice de rotation pouvait parfois être insuffisante pour certains cas limites. En conséquence on utilise une approximation au deuxième ordre. En utilisant les équations (??),(??) on obtient :

$$\lambda^2 \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_i + \lambda (\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 + \mathbf{U}_1) \cdot \mathbf{n}_i + (\mathbf{OM}_1 + \mathbf{AO} + \mathbf{CB}(\psi_1, \theta_1, \phi_1)) \cdot \mathbf{n}_i \leq 0 \quad (6.33)$$

Soit une équation du type :

$$a\lambda^2 + b\lambda + c \leq 0 \quad (6.34)$$

L'étude de ce polynôme permet alors de déterminer les intervalles pour λ où le segment est à l'extérieur par rapport à la facette i de la pyramide. En considérant l'ensemble des facettes de l'ensemble des pyramides on obtient ainsi les portions du tronçon pour lesquelles les contraintes sur les articulations ne sont pas respectées. Mentionnons que la vérification de la trajectoire vis-à-vis des intersections entre segments est aussi relativement simple.

6.5.2.3. Temps de calcul et exemple

Le temps de calcul de la vérification d'une trajectoire est bien sûr dépendant du nombre de tronçons dont elle est constituée. Dans notre implantation ce nombre de tronçon est obtenu en considérant la variable angulaire subissant la plus forte variation et en divisant cette variation par un nombre fixe (5° dans notre implantation). La valeur entière supérieure du résultat est alors prise comme nombre de tronçons.

Si l'on ne prend en compte que les contraintes sur les longueurs des segments le temps moyen de la vérification d'un tronçon est de l'ordre de 16 ms. En

considérant les intersections entre tous les couples de segments on trouve un temps moyen de 430 ms soit environ 27,6 ms par test de couple de segments. Avec des contraintes sur les longueurs de segments et des débattements limités sur les articulations de base (pyramide à 4 faces) on mesure un temps de calcul de 40 ms, soit environ 1 ms par face. En considérant l'ensemble des contraintes le temps de calcul s'établit alors à approximativement 450 ms par tronçon.

En conclusion on peut estimer que la vérification complète d'une trajectoire à orientation non constante demande un temps de calcul un peu trop grand pour être envisagé en temps réel mais étant donné les améliorations susceptibles d'être apportées à l'implantation une diminution sensible de ce temps peut être prévue. En tout état de cause cependant cette technique reste bien plus rapide et plus sûre qu'une méthode de discrétisation de la trajectoire. Un exemple est présenté en figure ??.

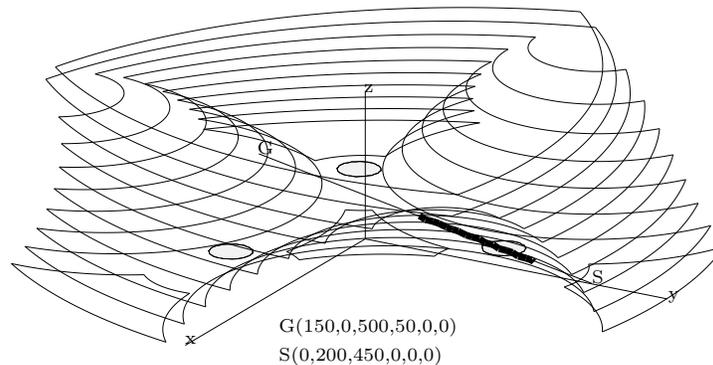


Figure 6.35: Un exemple de test de trajectoire à orientation non constante : les portions interdites sont en trait épais. Chacune des coupes correspond à une orientation intermédiaire entre celle du point but et du point de départ. Ici les contraintes ne portent que sur les longueurs des segments et les intersections entre segments. Les points d'arrivée et de départ sont dans l'espace de travail mais une partie de la trajectoire est interdite.

6.6. Planification de trajectoire

6.6.1. Introduction

A partir des sections précédentes nous disposons maintenant de l'outil de base pour tester une trajectoire entre deux points. On peut donc se préoccuper du problème de la planification de trajectoire. Dans un premier temps nous testons évidemment si les points de départ et d'arrivée sont dans l'espace de travail, puis, si c'est le cas, nous testons la ligne droite (dans l'espace des translations et des rotations) entre les deux points. Si cette trajectoire est satisfaisante on peut considérer le problème résolu. Nous nous plaçons donc dans le cas où on

ne peut aller en ligne droite d'un point à l'autre.

6.6.2. Planification dans un plan

6.6.2.1. Planification par découpage

Lorsque l'orientation des points de départ et d'arrivée est identique il est intéressant de rechercher si une trajectoire où l'orientation est maintenue constante est valide. Il se trouve que nous savons calculer des coupes de l'espace de travail à orientation constante. On va donc présenter des algorithmes permettant de découvrir une trajectoire à orientation constante avec les points de départ et d'arrivée dans un même plan.

Nous savons que l'espace de travail peut être constitué de différentes zones. On peut donc affiner notre test initial sur les points de départ et d'arrivée : si ces points ne font pas partie de la même zone aucune trajectoire dans le plan ne pourra être trouvée. Ce cas sera traité dans la section suivante et nous supposons donc que les points d'arrivée et de départ sont bien dans la même composante connexe de l'espace de travail. A partir de la connaissance de la coupe de l'espace de travail nous construisons un pavage de la coupe à l'aide de cellule carré dont la disposition est calculée à partir des bornes de l'espace de travail. Dans ce pavage nous repérons les cellules qui contiennent le point de départ et le point d'arrivée. On considère alors un graphe valué dont les nœuds sont les centres des cellules liés par des arcs aux nœuds voisins (8 en général, moins si la cellule est sur le bord du pavage). La valeur de l'arc joignant deux nœuds est la distance entre les nœuds si le nœud est dans l'espace de travail et que la ligne droite joignant les nœuds est à l'intérieur de l'espace de travail. Si une de ces deux conditions n'est pas satisfaite la valeur de l'arc est une valeur arbitrairement grande. On s'est donc ramené à la recherche d'un plus court chemin dans un graphe valué, problème pour lequel de nombreux algorithmes sont disponibles, en particulier le fameux algorithme A^* . Un algorithme de plus court chemin va donc fournir un chemin reliant le point de départ et d'arrivée qui passera par les centres des cellules (figure ??). En raison de la nature même du principe on peut remarquer le caractère chaotique du chemin trouvé, qui peut cependant être facilement lissé (figure ??).

La méthode de découpage a l'avantage d'être simple d'implantation mais pose un certain nombre de problèmes :

- on ne tient compte que très partiellement de la connaissance de la forme de l'espace de travail qui ne sert qu'à limiter le nombre de cellules créés et très sommairement à ajuster la taille des cellules.
- on ne peut garantir l'obtention d'une trajectoire. En effet la taille de la cellule peut faire que localement le pavage ne compte qu'une cellule dont le centre se trouve à l'extérieur de l'espace de travail. Aucune trajectoire nécessitant le passage par cette cellule ne pourra donc être trouvée.

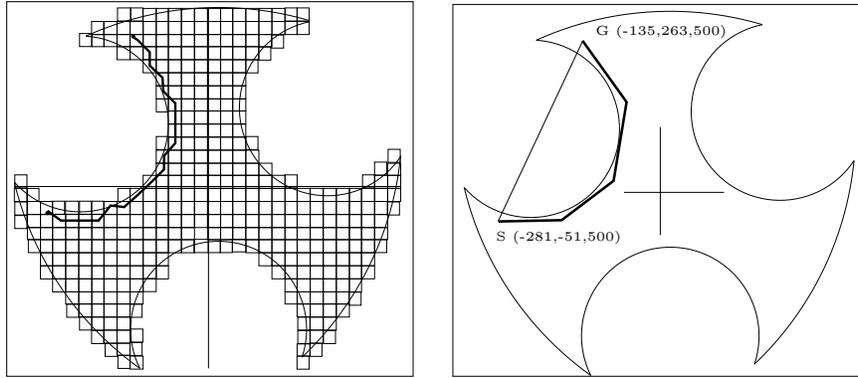


Figure 6.36: *A gauche un algorithme de type A^* permet de trouver un chemin reliant les points de départ et d'arrivée. A droite la trajectoire obtenue après lissage.*

6.6.2.2. Planification avec le graphe de visibilité

La frontière de l'espace de travail, lorsque l'on ne prend pas en compte les intersections entre segments, est constituée d'arcs de cercle et de segments, ce qui constitue un polygone généralisé au sens de Laumond [238].

On peut alors utiliser la méthode du graphe de visibilité pour trouver le chemin le plus court entre deux points [238]. Le graphe de visibilité G entre les deux points A, B est défini de la manière suivante :

- A, B et tous les sommets convexes de la frontière sont des nœuds de G .
- soit X, X' deux nœuds de G . Si le segment joignant X, X' est tout entier dans l'espace de travail et est tangent à la frontière de l'espace de travail alors il constitue une arête de G .
- Soit X un nœud et E' une arête circulaire de la frontière de l'espace de travail. S'il existe un point X' de E' tel que le segment XX' est à l'intérieur de l'espace de travail et que le segment est tangent à la frontière de l'espace de travail en X et X' alors le point X' est un nœud de G et le segment XX' est une arête de G .
- Soit E, E' deux arêtes circulaires de la frontière de l'espace de travail. S'il existe un point X de E et X' de E' tel que le segment XX' est à l'intérieur de l'espace de travail et que le segment est tangent à la frontière de l'espace de travail en X et X' alors X, X' sont des nœuds de G et le segment XX' en est une arête.
- chaque segment de la frontière de l'espace de travail reliant deux sommets convexe de la frontière est un arête de G .
- deux nœuds X, X' sur la même arête circulaire sont reliés par une arête

de G s'il n'y a pas d'autre nœud de G entre X et X' sur la même arête circulaire.

La figure ?? montre un exemple de graphe de visibilité. Le résultat principal à propos du graphe de visibilité est que s'il existe une trajectoire de A à B (qui sont des nœuds du graphe) alors il existe un chemin dans le graphe G entre ces deux nœuds et que si un plus court chemin existe alors il est contenu dans G . Un algorithme de type A^* peut être alors utilisé pour le trouver.

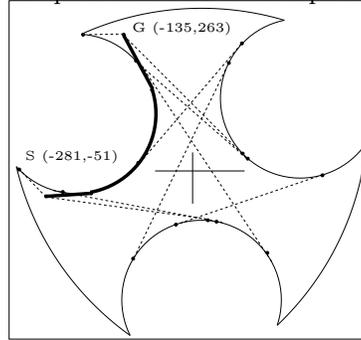


Figure 6.37: *Le graphe de visibilité en planification dans le plan. Une partie des arêtes du graphe sont indiquées en trait pointillé, la trajectoire en trait épais.*

6.6.3. Planification dans l'espace par découpage

La technique utilisée pour la planification dans le plan peut être étendue lorsque l'on planifie dans l'espace avec orientation constante ou non. Pour cela on calcule diverses coupes horizontales (si les orientations au point de départ et au point d'arrivée ne sont pas identiques l'orientation pour chaque coupe calculée est obtenue par interpolation linéaire) et l'on procède au découpage du volume obtenu à partir de cellules cubiques comme présenté dans la figure ?? . Un algorithme de plus court chemin de type A^* peut alors être utilisé. Un exemple de détermination de trajectoire est présenté en figure ?? . Bien entendu dans le cas spatial le nombre de cellules est beaucoup plus élevé que dans le cas plan et la recherche de trajectoire relativement coûteuse en temps calcul. Une telle méthode ne fonctionnera pas si les points de départ et d'arrivée sont dans un même plan horizontal avec des orientations différentes.

6.6.4. Planification de trajectoire des robots plans

L'espace de travail d'un robot parallèle plan peut aussi être représenté dans un espace x, y, θ . En effet nous savons construire l'espace à orientation fixée de notre manipulateur et nous pouvons discrétiser la variable θ pour obtenir différentes coupes de l'espace total. La figure ?? présente ainsi des vues 3D des

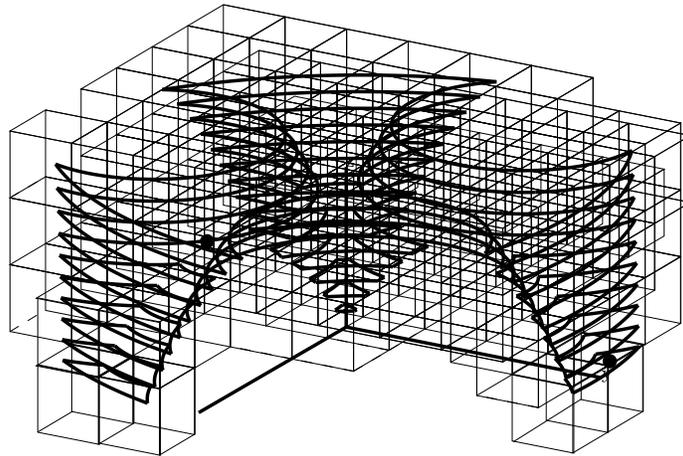


Figure 6.38: A partir de la connaissance de la frontière de coupes de l'espace de travail on peut construire un maillage total de l'espace à base de cellules cubiques. La frontière de l'espace de travail est en trait épais.

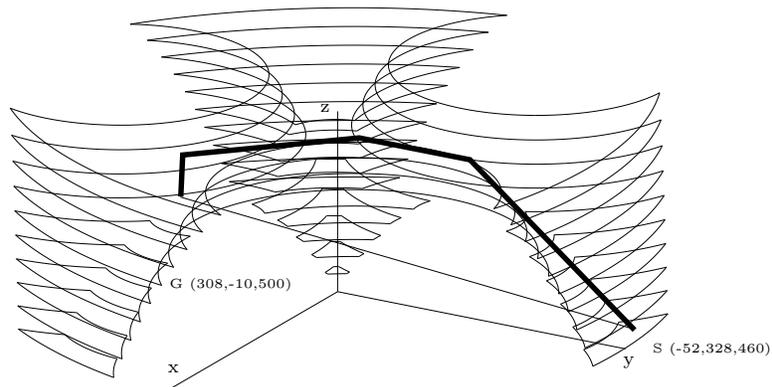


Figure 6.39: Une trajectoire obtenue à l'aide d'un algorithme de type A^* après lissage (en trait épais, vue perspective). La trajectoire directe (en trait fin) est partiellement en dehors de l'espace de travail

coupes à orientation fixée. Nous calculons ensuite une approximation polygo-

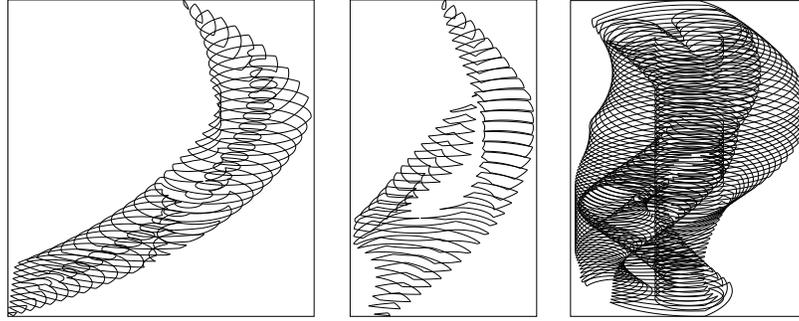


Figure 6.40: *Sections dans l'espace x, y, θ de l'espace atteignable pour le robot 1 pour différentes longueurs permises pour les segments. Chaque section horizontale correspond à un espace à orientation fixée.*

nale de chacune des coupes. À partir de ces approximations polygonales il est possible d'obtenir une représentation polyédrique de l'espace de travail en utilisant des techniques développées pour la robotique médicale [116]. La figure ?? présente un exemple d'une telle reconstruction. Il existe alors des techniques

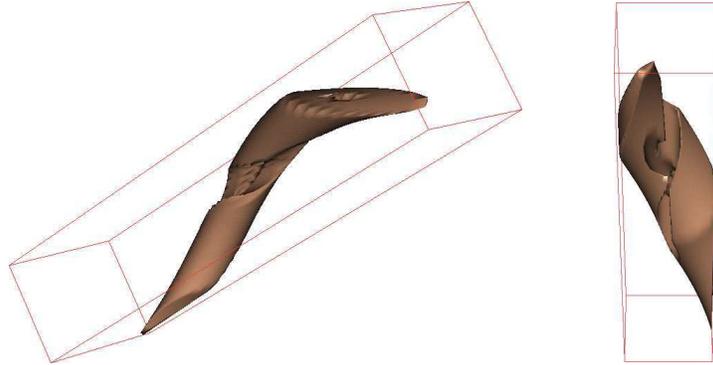


Figure 6.41: *Reconstruction 3D dans l'espace x, y, θ de l'espace de travail de robots parallèles plans.*

connues pour découvrir une approximation du plus court chemin joignant deux points arbitrairement choisis à l'intérieur de la reconstruction [116]. En effet la reconstruction 3D crée entre deux coupes successives un ensemble de tétraèdres qui constitue l'espace de travail. Les points de départ et d'arrivée sont à l'intérieur de certain tétraèdre de cette reconstruction. La génération de trajectoire consiste alors à chercher un plus court chemin joignant les points de

départ et d'arrivée passant par les centres des tétraèdres en utilisant un algorithme de type A^* . Après avoir obtenu ce chemin une phase de lissage permet de régulariser la trajectoire en joignant directement les points du graphe tels que le segment entre ces points est à l'intérieur de la reconstruction. Toutefois le fait que la trajectoire passe par les centres des tétraèdres ne permet pas de garantir que l'on obtient le plus court chemin possible. La figure ?? présente un exemple de trajectoire obtenue par cette méthode. L'intérêt de cette tech-

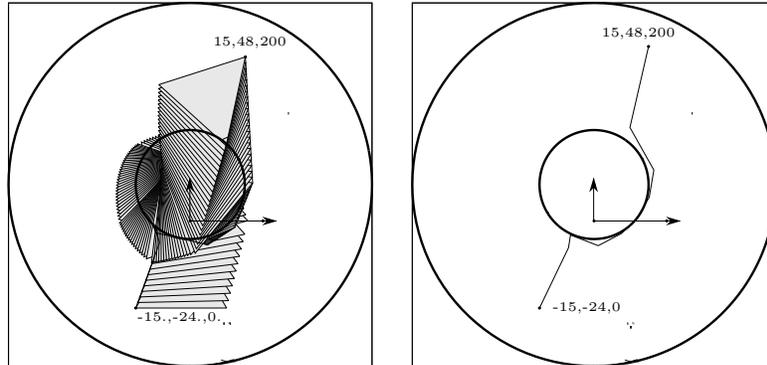


Figure 6.42: Une trajectoire obtenue en utilisant la reconstruction 3D dans l'espace x, y, θ de l'espace atteignable

nique est qu'elle permet de découvrir des trajectoires dont la loi d'orientation peut être quelconque. Pratiquement, on peut procéder à la reconstruction 3D une fois pour toute, puis l'utiliser par la suite pour la génération de n'importe quelle trajectoire (pour l'exemple de la figure on a utilisé 20 coupes et le temps de reconstruction est d'environ 13,2 s). Toutefois la détermination de la trajectoire reste coûteuse en temps de calcul, en particulier si la reconstruction 3D compte de nombreuses facettes en raison de la finesse de l'approximation polygonale des sections (dans l'exemple de la figure la trajectoire a été calculée en 2,65 s). La figure ?? présente une comparaison entre une trajectoire obtenue par discrétisation de l'espace maximal et une autre obtenue par la reconstruction 3D. Celle-ci présente une meilleure régularité mais est légèrement plus longue que la trajectoire obtenue par discrétisation.

6.7. Exercices

Exercice 6.1: Montrer comment on pourrait prendre en compte une limitation des rotations des articulations de la plate-forme mobile d'un robot plan de type 3 – RPR pour calculer son espace de travail à orientation constante.

Exercice 6.2: Décrire un algorithme permettant de calculer l'espace de tra-

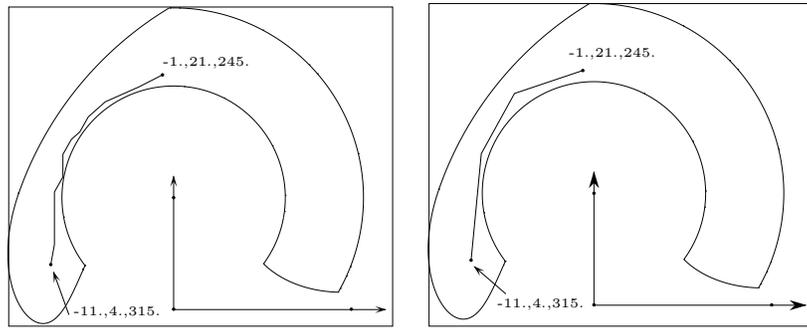


Figure 6.43: *Comparaison de trajectoires générées par discrétisation de l'espace maximal et reconstruction 3D. A gauche la trajectoire issue de la discrétisation (longueur : 21.89). A droite la trajectoire issue de la reconstruction 3D (longueur : 22.2).*

vail à orientation constante d'un robot plan de type 3-RRR.

Exercice 6.3: Décrire un algorithme permettant de calculer l'espace de travail à orientation constante d'un robot plan de type 3-PRR.

Exercice 6.4: Décrire un algorithme permettant de calculer l'espace de travail à centre fixé d'un robot plan de type 3-RRR.

Exercice 6.5: Décrire un algorithme permettant de calculer l'espace de travail à centre fixé d'un robot plan de type 3-PRR.

Exercice 6.6: Décrire un algorithme permettant de calculer l'espace de travail dextre d'un robot plan de type 3-RRR.

Exercice 6.7: Décrire un algorithme permettant de calculer l'espace de travail dextre d'un robot plan de type 3-PRR.

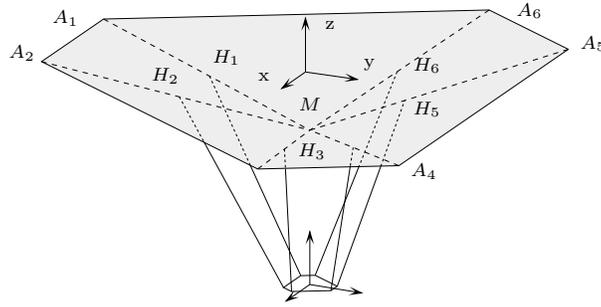
Exercice 6.8: Décrire un algorithme permettant de calculer l'espace de travail maximal (pour le point B_3) d'un robot plan de type 3-RRR.

Exercice 6.9: Décrire un algorithme pour calculer des coupes dans le plan z de l'espace de travail à orientation constante d'un robot de type «Hexa».

Exercice 6.10: Montrer comment on pourrait modifier l'algorithme de calcul des coupes à orientation constante du robot général pour l'adapter au cas du poignet actif en ne prenant en compte que les limitations sur les courses des vérins.

Exercice 6.11: Montrer comment on pourrait modifier l'algorithme de l'exercice précédent pour prendre en compte le fait que les cardans attachés au vérins ne permettent aux segments que d'être dans un cône d'angle au centre θ_m , avec $|\theta_m| < \frac{\pi}{2}$.

Exercice 6.12: On considère le robot présenté en figure ???. Un actionneur linéaire permet de déplacer le point H_i sur la barre A_iM qui a une direction fixe. La longueur des barres H_iB_i est constante. Décrivez un algorithme qui permet de calculer des coupes dans le plan z de l'espace de travail à orientation constante, étant données des limites sur la distance A_iH . En déduire que la

Figure 6.44: *Un robot parallèle*

frontière de l'espace de travail est constituée d'arcs de cercle et d'arcs d'ellipse.

Exercice 6.13: On suppose que le point C d'un robot général décrit un segment M_1M_2 , avec une orientation constante. Montrez que si au point M_1, M_2 la longueur des segments est inférieure à ρ_{max} alors elle restera inférieure à cette limite sur tout le segment. Établir le même résultat lorsque la limite est ρ_{min} .

Exercice 6.14: On considère un segment M_1M_2 décrit par le point C d'un robot général avec une orientation variable. Soit \mathbf{U}_2 l'approximation au second ordre de \mathbf{CB} et \mathbf{n}_i la normale à la facette d'une pyramide décrivant les contraintes sur l'articulation de la base. Montrez que si $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{n}_i \leq 0$ pour $C = M_1, M_2$ et que $\mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_i$ est positif alors $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{n}_i \leq 0$ pour tout point du segment.

Problème 6.1: Comment peut t'on modéliser les limites de débattement d'une rotule constituée d'un cardan monté sur une articulation rotoïde ?

Problème 6.2: Peut-on étendre la méthode de prise en compte des intersections entre segments pour des formes plus complexes (parallélépipèdes, formes composées) ?

Problème 6.3: Existe-t-il une méthode permettant de déterminer si une position fait partie de l'espace maximal d'un robot parallèle à 6 degrés de liberté (c'est-à-dire existe-t-il au moins une orientation de la plate-forme qui satisfait les contraintes sur les longueurs des segments) ?

Problème 6.4: Peut-on calculer géométriquement la frontière de l'espace maximal d'un robot à 6 degrés de liberté ?

Table des matières

Chapitre 7

Cinématique

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la détermination des relations entre le torseur cinématique du plateau mobile et les vitesses articulaires, ainsi qu'aux relations réciproques. Puis nous établissons comment les limites sur les vitesses articulaires influencent les vitesses cartésiennes et angulaires permises. Enfin nous présentons les relations entre les accélérations articulaires et les accélérations cartésiennes et angulaires.

7.1. Relation entre les vitesses articulaires et les vitesses généralisées

7.1.1. Détermination des vitesses articulaires

Nous avons vu dans le chapitre «Modèle géométrique» que l'on peut, en général, déterminer analytiquement la matrice jacobienne cinématique inverse qui lie de manière linéaire les vitesses articulaires au torseur cinématique \mathbf{W} , c'est-à-dire aux vitesses cartésiennes et angulaires du plateau mobile selon la relation :

$$\dot{\Theta} = J^{-1}\mathbf{W} \quad (7.1)$$

7.1.2. Détermination du torseur cinématique

Dans ce même chapitre nous avons vu que pour les robots à 6 degrés de liberté il est difficile d'inverser J^{-1} pour obtenir la formule analytique de la matrice jacobienne cinématique : on emploiera donc en général une procédure numérique

pour calculer le torseur cinématique. Pour une posture donnée de l'organe terminal on pourra, par exemple, utiliser un algorithme d'inversion numérique de matrice pour déterminer la jacobienne à partir de son inverse.

Reboulet [371] propose une autre méthode utilisant un schéma itératif, comparable à celui présenté pour le modèle géométrique direct. Nous notons \mathbf{W}_k l'estimée du torseur cinématique à l'itération k , J_0 la matrice jacobienne en position nominale. Nous définissons alors le schéma itératif suivant :

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k + J_0(\dot{\Theta} - J^{-1}\mathbf{W}_k) \quad (7.2)$$

que l'on arrête lorsque l'écart entre les vitesses articulaires et celles calculées à partir du torseur cinématique est inférieur à un seuil fixé. Chaque itération est peu coûteuse en temps et des tests numériques ont montré que cet algorithme avait de bonnes caractéristiques de convergence (Reboulet montre d'ailleurs que son algorithme est convergent pour son prototype dans tout l'espace de travail). La convergence s'effectue au bout de 1 à 3 itérations, ce qui amène à un temps de calcul de l'ordre de 0,4 à 2 ms. A titre de comparaison le temps de calcul par inversion de la matrice jacobienne inverse est de l'ordre de 0,7 ms.

Une autre méthode d'obtention de la jacobienne a été proposée par Shi [404] pour le SSM. On suppose que l'on connaît les vitesses articulaires, les longueurs des segments et les angles des Cardans permettant de définir la direction des segments. On considère alors 3 des centres d'articulation de la plate-forme mobile B_1, B_2, B_3 et l'on suppose que le centre du repère mobile est le barycentre de ces trois points. On peut donc exprimer les vitesses généralisées en fonction des vitesses des trois points (qui s'expriment simplement à partir des vitesses articulaires) et des six dérivées par rapport aux temps des angles des Cardans. Pour éliminer ces dérivées on exprime tout d'abord que la distance entre toutes paires de points pris dans l'ensemble B_1, B_2, B_3 est constante et l'on dérive cette relation par rapport aux temps, ce qui fournit trois relations linéaires dans les dérivées. On obtient trois autres relations linéaires en écrivant la vitesse des points B_4, B_5, B_6 . On obtient donc un système de 6 équations linéaires, système qui est résolu et le résultat est injecté dans l'expression des vitesses généralisées. Shi montre que pour des robots de type TSSM, MSSM la taille du système linéaire peut se réduire à trois, en utilisant des variables intermédiaires.

7.2. Extremums des vitesses généralisées

Lors de la conception il peut être intéressant de déterminer quels seront les extremums des vitesses du plateau mobile pour une borne fixée sur les vitesses articulaires. Nous considérons un robot général et nous supposons que les vitesses articulaires sont bornées pour tous les segments, cette borne étant identique pour tous. Sans perte de généralité, on choisit arbitrairement la borne égale à

l'unité :

$$|\dot{\rho}_i| \leq 1 \quad \forall i \in [1, 6]$$

7.2.1. Extremums des vitesses généralisées en un point

Nous supposons que le manipulateur occupe une configuration \mathbf{X}_0 donnée, et que quatre des vitesses angulaires ou cartésiennes sont fixées. Les limitations sur les vitesses articulaires impliquent des limitations sur les deux vitesses restantes. On définit le *plan vitesse* comme le plan où les coordonnées d'un point représentant la valeur des deux vitesses restantes. Seule une partie du plan vitesse est admissible en raison des contraintes sur les vitesses articulaires et nous cherchons à la déterminer. Pour illustrer notre propos nous supposons que les vitesses v_x, v_y sont libres. Nous recherchons alors dans le plan vitesse $v_x - v_y$ la frontière de la zone délimitant les vitesses possibles, étant données les bornes sur les vitesses articulaires. Nous posons :

$$J^{-1} = ((a_{ij}))$$

où J^{-1} désigne la matrice jacobienne cinématique inverse. Chaque point de la zone recherchée doit alors satisfaire les contraintes suivantes :

$$-1 \leq a_{i1}v_x + a_{i2}v_y + A \leq 1 \quad \forall i \in [1, 6]$$

où A est une constante ne dépendant que des valeurs imposées aux autres vitesses généralisées et des coefficients de la matrice jacobienne inverse. Chacune de ces 12 inégalités définit un demi-plan permis et la zone recherchée est l'intersection de ces demi-plans : la zone est donc un polygone convexe que l'on peut aisément calculer par des techniques géométriques.

A titre d'exemple la figure ?? présente la zone permise pour la «main gauche» de l'INRIA dans sa position nominale. La méthode est, bien

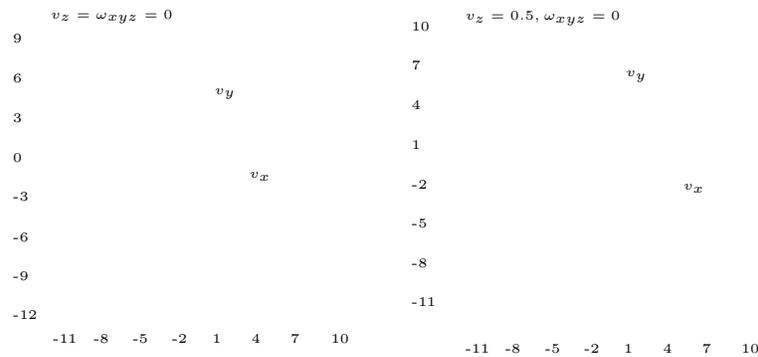


Figure 7.1: Zone des vitesses permises dans le plan $v_x - v_y$ (en grisé) pour la «main gauche» de l'INRIA dans sa position nominale.

sûr, identique pour tous les manipulateurs à partir du moment où l'on dispose de la matrice jacobienne inverse au point considéré.

Bien entendu à partir de cette méthode on peut construire le volume de vitesses permises en laissant libre trois vitesses. Ainsi la figure ?? présente le volume des vitesses admissibles dans l'espace v_x, v_y, v_z pour la «main gauche» de l'INRIA dans sa position nominale.

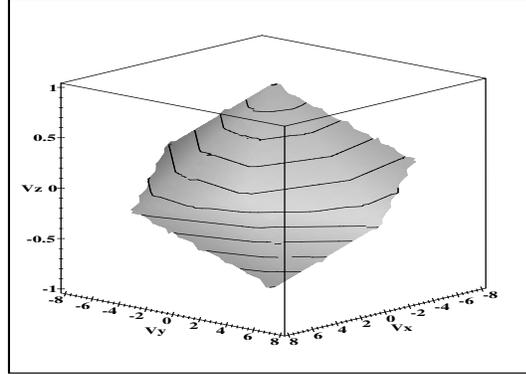


Figure 7.2: Les vitesses cartésiennes admissibles pour la «main gauche» de l'INRIA dans sa position nominale.

7.2.2. Minimum de la vitesse cartésienne dans un espace en translation

Dans cette section on s'intéresse au minimum de la norme de la vitesse \mathbf{V} du point C lorsque \mathbf{V} est dirigé selon une direction déterminée par un vecteur unitaire \mathbf{v}_u et que les vitesses articulaires sont bornées. On va chercher à déterminer quelle est la valeur minimale de $\|\mathbf{V}\|$ lorsque C parcourt un espace de travail déterminé, l'orientation étant constante, et qu'au moins un des actionneurs est en saturation de vitesse. La détermination de cette vitesse minimale permettra de choisir la vitesse des actionneurs permettant d'assurer une valeur minimale de la vitesse cartésienne dans la direction \mathbf{v}_u quelle que soit la position de C dans l'espace de travail. Nous limitons notre étude au cas du robot général et nous supposons que les vitesses angulaires sont toutes nulles.

La vitesse cartésienne du manipulateur \mathbf{V} s'écrit :

$$\mathbf{V} = \nabla \mathbf{v}_u$$

et l'on recherche le minimum de ∇ tel qu'il existe un point \mathbf{X}_0 dans l'espace de travail pour lequel au moins un des segments i du manipulateur vérifie :

$$|\dot{\rho}_i| = |\nabla(J^{-1}(\mathbf{X}_0)\mathbf{v}_u)_i| = 1$$

c'est-à-dire qu'au moins un des actionneurs est en saturation de vitesse.

On se rappelle que pour un robot général la matrice jacobienne inverse est définie par les lignes suivantes :

$$\frac{1}{\rho_i} \left[\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i^T, (\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \wedge \mathbf{B}_i \mathbf{C})^T \right] \quad (7.3)$$

Notons \mathbf{n}_i le vecteur unitaire du segment i . La vitesse articulaire de ce segment s'écrit donc :

$$\dot{\rho}_i = \nabla \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{v}_u \quad (7.4)$$

De cette équation on déduit que pour un segment i donné, ∇ sera minimal lorsque le produit $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{v}_u$ sera maximal en valeur absolue. Les vecteurs étant unitaires le produit scalaire est borné par 1 et donc la vitesse minimale ne peut être inférieure à la borne des vitesses articulaires. Ce cas se produit dans les configurations où le segment est parallèle au support de la vitesse. Donc si une telle configuration existe dans l'espace de travail, la vitesse minimale est la borne des vitesses articulaires.

Soit m_i le maximum de $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{v}_u$ pour le segment i . La vitesse minimale V_{min} est alors obtenue en prenant le maximum M_i des m_i pour les 6 segments et s'écrit :

$$V_{min} = \frac{1}{M_i}$$

La difficulté consiste bien sûr à déterminer la valeur de M_i en prenant en compte l'espace atteignable. Nous décrivons maintenant un algorithme permettant de déterminer la vitesse cartésienne minimale lorsque l'espace de travail est un parallélépipède rectangle.

7.2.2.1. Vitesse cartésienne minimale dans un parallélépipède rectangle

Pour chaque segment nous cherchons à minimiser :

$$\nabla = \frac{1}{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{v}_u} = \frac{\|\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\|}{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{v}_u}$$

lorsque C parcourt le parallélépipède. Le vecteur $\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i$ dépend des coordonnées de C . Intéressons-nous à la dérivée de ∇ par rapport à l'une de ces coordonnées, notée r dans la suite :

$$\frac{\partial \nabla}{\partial r} = \frac{\frac{\partial \|\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\|}{\partial r} \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{v}_u - \|\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\| \frac{\partial \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{v}_u}{\partial r}}{(\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{v}_u)^2} \quad (7.5)$$

Si $\rho(r)$ est la longueur du segment on a $\|\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\| = \sqrt{\rho^2(r)}$. Par dérivation on obtient :

$$\frac{\partial \nabla}{\partial r} = \frac{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{v}_u \frac{\partial \rho^2}{\partial r} - 2 \frac{\partial \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{v}_u}{\partial r} \rho^2}{2 \|\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\| (\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{v}_u)^2} \quad (7.6)$$

Supposons tout d'abord que le point C se déplace le long d'un segment M_1M_2 et posons :

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OM}_1 + \lambda \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$$

avec $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons déjà vu qu'alors ρ^2 s'exprime comme un polynôme de degré 2 en λ et que chacune des composantes du vecteur $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i$ s'exprime de manière linéaire en fonction de λ . En appliquant la formule (??) on trouve alors que le numérateur de la dérivée de ∇ par rapport à λ est linéaire dans cette variable. On peut donc facilement trouver le minimum de $|\nabla|$.

Supposons maintenant que C se déplace dans un rectangle horizontal défini par $x \in [x_1, x_2], y \in [y_1, y_2]$. On pose alors :

$$x = x_1 + \frac{(1 + \sin \alpha)(x_2 - x_1)}{2} \quad y = y_1 + \frac{(1 + \sin \beta)(y_2 - y_1)}{2}$$

Le minimum de ∇ sera obtenu pour α, β vérifiant :

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial \nabla}{\partial \beta} = 0 \quad (7.7)$$

En utilisant la formule (??) on trouve alors que le minimum de ∇ est obtenu soit sur les bords du rectangle (donc un segment, cas traité dans le paragraphe précédent) soit à l'intérieur du rectangle. Dans ce dernier cas les équations (??) sont des polynômes en $\sin \alpha, \sin \beta$. La première de ces équations est linéaire en $\sin \alpha$. Après résolution et report dans la seconde équation on trouve un polynôme de degré 3 en $\sin \beta$. Il est donc aisé de trouver le minimum de $|\nabla|$ pour un rectangle horizontal. A noter que pour un rectangle vertical la résolution est identique.

Supposons maintenant que C se déplace dans un parallélépipède rectangle défini par $x \in [x_1, x_2], y \in [y_1, y_2], z \in [z_1, z_2]$. On pose alors :

$$x = x_1 + \frac{(1 + \sin \alpha)(x_2 - x_1)}{2} \quad (7.8)$$

$$y = y_1 + \frac{(1 + \sin \beta)(y_2 - y_1)}{2} \quad (7.9)$$

$$z = z_1 + \frac{(1 + \sin \mu)(z_2 - z_1)}{2} \quad (7.10)$$

Le minimum de $|\nabla|$ sera obtenu pour α, β, μ vérifiant :

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial \nabla}{\partial \beta} = 0 \quad \frac{\partial \nabla}{\partial \mu} = 0 \quad (7.11)$$

En utilisant la formule (??) on trouve alors que le minimum de ∇ est obtenu soit sur les bords du parallélépipède (donc un rectangle, cas traité dans le paragraphe précédent) soit à l'intérieur du parallélépipède. Dans ce dernier cas les équations

(??) sont des polynômes en $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\sin \mu$. La première de ces équations est linéaire en $\sin \alpha$. Après résolution et report dans les deux autres équations on trouve qu'elles se factorisent en polynômes de degré au plus 2 dans les variables $\sin \beta$, $\sin \mu$. On considère alors toutes les paires de polynômes obtenues en prenant un polynôme issu de chacune des équations. On calcule le résultant de chaque paire, qui donne un polynôme en une seule variable, par exemple $\sin \mu$, (de degré au plus 4) qui est résolu numériquement. A partir de la valeur de $\sin \mu$ on peut ensuite déterminer les valeurs correspondantes de $\sin \alpha$, $\sin \beta$ et donc la valeur ∇_p de ∇ pour la paire considéré. Après avoir traité toutes les paires le minimum ∇_i de $|\nabla|$ pour le segment i est obtenu comme le minimum des $|\nabla_p|$. Le processus est répété pour chaque segment et le minimum de $|\nabla|$ est obtenu comme le minimum des ∇_i .

7.2.2.2. Vitesse cartésienne minimale dans un espace quelconque

Supposons finalement que l'espace de travail soit défini par un ensemble de coupes polygonales horizontales à différentes hauteurs, contenant le même nombre de sommets. Entre deux sections, l'espace de travail est le polyèdre obtenu en joignant les sommets de même numéro des deux polygones. On va utiliser une méthode de bisection reposant sur l'usage de la détermination de la vitesse minimale dans un parallélépipède rectangle. Pour l'espace de travail compris entre deux polygones successifs on va décomposer l'espace de travail en autant de boîtes que nécessaire pour déterminer la vitesse minimale dans l'espace de travail approximé avec une précision ϵ fixée.

Une liste de boîtes, initialisée avec la boîte englobante de l'espace de travail B_0 , est maintenue à jour dans l'algorithme. La valeur courante V_{min} de la norme de la vitesse minimale est stockée. A l'itération k l'algorithme effectue les étapes suivantes :

1. si la boîte B_k est complètement en dehors de l'espace de travail on passe à la boîte suivante dans la liste.
2. si la boîte B_k est complètement à l'intérieur de l'espace de travail on calcule la vitesse minimale pour cette boîte. On met à jour V_{min} .
3. si la boîte B_k est partiellement à l'intérieur de l'espace de travail on calcule la vitesse minimale V_{min}^k pour cette boîte. Si cette vitesse est supérieure à V_{min} on passe à la boîte suivante sinon :
 - (a) si la distance maximale entre un point de la boîte et l'espace maximal ne dépasse pas ϵ on met à jour V_{min} avec V_{min}^k et l'on passe à la boîte suivante.

- (b) sinon on crée 8 nouvelles boîtes à partir de B_k en divisant chacune de ses dimensions par 2. Ces boîtes sont placées à la fin de la liste et l'on passe à la boîte suivante.

L'algorithme s'arrête lorsque la liste est vide. Cet algorithme peut être étendu pour déterminer la vitesse minimale dans un espace défini par un hypercube dans les coordonnées articulaires. Pour cela on utilise l'algorithme décrit dans le chapitre «Modèle géométrique» qui permet de calculer les extremums des coordonnées articulaires pour toute position de C dans un parallélépipède rectangle, ce qui permet de statuer sur l'appartenance de la boîte à l'espace de travail. Les tests d'appartenance de la boîte à l'espace de travail de l'algorithme précédent sont alors remplacés par cette nouvelle procédure.

7.3. Extremums des vitesses articulaires dans un espace en translation

Dans cette section on désire déterminer quelles sont les valeurs minimales et maximales des vitesses articulaires nécessaires à la réalisation d'une vitesse généralisée donnée quelle que soit la position de C dans un espace de travail donné. On se restreint au cas du robot général¹ mais cette étude peut être étendue à d'autres architectures (cf. exercices).

7.3.1. Extremums dans un parallélépipède rectangle

On va utiliser ici une méthode similaire à celle utilisée pour la détermination des vitesses cartésiennes minimales : on cherche les extremums quand C décrit successivement un segment, un rectangle horizontal ou vertical puis finalement le parallélépipède complet.

Supposons que le point C se déplace sur un segment défini par ses deux extrémités M_1, M_2 . Toute position de C peut alors être définie par :

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OM}_1 + \lambda \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \quad (7.12)$$

où λ est un scalaire dans l'intervalle $[0,1]$.

Si l'on décompose le vecteur des vitesses généralisées \mathcal{V} en deux vecteurs, \mathbf{V} le vecteur vitesse de translation de C et $\mathbf{\Omega}$ le vecteur des vitesses angulaires on a :

$$\dot{\rho} = \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{CB} \wedge \mathbf{AB}) \cdot \mathbf{\Omega}}{\|\mathbf{AB}\|} \quad (7.13)$$

Le vecteur \mathbf{AB} peut s'écrire :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{U} + \lambda \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$$

¹une implantation de l'algorithme décrit dans cette section est disponible par ftp anonyme, répertoire `prisme/Speed`

où \mathbf{U} est un vecteur constant. La norme de ce vecteur s'écrit :

$$\|\mathbf{AB}\| = \sqrt{\lambda^2 \|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|^2 + 2\lambda \mathbf{U} \cdot \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 + \|\mathbf{U}\|^2}$$

De la même manière on a :

$$\mathbf{CB} \wedge \mathbf{AB} = \mathbf{CB} \wedge \mathbf{U} + \lambda \mathbf{CB} \wedge \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$$

En utilisant les équations précédentes l'équation (??) peut s'exprimer de manière simple par :

$$\dot{\rho} = \frac{a_1 \lambda + a_2}{\sqrt{a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5}} \quad (7.14)$$

Les coefficients a_i dépendent simplement de la géométrie du robot ainsi que des coordonnées des extrémités du segment trajectoire. En dérivant cette expression par rapport à λ on obtient une expression dont le numérateur N est linéaire en λ .

En conséquence les extremums de la vitesse articulaire seront obtenus soit pour $\lambda = 0, 1$ où pour la valeur de λ qui annule N , à condition que cette valeur soit comprise dans l'intervalle $[0, 1]$. Il est donc aisé de calculer ces extremums.

Supposons maintenant que l'espace de travail soit défini comme un rectangle horizontal où les coordonnées de C (x, y, z) vérifient $x \in [x_1, x_2]$, $y \in [y_1, y_2]$. On pose :

$$x = x_1 + \frac{(1 + \sin \alpha)(x_2 - x_1)}{2} \quad y = y_1 + \frac{(1 + \sin \beta)(y_2 - y_1)}{2} \quad (7.15)$$

Les extremums de $\dot{\rho}$ satisfont alors les conditions suivantes :

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \alpha} = 0 \quad \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \beta} = 0 \quad (7.16)$$

Les extremums des vitesses articulaires sont obtenues soit sur les côtés du rectangle (cas traité dans le paragraphe précédent) soit pour un point à l'intérieur du rectangle. Dans ce dernier cas les équations (??) ont comme inconnue $\sin \alpha, \sin \beta$ uniquement. La première est linéaire en $\sin \alpha$. Après résolution et report dans la seconde on obtient un polynôme de degré 3 en $\sin \beta$.

Supposons maintenant que l'espace de travail soit un parallélépipède rectangle. Les points de l'espace de travail vérifient $x \in [x_1, x_2]$, $y \in [y_1, y_2]$, $z \in [z_1, z_2]$. Dans ce cas l'approche par optimisation est délicate. Si l'on définit 3 nouvelles variables α, β, μ pour paramétrer les coordonnées x, y, z selon les équations (??,??,??) et que l'on dérive $\dot{\rho}$ par rapport à ces trois variables on obtient des équations de degré relativement élevé. On peut toutefois tourner cette difficulté en employant la méthode suivante, valable pour calculer les bornes supérieures : on calcule les maxima pour le rectangle horizontal du parallélépipède ayant l'altitude la plus faible z_1 puis on détermine un Δz tel que

les maxima obtenus pour le rectangle à l'altitude $z_1 + \Delta z$ n'excèdent pas de plus d'une quantité $\epsilon > 0$ donnée les maxima obtenus pour le rectangle à l'altitude z_1 . On recommence ensuite le processus avec le nouveau rectangle et on arrête la procédure lorsque l'altitude obtenue excède z_2 . Cette méthode permet de déterminer les maxima avec une erreur au pire égale à ϵ . La détermination des minima des vitesses articulaires utilise le même principe en prenant $\epsilon < 0$.

Le temps de calcul de l'algorithme est clairement dépendant de la précision ϵ avec laquelle les valeurs extrémales des vitesses articulaires doivent être déterminées. La figure ?? illustre sur un exemple le temps de calcul en fonction de la précision. On peut constater que même si l'on désire une très bonne

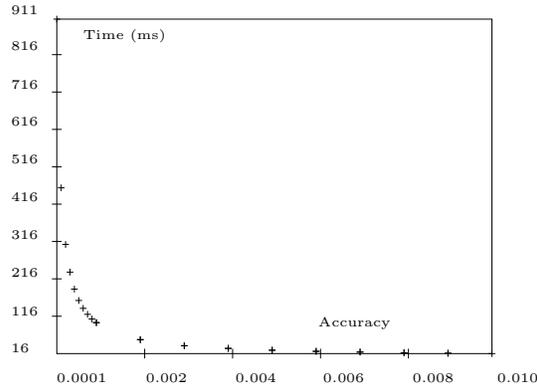


Figure 7.3: Temps de calcul des extremums des vitesses articulaires pour un espace de travail de type parallélépipède rectangle en fonction de la précision demandée sur les vitesses.

précision sur les vitesses extrémales le temps de calcul reste raisonnable.

7.3.2. Extremums dans un espace de travail quelconque

On suppose ici que l'espace de travail peut être décrit à l'aide de polygones horizontaux disposés successivement comme dans la section ??.

On considère l'espace de travail compris entre deux polygones successifs, qui va être décomposé en autant de boîtes que nécessaire pour déterminer les vitesses articulaires extrémales avec la précision ϵ souhaitée. Une liste de boîtes, initialisée avec la boîte englobante de l'espace de travail B_0 , est maintenue à jour dans l'algorithme. De plus un tableau est créé pour sauvegarder les vitesses extrémales.

A l'itération k l'algorithme effectue les étapes suivantes :

1. si la boîte B_k est complètement en dehors de l'espace de travail on passe à la boîte suivante dans la liste.
2. si la boîte B_k est complètement à l'intérieur de l'espace de travail on

calcule les vitesses articulaires extrémales pour cette boîte. Le tableau des vitesses extrémales est mis à jour.

3. si la boîte B_k est partiellement à l'intérieur de l'espace de travail on calcule les vitesses articulaires extrémales pour cette boîte.
 - (a) si toutes les vitesses sont incluses dans les limites définies dans le tableau des vitesses extrémales on passe à la boîte suivante.
 - (b) si pour chaque segment les écarts entre vitesses minimales et maximales n'excèdent pas $\epsilon/2$ le tableau des vitesses extrémales est mis à jour avec la valeur moyenne des vitesses extrémales et l'on passe à la boîte suivante.
 - (c) sinon on crée 8 nouvelles boîtes à partir de B_k en divisant chacune de ses dimensions par 2. Ces boîtes sont placées à la fin de la liste et l'on passe à la boîte suivante.

L'algorithme stoppe lorsque la liste est vide. Il permet de calculer les vitesses extrémales pour des espaces de travail complexe dans un temps raisonnable.

L'espace de travail peut être aussi défini comme un hypercube dans l'espace articulaire. L'algorithme est dans le principe identique, seul diffère le test sur l'appartenance des boîtes à l'espace de travail qui utilise l'algorithme décrit dans le chapitre «Modèle géométrique» permettant de calculer les extremums des longueurs des segments pour une boîte.

7.3.2.1. Cas particulier

On va supposer dans cette section que la vitesse angulaire est nulle. En conséquence les vitesses articulaires s'écrivent :

$$\dot{\rho} = \mathbf{V} \cdot \frac{\mathbf{AB}}{\|\mathbf{AB}\|} \quad (7.17)$$

Soit D_1 la ligne passant par A et de vecteur directeur \mathbf{V} et D_2 la ligne associée au segment du robot. Si μ est l'angle entre ces deux lignes on a :

$$\dot{\rho} = \|\mathbf{V}\| \cos \mu \quad (7.18)$$

Si D_1 coupe l'espace de travail en un point M et que $\mathbf{AM} \cdot \mathbf{V} > 0$ ($\mathbf{AM} \cdot \mathbf{V} < 0$) alors la vitesse articulaire maximale (minimale) sera $\|\mathbf{V}\|$ ($-\|\mathbf{V}\|$) et la vitesse minimale (maximale) sera obtenue pour C sur l'une des arêtes de l'espace de travail.

Si D_1 ne coupe pas l'espace de travail les extremums des vitesses articulaires seront obtenues pour une position de C sur une des arêtes des polygones définissant l'espace de travail. Cet algorithme est très rapide et permet la détermination exacte des vitesses articulaires extrémales.

Remarquons que cette méthode peut être étendue au cas où l'espace de travail est une sphère. On vérifie tout d'abord si D_1 coupe la sphère décrite par B , auquel cas un extremum sera $\|\mathbf{V}\|$ ou $-\|\mathbf{V}\|$. Pour déterminer l'autre extremum (ou les extremums quand D_1 ne coupe pas la sphère) on considère le plan défini par D_1 et le centre T de la sphère décrite par B lorsque C décrit l'espace de travail. Ce plan coupe la sphère décrite par B selon un cercle. Soient les deux points sur ce cercle tels que la tangente au cercle en ces points passent par A (figure ??). Les vitesses articulaires extrémales sont obtenues en ces

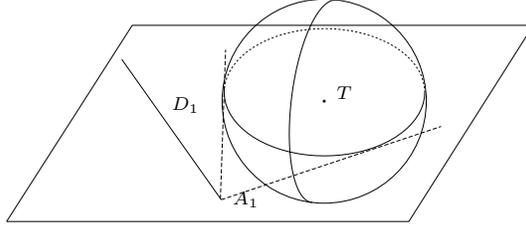


Figure 7.4: Détermination des vitesses articulaires extrémales lorsque l'espace de travail est une sphère.

points puisqu'il optimise la valeur de $\cos \mu$.

7.3.3. Détermination des débattements des articulations

Nous avons vu dans la section précédente que si la vitesse angulaire est nulle le calcul des vitesses extrémales revient à déterminer la valeur maximum de la quantité $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{V} / \|\mathbf{AB}\|$. Cette quantité est en fait le cosinus de l'angle entre le segment et le vecteur \mathbf{V} . On obtient ainsi les valeurs extrêmes de l'angle entre le segment et une direction fixe, donc le débattement que doit pouvoir exécuter l'articulation passive du segment pour permettre au point C de décrire son espace de travail.

7.4. Accélération

Dans cette section nous déterminons la relation liant les accélérations articulaires aux accélérations cartésiennes et angulaires. A noter que les robots parallèles peuvent avoir d'excellentes caractéristiques en terme d'accélération : le robot «Delta» présente par exemple une accélération maximale de l'ordre de 500 m/s^2 [302]. Il existe des méthodes générales d'obtention des accélérations pour les chaînes fermées (comme celle proposée par Xu [464]) mais dans le cas des manipulateurs parallèles il sera en général aisé d'obtenir directement ces relations. En effet à partir de l'équation (??) nous obtenons par dérivation :

$$\ddot{\rho} = J^{-1} \dot{\mathbf{W}} + J^{-1} \mathbf{W} \quad (7.19)$$

Pour les différentes catégories de manipulateur parallèle la détermination des équations d'accélération va donc se réduire à la détermination de la dérivée de la matrice jacobienne cinématique inverse. Nous en donnons ici quelques exemples.

7.4.1. Robot général

Dans ce cas une ligne de la matrice jacobienne inverse est de la forme :

$$\left[\frac{\mathbf{AB}}{\rho}, \frac{(\mathbf{CB} \wedge \mathbf{AB})}{\rho} \right] \quad (7.20)$$

Nous considérons tout d'abord les 3 premiers éléments de cette ligne. On a :

$$\frac{d\left(\frac{\mathbf{AB}}{\rho}\right)}{dt} = \frac{1}{\rho^2}(\rho\dot{\mathbf{A}}\mathbf{B} - \dot{\rho}\mathbf{A}\mathbf{B}) \quad (7.21)$$

avec :

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \mathbf{V} + \mathbf{CB} \wedge \boldsymbol{\Omega} \quad (7.22)$$

ce qui permet de compléter la dérivation de ces éléments. Pour la dérivation des trois derniers éléments on a :

$$\frac{d\left(\frac{\mathbf{CB} \wedge \mathbf{AB}}{\rho}\right)}{dt} = \frac{\rho \frac{d(\mathbf{CB} \wedge \mathbf{AB})}{dt} - \dot{\rho}(\mathbf{CB} \wedge \mathbf{AB})}{\rho^2} \quad (7.23)$$

On a de plus :

$$\frac{d(\mathbf{CB} \wedge \mathbf{AB})}{dt} = \dot{\mathbf{C}}\mathbf{B} \wedge \mathbf{AB} + \mathbf{CB} \wedge \dot{\mathbf{A}}\mathbf{B} \quad (7.24)$$

et

$$\dot{\mathbf{C}}\mathbf{B} = \mathbf{CB} \wedge \boldsymbol{\Omega} \quad (7.25)$$

d'où :

$$\frac{d(\mathbf{CB} \wedge \mathbf{AB})}{dt} = (\mathbf{CB} \wedge \boldsymbol{\Omega}) \wedge \mathbf{AB} + \mathbf{CB} \wedge \mathbf{V} \quad (7.26)$$

Une ligne de la dérivée de la matrice jacobienne cinématique inverse s'écrit donc :

$$\frac{[\rho(\mathbf{V} + \mathbf{CB} \wedge \boldsymbol{\Omega}) - \dot{\rho}\mathbf{A}\mathbf{B}, \rho((\mathbf{CB} \wedge \boldsymbol{\Omega}) \wedge \mathbf{AB} + \mathbf{CB} \wedge \mathbf{V}) - \dot{\rho}(\mathbf{CB} \wedge \mathbf{AB})]}{\rho^2} \quad (7.27)$$

7.4.2. Poignet actif

Dans ce type de manipulateur la longueur des segments est fixe et la motorisation s'effectue en déplaçant le point A_i selon une direction constante \mathbf{u} . Dans ce cas une ligne de la matrice jacobienne inverse s'écrit :

$$\left[\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{u}}, \frac{(\mathbf{CB} \wedge \mathbf{AB})}{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{u}} \right] \quad (7.28)$$

On a :

$$\frac{d\left(\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{u}}\right)}{dt} = \frac{\dot{\mathbf{AB}}(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{AB} \frac{d(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{u})}{dt}}{(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{u})^2} \quad (7.29)$$

La dérivation précédente est complètement déterminée en utilisant les relations suivantes :

$$\frac{d(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{u})}{dt} = \dot{\mathbf{AB}} \cdot \mathbf{u} \quad (7.30)$$

$$\dot{\mathbf{AB}} = \mathbf{V} + \mathbf{CB} \wedge \boldsymbol{\Omega} \quad (7.31)$$

Pour les trois derniers éléments de la ligne on a :

$$\frac{d\left(\frac{\mathbf{CB} \wedge \mathbf{AB}}{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{u}}\right)}{dt} = \frac{(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{u}) \frac{d(\mathbf{CB} \wedge \mathbf{AB})}{dt} - \frac{d(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{u})}{dt} (\mathbf{CB} \wedge \mathbf{AB})}{(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{u})^2} \quad (7.32)$$

Le report des équations (??) et (??) permet alors de conclure la dérivation de la ligne.

7.5. Conclusion

Le calcul des vitesses articulaires d'un manipulateur parallèle ne présente pas de problème à partir du moment où l'on connaît la position courante du manipulateur. Par contre le calcul inverse bute sur la méconnaissance de la matrice jacobienne cinématique. En conséquence les calculs de vitesse maximale et minimale pour des vitesses articulaires données, qui sont utiles pour la phase de conception, restent délicats à traiter.

7.6. Exercices

Exercice 7.1: Déterminer le centre de rotation instantanée du mouvement d'un robot parallèle plan de type 3 – $R\underline{P}R$ lorsqu'il est en configuration singulière.

Exercice 7.2: On considère un robot plan de type 3 – $R\underline{R}R$ avec :

$$\mathbf{OA}_1(0,0) \quad \mathbf{OA}_2(5,0) \quad \mathbf{OA}_3(2,0) \quad \mathbf{CB}_1(0,0) \quad \mathbf{CB}_2(0,0) \quad \mathbf{CB}_3(1,0)$$

Les segments de chaque chaîne ont une longueur de 5. On note $\dot{\psi}$ le vecteur des vitesses articulaires, x, y les coordonnées de B_1 dans le repère absolu, θ l'angle entre $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$ et l'axe x et $\mathbf{W} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$. Déterminer les matrices A, B telles que $A\dot{\psi} + B\mathbf{W} = 0$

Exercice 7.3: On considère un robot du type poignet actif avec des segments de longueurs constantes et dont la motorisation consiste à déplacer les points A_i selon une droite définie par un point A_0 et un vecteur \mathbf{u} . Montrer comment calculer les extremums des vitesses articulaires nécessaires à l'exécution d'une vitesse généralisée donnée, lorsque C se déplace sur un segment, l'orientation étant constante.

Exercice 7.4: Déterminer les extremums des accélérations des actionneurs nécessaires pour qu'un robot général partant à vitesse nulle atteigne une accélération dans une direction donnée, ceci pour toute position dans un espace de travail donné.

Problème 7.1: Déterminer les extremums des vitesses articulaires d'un robot général lorsque C décrit un parallélépipède rectangle, en utilisant une méthode d'optimisation.

Problème 7.2: Déterminer la vitesse maximale dans une direction donnée que peut atteindre un robot général dont les vitesses articulaires sont bornées à ± 1 . Déterminer les lieux où cette vitesse maximale peut être atteinte.

Problème 7.3: Déterminer la vitesse maximale absolue que peut atteindre dans un espace de travail donné un robot général dont les vitesses articulaires sont bornées à ± 1 . Déterminer les lieux où cette vitesse maximale peut être atteinte.

Problème 7.4: Déterminer l'accélération maximale dans une direction donnée que peut atteindre un robot général dans une position fixée, alors que les vitesses et les accélérations sont bornées à ± 1 .

Problème 7.5: Reprendre le problème précédent pour trouver les extremums de l'accélération pour toute position dans un espace de travail donné.

Table des matières

Chapitre 8

Statique

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux relations existantes entre les forces articulaires du manipulateur et les forces généralisées qui lui sont appliquées. Nous étudions ensuite les limites imposées aux forces applicables sur la plateforme lorsque les forces articulaires sont bornées, puis les extremums des forces articulaires lorsqu'on limite les forces appliquées sur le robot. Enfin nous effectuons une étude de la rigidité d'un manipulateur parallèle.

8.1. Relations entre forces généralisées et articulaires

8.1.1. Relations fondamentales

La relation fondamentale entre les forces articulaires et généralisées, valable aussi bien pour les manipulateurs série que les manipulateurs parallèles, est :

$$\tau = J^T \mathcal{F} \quad (8.1)$$

où τ est le vecteur des forces articulaires, \mathcal{F} le vecteur des forces généralisées et J la matrice jacobienne cinématique. De cette relation on déduit :

$$\mathcal{F} = J^{-T} \tau \quad (8.2)$$

8.1.2. Détermination des forces généralisées

Nous pouvons calculer, en fonction des paramètres de position et d'orientation du plateau mobile, la matrice jacobienne cinématique inverse et, par

conséquent, nous pouvons déterminer à partir des forces articulaires le torseur des forces généralisées agissant sur le plateau mobile. Le temps de calcul est de l'ordre de 0,15 ms.

8.1.3. Détermination des forces articulaires

Ici se pose le problème de la détermination de J que nous ne savons exprimer généralement pour les robots à 6 degrés de liberté que de manière numérique, sauf pour des architectures simples. D'une manière pratique on peut soit utiliser la matrice jacobienne déterminée numériquement à partir de son inverse soit une méthode numérique de résolution de système linéaire.

Une autre méthode repose sur l'utilisation d'un schéma itératif similaire à celui utilisé pour le modèle géométrique direct. Il suppose donc une connaissance au moins approximative de la solution. Ce schéma est défini par :

$$\Delta\tau_k = J_0^T(\mathcal{F} - J^{-T}\tau_{k-1}) \quad \tau_k = \tau_{k-1} + \Delta\tau_k \quad (8.3)$$

On arrête l'itération lorsque l'écart entre les forces généralisées \mathcal{F} et celles calculées à partir des forces articulaires, $J^{-T}\tau_{k-1}$, est inférieur à un seuil fixé. Pour le cas particulier de la « main gauche » INRIA l'algorithme semble converger dans tout l'espace de travail et nécessite entre une et trois itérations pour atteindre un résultat correct. Le temps de calcul par résolution du système linéaire est de l'ordre de 0,71 ms alors que celui de la méthode itérative varie entre 0,35 ms et 1,77 ms selon l'estimée initiale.

Bien entendu la détermination de l'ensemble des forces articulaires dépend de l'architecture du robot et peut être assez complexe comme le montre l'analyse du robot de Shahinpoor par Pang [339]. Le problème devient encore plus complexe si on ajoute des élasticités dans certaines parties du robot comme l'ont fait Kerr [215] et Takeda [435]. Pour une analyse très fine des contraintes dans chaque corps du robot on peut aussi utiliser une méthode d'éléments finis comme l'a proposée Ramachandran [368].

8.2. Forces articulaires et forces généralisées maximales

Dans le processus de conception d'un manipulateur parallèle, il est courant de connaître les forces généralisées qui vont être appliquées sur le plateau mobile et de vouloir en déduire les forces articulaires correspondantes afin de dimensionner les composants des segments. Inversement disposant d'un catalogue limité de composants pour les segments, ce qui fixe les forces articulaires maximales, on peut vouloir déterminer les forces généralisées maximales.

8.2.1. Forces articulaires maximales en un point

Dans cette section on suppose que les forces généralisées sont bornées par $\|\mathcal{F}\| \leq 1$ et l'on désire déterminer les forces articulaires maximales pour une posture donnée du manipulateur. En utilisant l'équation (??) on obtient :

$$\tau^T J^{-1} J^{-T} \tau \leq 1 \quad (8.4)$$

Les forces articulaires sont donc incluses dans un hyperellipsoïde. Dans l'exemple de la figure ?? on s'est intéressé aux forces articulaires lorsque une force \mathbf{F} , bornée, est appliquée sur le plateau mobile de la «main gauche» INRIA. Dans ces conditions nous avons une relation de contrainte sur les 6 composantes de τ pour obtenir l'annulation des moments. L'équation (??) s'exprime donc simplement en fonction de 3 composantes de τ .

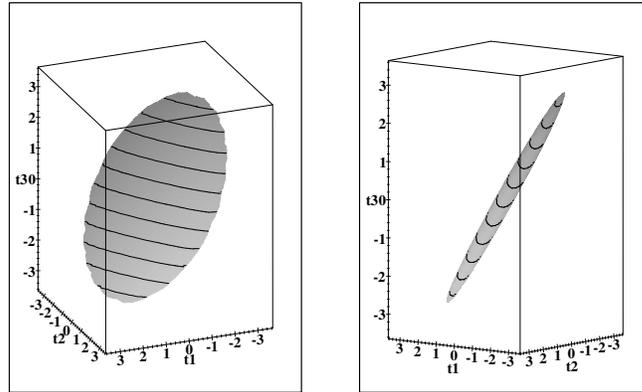


Figure 8.1: Dans l'espace des τ_1, τ_2, τ_3 les forces articulaires maximales lorsque une force pure bornée par $\|\mathbf{F}\| \leq 1$ est appliquée sur la plate-forme de la «main gauche» de l'INRIA en position nominale.

8.2.2. Forces articulaires maximales dans un espace de travail

Comme nous l'avons vu dans le chapitre consacré aux matrices jacobiennes la matrice jacobienne cinématique est en général difficile à obtenir, en particulier pour les robots à 6 degrés de liberté. En conséquence il est difficile d'obtenir les forces articulaires maximales lorsque l'on applique une force généralisée donnée sur la plate-forme alors qu'elle décrit un espace de travail spécifié. On sera donc en général obligé de recourir à une méthode de discrétisation sauf pour des architectures simples comme les robots plans (cf. exercices).

8.2.3. Forces généralisées maximales en un point

On peut vouloir déterminer la distribution des forces produites par le manipulateur lorsque les forces articulaires sont bornées comme le propose Kosuge [226] et Lee [249]. Si l'on suppose que $\tau\tau^T \leq 1$ on obtient avec l'équation (??) que $\mathcal{F}^T J J^T \mathcal{F} \leq 1$. L'hypersphère des forces articulaires se transforme par cette relation en une hyperellipsoïde que Lee qualifie d'*ellipsoïde de résistivité*. Cette ellipsoïde n'est pas totalement satisfaisante car elle ne décrit pas le cas où *chacune* des forces articulaires est bornée par 1. Dans tous les cas une procédure numérique doit être utilisée en raison de la méconnaissance de la matrice jacobienne. Lorsque chacune des forces articulaires est bornée on pourra construire dans l'espace forces/moments la frontière délimitant les forces maximales avec une approche similaire à celle qui a permis de trouver les vitesses généralisées maximales lorsque les vitesses articulaires sont bornées (cf. exercice).

La figure ?? présente l'ellipsoïde et le volume obtenu pour les forces lorsque l'on borne les forces articulaires soit par $\|\tau\| \leq 1$ ou par $|\tau_i| \leq 1$ pour la «main gauche» de l'INRIA dans sa position nominale. Dans les deux cas on a supposé que les moments étaient nuls.

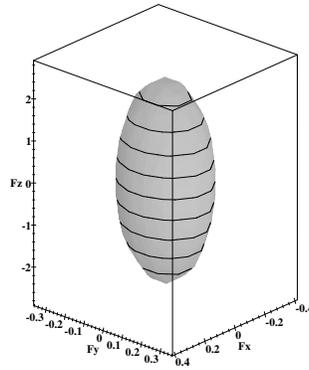


Figure 8.2: *Forces maximales pour la «main gauche» de l'INRIA en position nominale. À gauche les forces cartésiennes maximales lorsque $\|\tau\| \leq 1$, à droite ces mêmes forces si l'on borne chacune des composantes de τ par 1.*

A noter l'approche de Romiti [383] qui étudie l'amplitude des forces cartésiennes maximales lorsque les forces articulaires sont bornées en calculant le volume de l'objet obtenu dans l'espace force-moment.

8.2.4. Forces généralisées maximales dans l'espace de travail

Pour des forces articulaires bornées les dimensions de l'ellipsoïde de résistivité caractérise les forces généralisées maximales applicables sur la plate-forme. Ces

dimensions sont définies par la matrice symétrique $J^T J$ dépendante de la posture du robot. Nous savons qu'en général une formule analytique de la matrice jacobienne cinématique J est difficile à obtenir, au moins pour les robots à 6 degrés de liberté. Il sera donc difficile d'établir les extremums des forces généralisées sans recourir à une discrétisation numérique.

A titre d'exemple on considère la «main gauche» de l'INRIA dont les forces articulaires sont limitées à 300 N en raison de la présence de capteur de force dans les segments. La figure ?? montre les forces et les couples maximaux quand la plate-forme bouge dans le plan $x - y$.

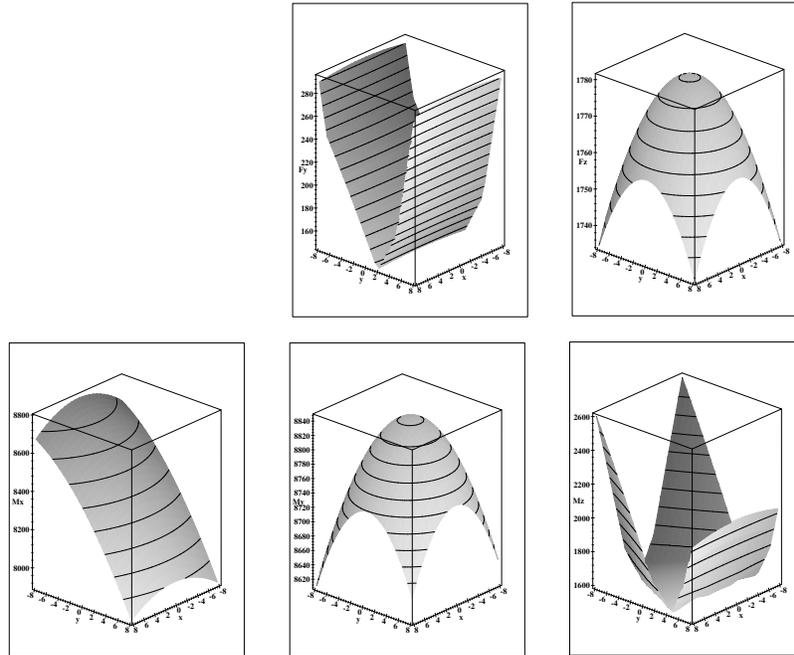


Figure 8.3: Forces et moments maximaux pour la «main gauche» de l'INRIA quand le plateau bouge dans un plan $x - y$. Les forces articulaires sont individuellement limitées à 300 N.

8.3. Utilisation des robots parallèles comme capteur d'efforts

La relation simple entre forces généralisées et forces articulaires a bien sûr incité de nombreux chercheurs à instrumenter les structures parallèles pour en faire des capteurs d'efforts. Par exemple pour un robot général dont les segments ne sont pratiquement que soumis à des forces de traction-compression il suffit

de placer un capteur mono-axial dans chaque segment pour mesurer les forces articulaires, puis à l'aide de la matrice jacobienne inverse de calculer les forces généralisées. Cette pratique a été proposée dès 1979 par Rees Jones [378] puis par Berthomieu [35], Claudinon [59], Fenyi [105], Kerr [214], Nguyen [329], Perju [352], Romiti [383] et Sorli [413].

La «main gauche» de l'INRIA a d'ailleurs été instrumentée à cet effet. Des capteurs à jauges de contrainte ont été placés dans chaque segment, permettant de mesurer les forces verticales avec une précision de l'ordre de 0,15 N et les forces horizontales avec une précision de l'ordre de 0,03 N. Cette anisotropie de la précision de mesure est due à l'élanement élevé du robot.

8.4. Raideur et complaisance

8.4.1. Matrice de raideur d'un manipulateur parallèle

8.4.1.1. Modèle élastique

La raideur d'un manipulateur intervient de manière importante dans sa commande car elle conditionne sa bande passante. Pour les manipulateurs série celle-ci est basse, de l'ordre de quelques Hz au mieux. Pour étudier la raideur des manipulateurs parallèles nous adoptons un modèle élastique pour les variations des variables articulaires en fonction des forces qui sont appliquées à l'articulation active. Une modification de la variable articulaire $\Delta\Theta$ correspond à une variation de la force articulaire τ telle que :

$$\Delta\tau = k\Delta\Theta \quad (8.5)$$

où k est la raideur élastique des segments. Or nous avons :

$$\Delta\Theta = J^{-1}\Delta\mathbf{X} \quad \Delta\mathcal{F} = J^{-T}\Delta\tau \quad (8.6)$$

on en déduit :

$$\Delta\mathcal{F} = kJ^{-T}J^{-1}\Delta\mathbf{X} \quad (8.7)$$

La matrice de raideur K et la matrice de complaisance C s'écrivent donc :

$$K = kJ^{-T}J^{-1} \quad C = \frac{1}{k}JJ^T \quad (8.8)$$

Comme le fait remarquer Duffy [95] la dérivation précédente suppose qu'initialement il n'y a pas de charge sur les éléments élastiques des segments. En effet si l'on suppose que la longueur à vide des segments est ρ_i^0 on aura :

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{F} &= \sum_{i=1}^{i=6} k\Delta\rho_i\mathbf{n}_i + k(\rho_i - \rho_i^0)\Delta\mathbf{n}_i \\ \Delta\mathbf{M} &= \sum_{i=1}^{i=6} k\Delta\rho_i\mathbf{CB}_i \wedge \mathbf{n}_i + k(\rho_i - \rho_i^0)\Delta(\mathbf{CB}_i \wedge \mathbf{n}_i) \end{aligned}$$

où \mathbf{n}_i représente le vecteur unitaire du segment i et \mathbf{F}, \mathbf{M} les forces et les moments appliqués sur la plate-forme. En conséquence on ne retrouvera la formulation de la matrice de raideur définie dans l'équation (??) que si $\rho_i = \rho_i^0$. Duffy indique d'ailleurs la formulation exacte de la matrice de raideur dans le cas des robots plans de type 3 – *RPR*.

La raideur est une notion importante dans beaucoup d'applications et ce sujet a donc fait l'objet de nombreux travaux. Hashimoto [159] a étudié la raideur du robot à 3 degrés de liberté de Lee. Il montre que la raideur en translation est sensiblement constante alors que celle en rotation dépend du rapport entre les dimensions de la plate-forme mobile et de la base. Il en déduit une méthode pour concevoir un mécanisme ayant une matrice de raideur fixée.

Dubowsky [94] s'est intéressé à la variation de raideur horizontale et verticale d'un SSM en fonction de l'angle que les segments font avec la base. Il montre que la raideur verticale augmente avec cet angle alors que la raideur horizontale diminue. Une étude de la matrice de raideur du robot de Romiti a été proposée par Ceccarelli [47]. Artigue [19] a proposé une architecture particulière de robot où la matrice de raideur est diagonale (ce qui est particulièrement intéressant pour une utilisation en capteur d'efforts). Maeda [273] montre que pour un robot utilisant des actionneurs pneumatiques il peut, par une commande appropriée des vérins, modifier la complaisance du manipulateur.

Une approche plus générale de la raideur a été proposée par Yi [469] qui définit une matrice de raideur liant l'ensemble des forces appliquées sur le robot aux variations de l'ensemble des paramètres articulaires. Cet auteur a étudié avec soin la raideur du robot sphérique de Tesar, en considérant à la fois le cas non redondant et redondant [468]. Mentionnons aussi l'étude de Adli [1] pour les robots parallèles redondants où l'influence des forces internes sur la raideur du manipulateur autour d'une position d'équilibre est analysée. On peut aussi citer les études de Khatib et Reboulet sur la raideur des systèmes constitués d'un robot série ayant comme organe terminal un robot parallèle [216, 372, 376].

Citons enfin les études de la raideur des manipulateurs parallèles à câbles proposées par Dagalakis [74], et Unger [444] de l'équipe d'Albus au NBS et celle de Ming [305, 306]. On pourra remarquer dans ces travaux que la matrice de raideur théorique calculée de manière similaire à celle que nous avons employée est très proche de celle mesurée effectivement.

A titre d'exemple étudions la nature de la matrice de raideur d'un SSM pour sa position nominale. Compte tenu des symétries on obtient :

$$K_{12} = K_{13} = K_{14} = K_{25} = K_{26} = K_{35} = K_{36} = K_{45} = K_{46} = 0$$

La matrice de raideur ne sera pas, en général, une matrice diagonale. Pour la «main gauche» de l'INRIA la matrice de raideur s'écrit :

$$K = k \begin{pmatrix} 0,05077 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,848 & 10^{-6} \\ 0,0 & 0,05077 & -10^{-7} & -1,848 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & -10^{-7} & 5,898 & 0,00002 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & -1,848 & 0,00002 & 183,71 & 0,0 & 0,0 \\ 1,848 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 183,7 & 0,0008 \\ 10^{-6} & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0008 & 4,0 \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

Pour le poignet actif on obtient :

$$K_{12} = K_{13} = K_{14} = K_{25} = K_{26} = K_{34} = K_{35} = K_{36} = K_{45} = K_{46} = 0$$

et la matrice de raideur s'écrit :

$$K = k \begin{pmatrix} 0,1957 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,3451 & -0,0004 \\ 0,0 & 0,1957 & 3e^{-6} & -0,343 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 3e^{-6} & 6,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & -0,343 & 0,0 & 48,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,3451 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 47,886 & 0,0061 \\ -0,0004 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0061 & 6,175 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

Pour un manipulateur parallèle soigneusement construit la raideur des segments sera très élevée, et, par conséquent, sa raideur sera très forte.

8.4.1.2. Modèle poutre

On peut aussi modéliser les déformations des segments d'un robot parallèles en les assimilant à des poutres. La raideur d'un segment s'écrit alors :

$$k_i = \frac{ES}{\rho}$$

où E est le module de Young du matériau constitutif du segment, S la surface de la section d'une poutre et ρ sa longueur. Si K_a est la matrice diagonale telle que $K_{a_{ii}} = E_i S_i / \rho_i$ la matrice de raideur K s'écrit :

$$K = J^{-T} K_a J^{-1}$$

8.4.2. Complaisance passive

La raideur élevée des robots parallèles est une de leurs caractéristiques qui les a fait utiliser pour certaines applications. Toutefois il existe des cas où l'on désire obtenir une certaine flexibilité de la structure sans perdre toutefois les caractéristiques de précision de positionnement. C'est particulièrement le cas

en robotique, notamment pour les tâches où l'organe terminal peut entrer en contact avec l'environnement. Dans ces conditions une certaine «souplesse» du mécanisme permet d'obtenir une variation plus lente des forces de contact. De plus cette souplesse permettra aux forces de contact d'affecter la position de l'organe terminal, ce qui sera judicieux pour certaines tâches comme l'assemblage. On peut ainsi montrer [288] que les forces de contact dues aux erreurs d'alignement peuvent, si la matrice de raideur du système est convenablement choisie, générer des déformations qui vont corriger les erreurs. Ce principe est à la base des systèmes d'aide à l'assemblage comme le RCC de Whitney [460] qui est en fait un robot général sans actionneur, avec des segments élastiques.

Enfin sans entrer dans les détails des algorithmes de commande par retour d'efforts (étudiés par de nombreux auteurs [8, 15, 16, 80, 288, 371, 392, 431]) notons que la stabilité des schémas de commande en boucle fermée sur un capteur d'efforts est, en général, améliorée si la complaisance passive est présente.

Cette complaisance passive, nous l'avons vu, est toujours présente dans les manipulateurs séries, alors qu'elle est très réduite, pour des raisons structurales, dans les manipulateurs parallèles. Pour les robots séries elle n'est pas observable car les déformations dues à l'action des forces généralisées ne sont pas, en général, mesurées par les capteurs internes du robot : on ignore donc la position exacte de l'organe terminal lors d'un contact. De plus, cette complaisance passive est difficilement identifiable, non linéaire, et variable dans le temps.

Comme la complaisance passive est nécessaire pour certaines applications potentielles des manipulateurs parallèles, on peut l'introduire volontairement soit en choisissant des actionneurs possédant une certaine élasticité ou par un simple ajout dans l'architecture du mécanisme. Par exemple pour la «main gauche» de l'INRIA on a placé volontairement des amortisseurs à élasticité purement axiale dans chacun des segments. Contrairement au ma-

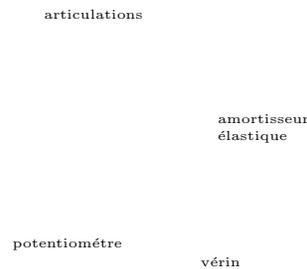


Figure 8.4: *Le montage des capteurs internes pour la «main gauche» qui permet la mesure des véritables variables articulaires.*

nipulateur série, la présence de cette complaisance passive n'affecte pas la

précision de positionnement si l'on prend la précaution de monter les capteurs internes de manière à prendre en compte les déformations des systèmes élastiques. La figure ?? montre comment sont montés les capteurs internes de la «main gauche» pour atteindre cet objectif. La mesure des capteurs internes permet à tout moment de disposer de la vraie valeur des variables articulaires et, par conséquent, de la position exacte du plateau mobile. Notons cependant que la raideur des éléments ajoutés doit être suffisamment importante, sous peine de la création d'une instabilité au niveau des asservissements de position des segments.

8.4.3. Cartes de raideur

Il peut être intéressant de disposer pour un manipulateur donné d'un «atlas» de la matrice de raideur en fonction de la configuration. A partir de cet atlas on pourra choisir une configuration de travail où la matrice de raideur correspond à celle nécessitée par la tâche.

8.4.3.1. Cartes d'iso-rigidité

Il n'est pas question, bien entendu, de présenter pour tous les types de manipulateur un atlas théorique mais l'on peut illustrer ce concept sur les deux cas particuliers que constituent la «main gauche» et le poignet actif.

Nous présentons les résultats d'un programme écrit par C. Gosselin [125] qui permet de calculer les courbes dans le plan $x-y$ définissant les positions du robot où une composante de la matrice de raideur est constante, c'est-à-dire les courbes d'*iso-rigidité*, et ceci uniquement dans l'espace atteignable. Le principe en est de discrétiser l'espace atteignable et de joindre chaque nœud ayant une rigidité voisine.

La figure ?? présente quelques courbes d'iso-rigidité placées en superposition sur la coupe de l'espace atteignable (pour une raideur unitaire des amortisseurs). La raideur k_x augmente lorsque le plateau mobile s'écarte de la position nominale selon l'axe x . Dans ce mouvement les deux segments opposés à l'axe x s'inclinent et un déplacement selon l'axe x nécessite des déformations plus grandes des amortisseurs. La position des courbes d'iso-rigidité pour la raideur k_y s'explique de la même manière. Les changements d'inclinaison des segments par rapport à l'axe z sont de faible importance dans l'espace de travail de la «main gauche» : ceci explique la faible variation de la raideur k_z . Pour les raideurs $k_{\theta_x}, k_{\theta_y}$ les faibles déplacements de la «main gauche» n'induisent pas de changement majeur dans la géométrie des segments antagonistes intervenant dans ces raideurs. En conséquence leurs valeurs restent sensiblement constantes. La carte de rigidité de k_{θ_z} est plus difficile à interpréter. On peut aussi tracer des surfaces d'iso-rigidité ainsi que des volumes de rigidité comme le montre la figure ??.

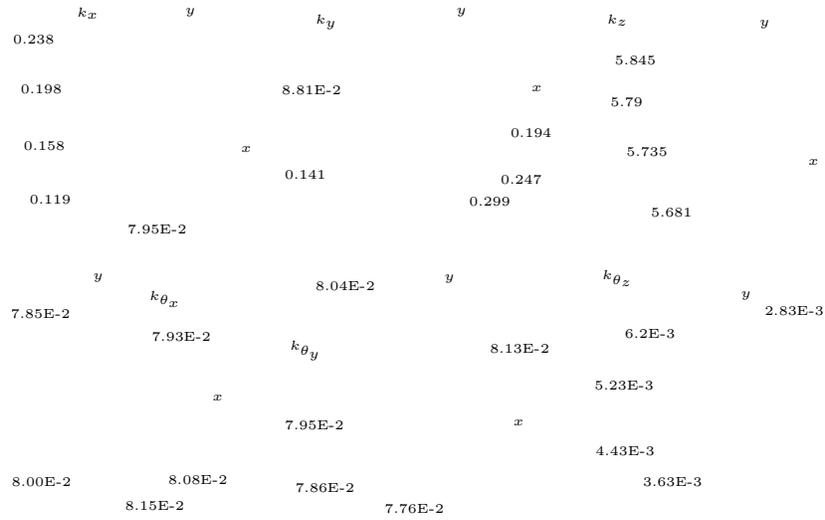


Figure 8.5: Courbe d'iso-rigidité pour la «main gauche» INRIA ($z_c=53,3$ - $\psi = \theta = \phi = 0$).

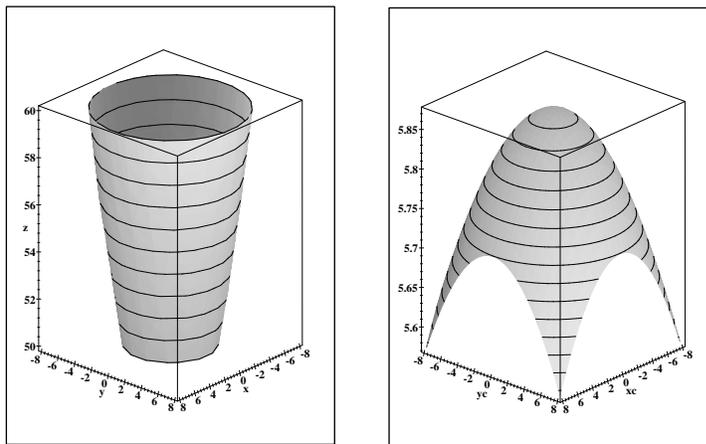


Figure 8.6: A gauche surface d'iso-rigidité $k_z = 5,8$ pour la «main gauche» de l'INRIA. A droite raideur k_z en fonction de la position en $x-y$ de la plate-forme

La figure ?? montre quelques courbes d'iso-rigidité pour le poignet actif lorsque la matrice de rotation R est égale à l'identité. Si l'on se réfère à cette

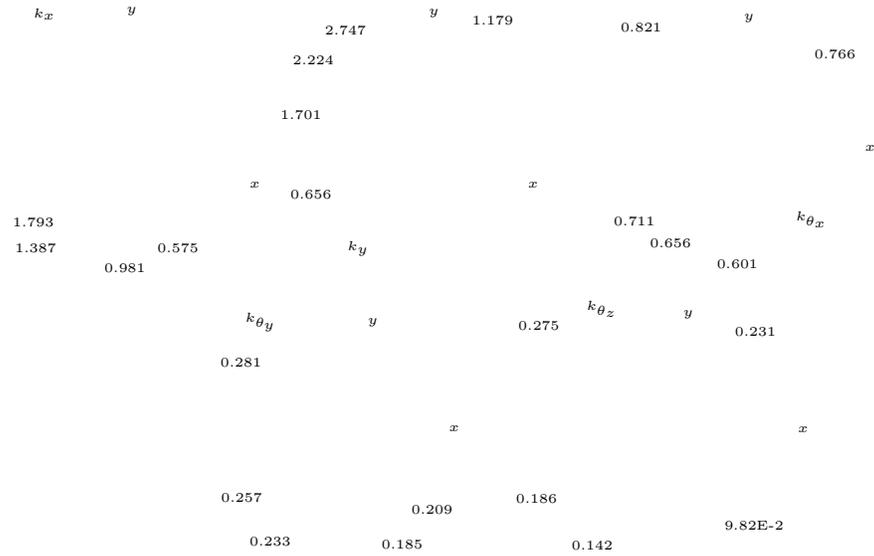


Figure 8.7: Courbe d'iso-rigidité pour le poignet actif ($z_c = 19, \psi = \theta = \phi = 0$).

figure on voit que la raideur en x augmente lorsqu'on s'éloigne de la position nominale en x : les segments sont alors inclinés et une partie de la force articulaire est annulée par la force de réaction du guide du vérin (il en est de même pour les mouvements en y et la raideur k_y). Pour les raideurs $k_{\theta_x}, k_{\theta_y}$, une rotation autour de l'axe x (y) revient approximativement à faire sortir ou rentrer ensemble les segments situés respectivement à gauche et à droite de l'axe x (y) du plateau mobile, indépendamment de la position sur l'axe x (y) du plateau. Plus la position du plateau augmente sur l'axe y (x) plus les segments sont inclinés et donc une plus grande partie de la force articulaire est annulée par la force de réaction du guide du vérin. On pouvait donc s'attendre à obtenir des lignes d'iso-rigidité parallèles à l'axe x (y), ce qui est approximativement le cas. La carte de rigidité de k_{θ_z} est plus difficile à interpréter.

Les résultats ci-dessus prouvent que, dans une certaine mesure, il est possible d'ajuster la raideur du manipulateur en fonction de la tâche à effectuer simplement en modifiant sa configuration de travail.

8.4.3.2. Analyse de l'iso-rigidité : cas du robot général

Dans cette section on suppose que l'orientation de la plate-forme est constante et on s'intéresse aux lieux d'iso-rigidité en fonction de la position de C .

Considérons tout d'abord le terme k_x de la matrice de raideur. Il est facile de montrer que ce terme s'écrit sous la forme :

$$k_x = k \sum_{i=1}^{i=6} \frac{(x_c - x_{a_i} + x_{b_i})^2}{(x_c - x_{a_i} + x_{b_i})^2 + (y_c - y_{a_i} + y_{b_i})^2 + z_c^2} = k \sum_{i=1}^{i=6} T_i(x_c) \quad (8.11)$$

Pour un SSM les symétries nous permettent de déterminer que :

$$T_1(\epsilon x_c) = T_2(-\epsilon x_c) \quad T_3(\epsilon x_c) = T_6(-\epsilon x_c) \quad T_4(\epsilon x_c) = T_5(-\epsilon x_c)$$

avec $\epsilon = \pm 1$. On en déduit que $k_x(x_c) = k_x(-x_c)$ et que, par conséquent, les courbes d'iso-rigidité de k_x dans un plan horizontal sont symétriques par rapport à l'axe y . Supposons maintenant que le robot soit très élancé et donc que :

$$z_c \gg x_c - x_{a_i} + x_{b_i} \quad z_c \gg y_c - y_{a_i} + y_{b_i}$$

Nous posons :

$$x_i = x_c - x_{a_i} + x_{b_i} \quad y_i = y_c - y_{a_i} + y_{b_i}$$

En développant au premier ordre l'équation (??) on obtient :

$$k_x \approx k \sum_{i=1}^{i=6} \frac{x_i^2}{z_c^2} - \frac{x_i^4}{z_c^4} - \frac{x_i^2 y_i^2}{z_c^4} \quad (8.12)$$

En développant, l'équation de la surface d'iso-rigidité $k_x = K_x$ s'écrit sous la forme :

$$-6x_c^4 - 6x_c^2 y_c^2 + a_2 x_c^2 + a_3 y_c^2 + a_4 y_c + a_5 = \frac{K_x z_c^4}{k} \quad (8.13)$$

Les coefficients a_i sont uniquement dépendants de la géométrie du mécanisme. De la même manière pour le terme k_y on obtient :

$$k_y = k \sum_{i=1}^{i=6} \frac{y_i^2}{x_i^2 + y_i^2 + z_c^2} = k \sum_{i=1}^{i=6} S_i(x_c) \quad (8.14)$$

Pour un SSM compte tenu des symétries on a :

$$S_1(\epsilon x_c) = S_2(-\epsilon x_c) \quad S_3(\epsilon x_c) = S_6(-\epsilon x_c) \quad S_4(\epsilon x_c) = S_5(-\epsilon x_c)$$

avec $\epsilon = \pm 1$. La courbe d'iso-rigidité dans un plan horizontal sera donc symétrique par rapport à l'axe y . En développant l'équation (??) au premier ordre on obtient :

$$k_y \approx k \sum_{i=1}^{i=6} \frac{y_i^2}{z_c^2} - \frac{y_i^4}{z_c^4} - \frac{x_i^2 y_i^2}{z_c^4} \quad (8.15)$$

En développant et en tenant compte des symétries l'équation de la surface d'iso-rigidité $k_y = K_y$ s'écrit sous la forme :

$$-6y_c^4 - 6x_c^2y_c^2 + b_2x_c^2 + b_3y_c^2 + b_4y_c + b_5 = \frac{K_y z_c^4}{k} \quad (8.16)$$

Enfin pour le terme k_z on a :

$$k_z = k \sum_{i=1}^{i=6} \frac{z_c^2}{x_i^2 + y_i^2 + z_c^2} = k \sum_{i=1}^{i=6} S_i(x_c) \quad (8.17)$$

ce qui donne, développé au premier ordre :

$$k_z \approx 6k - k \sum_{i=1}^{i=6} \frac{x_i^2 + y_i^2}{z_c^2} \quad (8.18)$$

La surface d'iso-rigidité est donc un cône de section circulaire, dont l'axe est vertical.

8.4.3.3. Analyse de l'iso-rigidité : cas du poignet actif

Nous pouvons effectuer le même type d'analyse que pour le robot général. La raideur k_x s'écrit sous la forme :

$$k_x = k \sum_{i=1}^{i=6} \frac{(x_c - x_{a_i} + x_{b_i})^2}{(z_c - l_i)^2} \quad (8.19)$$

où l_i représente la longueur de déplacement du point d'articulation du segment i . Mais nous avons :

$$(z_c - l_i)^2 = \rho^2 - (x_c - x_{a_i} + x_{b_i})^2 - (y_c - y_{a_i} + y_{b_i})^2$$

où ρ représente la longueur du segment i (supposé identique pour tous). On en déduit :

$$k_x = k \sum_{i=1}^{i=6} \frac{(x_c - x_{a_i} + x_{b_i})^2}{\rho^2 - (x_c - x_{a_i} + x_{b_i})^2 - (y_c - y_{a_i} + y_{b_i})^2} \quad (8.20)$$

et, en supposant que le manipulateur est assez élancé, nous obtenons :

$$k_x \approx k \sum_{i=1}^{i=6} \frac{x_i^2}{\rho^2} + \frac{x_i^4}{\rho^4} + \frac{x_i^2 y_i^2}{\rho^4} \quad (8.21)$$

En développant, l'équation de la courbe d'iso-rigidité dans un plan horizontal s'écrit sous la forme :

$$6x_c^4 + 6x_c^2y_c^2 + a_2x_c^2 + a_3y_c^2 + a_4y_c + a_5 = 0 \quad (8.22)$$

où k_x n'intervient que dans le coefficient a_5 . On obtient de la même manière :

$$k_y \approx k \sum_{i=1}^{i=6} \frac{y_i^2}{\rho^2} + \frac{y_i^4}{\rho^4} + \frac{x_i^2 y_i^2}{\rho^4} \quad (8.23)$$

En développant, l'équation de la courbe d'iso-rigidité dans un plan horizontal s'écrit sous la forme :

$$6y_c^4 + 6x_c^2 y_c^2 + b_2 x_c^2 + b_3 y_c^2 + b_4 y_c + b_5 = 0 \quad (8.24)$$

et l'on a $k_z = 1$ quelle que soit la configuration du manipulateur.

8.5. Extremums des raideurs dans un espace de travail

Dans cette section on va chercher à calculer les extremums des raideurs d'un robot général élané alors que C balaye un espace de travail donné. On s'intéresse ici à la détermination des valeurs extrémales des raideurs principales, c'est-à-dire des éléments diagonaux de la matrice K . On va procéder selon la manière classique : on cherche les extremums lorsque C se déplace sur un segment, puis dans un rectangle, et enfin dans un parallélépipède rectangle. Après avoir établi l'algorithme pour les parallélépipèdes on utilisera une méthode de bisection pour calculer les extremums dans tout type d'espace de travail.

8.5.1. Extremums pour un segment

Supposons que le point C se déplace sur un segment défini par ses deux extrémités M_1, M_2 . Toute position de C peut alors être définie par :

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OM}_1 + \lambda \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \quad (8.25)$$

où λ est un scalaire dans l'intervalle $[0,1]$. Toutes les raideurs principales s'écrivent alors sous la forme générique suivante :

$$k_{x,y,z,tz,ty,tz} = \sum_{i=1}^{i=6} k_i \frac{a_i \lambda^2 + b_i \lambda + c_i}{A_i \lambda^2 + B_i \lambda + C_i} \quad (8.26)$$

où les coefficients a, b, c, A, B, C dépendent simplement de la raideur choisie, du segment trajectoire et des constantes géométriques du segment i .

La dérivation de l'équation (??) par rapport à λ conduit à un polynôme de degré 22 en λ (et de degré 21 si $a_i = b_i = 0$). Les raideurs extrêmes seront donc obtenues soit pour $\lambda = 0, 1$ où pour une racine de ce polynôme.

8.5.2. Extremums pour un rectangle

Dans cette section et les suivantes on suppose que le robot est élané et l'on adopte les formules simplifiées présentées dans la section ?? Supposons que l'espace de travail soit défini comme un rectangle horizontal telles que :

$$x_1 \leq x_c \leq x_2 \quad y_1 \leq y_c \leq y_2$$

On cherche donc les extremums des raideurs articulaires sous ces contraintes, ce qui peut se résoudre à l'aide des techniques classiques d'optimisation. On définit deux nouvelles variables α, β tel que :

$$x_c = x_1 + \frac{(1 + \sin \alpha)(x_2 - x_1)}{2} \quad y_c = y_1 + \frac{(1 + \sin \beta)(y_2 - y_1)}{2}$$

On peut alors poser le problème de la détermination des extremums des raideurs en terme d'optimisation en fonction des inconnues α, β . Soit k_r un des éléments de la diagonale de K . La dérivation de k_r par rapport aux inconnues donne deux équations qui s'écrivent :

$$\frac{\partial k_r}{\partial \alpha} = \cos(\alpha)F_1(\alpha, \beta) = 0 \quad \frac{\partial k_r}{\partial \beta} = \cos(\beta)F_2(\alpha, \beta) = 0$$

Les extremums seront donc obtenus soit sur une arête du rectangle (ce que l'on peut calculer avec l'algorithme de la section précédente) soit pour un point à l'intérieur du rectangle correspondant au cas $F_1 = F_2 = 0$. On obtient alors les résultats suivants :

- Raideur k_x : F_2 est linéaire en $\sin \beta$ et après résolution F_1 devient un polynôme de degré 7 en $\sin \alpha$.
- Raideur k_y : F_1 est linéaire en $\sin \alpha$ et après résolution F_2 devient un polynôme de degré 7 en $\sin \beta$.
- Raideur k_z : F_1 est linéaire en $\sin \alpha$ et ne contient pas l'inconnue β et F_2 est linéaire en $\sin \beta$ et ne contient pas l'inconnue α .
- Raideur k_{θ_x} : F_1 est linéaire en $\sin \alpha$ et après résolution F_2 devient un polynôme de degré 7 en $\sin \beta$.
- Raideur k_{θ_y} : F_2 est alors linéaire en $\sin \beta$ et après résolution F_1 devient un polynôme de degré 7 en $\sin \alpha$.
- Raideur k_{θ_z} : le résultant de F_1, F_2 est un polynôme de degré 9 en $\sin \beta$.

Supposons maintenant que le rectangle soit vertical. On peut remarquer que dans les expressions des valeurs approchées des raideurs principales le terme z_c n'intervient que dans le dénominateur des expressions. Ceci implique que les extremums des raideurs pour ce type d'espace de travail seront obtenus obligatoirement sur une arête horizontale.

8.5.3. Extremums pour un parallélépipède rectangle

L'argument que nous avons utilisé pour montrer que seules les arêtes horizontales sont importantes pour la détermination des extremums lorsque l'espace de travail est un rectangle vertical peut être repris ici. On en déduit que les extremums des raideurs pour une boîte seront obtenus en considérant simplement les deux faces horizontales de la boîte.

8.5.4. Raideurs extrémales pour un espace quelconque

Supposons finalement que l'espace de travail soit défini par un ensemble de coupes polygonales horizontales à différentes hauteurs, contenant le même nombre de sommets. Entre deux sections l'espace de travail est le polyèdre obtenu en joignant les sommets de même numéro des deux polygones

On ne considère que l'espace de travail compris entre deux sections, qui va être décomposé en autant de boîtes que nécessaire pour déterminer les raideurs extrémales avec la précision ϵ souhaitée. Une liste de boîtes, initialisée avec la boîte englobante de l'espace de travail B_0 , est maintenue à jour dans l'algorithme. De plus un tableau T est créé pour sauvegarder les raideurs extrémales.

A l'itération k l'algorithme effectue les étapes suivantes :

1. si la boîte B_k est complètement en dehors de l'espace de travail on passe à la boîte suivante dans la liste
2. si la boîte B_k est complètement à l'intérieur de l'espace de travail on calcule les raideurs extrémales pour cette boîte. Le tableau des raideurs extrémales est mis à jour.
3. si la boîte B_k est partiellement à l'intérieur de l'espace de travail on calcule les raideurs extrémales pour cette boîte :
 - (a) si les extremums des raideurs pour la boîte sont tous compris dans les intervalles de T on passe à la boîte suivante.
 - (b) si pour la boîte les écarts entre les extremums de chaque raideur principale sont inférieurs à ϵ on met à jour T avec ces extremums et l'on passe à la boîte suivante.
 - (c) dans les autres cas on coupe la boîte. L'algorithme de division prend en compte le fait que l'on a peu intérêt à découper les boîtes selon l'axe z . On procède de la manière suivante :
 - i. on découpe la boîte en deux selon l'axe x . Si l'une des boîtes est entièrement à l'intérieur de la région on substitue la boîte courante par celle-ci et l'on rajoute l'autre boîte issue de la bissection à la fin de la liste.

- ii. si la bisection précédente n'a pas permis de trouver de boîte à l'intérieur on procède à une bisection selon l'axe y selon le même principe
- iii. si on n'a toujours pas trouvé de boîte complètement à l'intérieur on procède à une bisection sur les axes x, y . Si l'une des quatre boîtes créées est à l'intérieur de la région on la substitue à la boîte courante et l'on met les trois autres boîtes en fin de liste.
- iv. sinon on crée 8 nouvelles boîtes à partir de B_k en divisant chacune de ses dimensions par 2. Ces boîtes sont placées à la fin de la liste et l'on passe à la boîte suivante

L'algorithme stoppe lorsque la liste est vide. Il permet de calculer les raideurs extrémales pour des espaces de travail complexe dans un temps raisonnable. Pour un polyèdre le temps de calcul avec une erreur de 0.1% est de l'ordre de 250 secondes.

Cet algorithme peut être étendu pour déterminer les extremums des raideurs dans un espace défini par un hypercube dans les coordonnées articulaires. Pour cela on utilise l'algorithme, décrit dans le chapitre «Modèle géométrique», permettant de calculer les extremums des coordonnées articulaires pour toute position de C dans un parallélépipède rectangle, ce qui permet de statuer sur l'appartenance de la boîte à l'espace de travail. Les tests d'appartenance de la boîte à l'espace de travail de l'algorithme précédent sont alors remplacés par cette nouvelle procédure.

8.6. Équilibrage

Un problème intéressant, mais très peu traité dans la littérature, est l'équilibrage des robots parallèles. Prenons l'exemple d'un robot parallèle plan situé dans un plan vertical. La masse des segments induit des forces généralisées qui font que pour préserver une posture donnée il sera nécessaire d'actionner les moteurs. L'équilibrage consiste à rajouter soit des contrepoids, soit des ressorts, pour que dans toutes les configurations le robot soit en équilibre statique. Le problème est d'arriver à déterminer la masse et la position des contrepoids sur les segments ou la raideur et la position des points d'attache des ressorts. Ce cas particulier a été traité par Jean [204] qui propose des solutions. Mais le cas des mécanismes spatiaux n'a pas été traité dans la littérature.

Dans le même ordre d'idée on peut s'intéresser au problème du modèle géométrique direct des manipulateurs parallèles à la lumière d'un équilibre statique. Par exemple, Lösch [264] s'intéresse aux configurations d'équilibre d'un robot plan de type 3 – $R\underline{P}R$ dont l'articulation prismatique de chaque segment est passive mais soumise à l'action d'un ressort agissant selon son axe.

8.7. Exercices

Exercice 8.1: On considère un robot ayant une limite sur chacune de ses force articulaires et soumis à une force pure, horizontale. Déterminer les forces maximales qui lui sont applicables dans une posture donnée en traçant la zone des forces permises dans le plan $F_x - F_y$.

Exercice 8.2: On considère un robot général élané, dont la plate-forme se déplace dans un plan horizontal, avec une orientation constante, et dont les forces articulaires sont bornées individuellement. Déterminer le lieu des points dans le plan $x - y$ où la force F_z maximum est constante.

Exercice 8.3: On considère un robot général élané, dont la plate-forme plane se déplace dans un plan horizontal, avec une orientation constante $\psi = 0, \theta = 0, \phi = 0$ et dont les forces articulaires sont bornées individuellement. La plate-forme est soumise à un couple M_y pur. Déterminer le lieu des points dans le plan $x - y$ où le moment M_y pourra être maximum.

Exercice 8.4: On considère un robot plan de type 3 - RPR dont les coordonnées des points A_i, B_i sont :

$$A_1 = (0, 0) \quad A_2 = (5, 0) \quad A_3 = (2, 4) \quad B_1 = (0, 0) \quad B_2 = (2, 0) \quad B_3 = (1, 2)$$

soumis au torseur d'efforts $F_x = 1, F_y = 0, M_z = 0$ alors que le point A_1 décrit le segment allant de $(3,3)$ à $(5,3)$ avec une orientation définie par $\theta = 0$. Déterminer les extremums des forces articulaires s'exerçant sur les segments.

Exercice 8.5: Reprendre le problème précédent en supposant que le robot se déplace dans un rectangle dont les coins sont situés en $(3,3), (5,5)$.

Exercice 8.6: Trouvez le centre des courbes d'iso-rigidité $k_z = K_z$ dans un plan horizontal d'un robot général élané. En déduire que pour un SSM avec $\psi = 0, \theta = 0, \phi = 0$ l'axe de la surface d'iso-rigidité passe par le point de coordonnées $(0,0,0)$.

Problème 8.1: Déterminer les extremums des forces articulaires agissant sur un robot général soumis à un torseur d'effort donné alors que la plate-forme se déplace dans un espace de travail donné.

Problème 8.2: Déterminer les extremums des forces généralisées agissant sur un robot général dont les forces articulaires sont bornées alors que la plate-forme se déplace dans un espace de travail donné.

Problème 8.3: Établir la matrice de raideur d'un robot général dont la longueur à vide des segments est ρ_i^0 et la longueur courante est ρ .

Problème 8.4: Déterminer les extremums des raideurs pour un robot général non élané pour un espace de travail donné.

Problème 8.5: Déterminer comment équilibrer à l'aide de contrepoids un robot général dont l'axe z est horizontal. Reprendre ce problème si l'équilibrage se fait avec des ressorts.

Table des matières

Chapitre 9

Dynamique

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la détermination des relations fournissant les accélérations cartésiennes et angulaires comme fonction des forces articulaires ainsi qu'aux relations réciproques, c'est-à-dire à l'établissement du *modèle dynamique direct* et du *modèle dynamique inverse*. Nous montrons que la quantité de calcul nécessaire à l'implantation d'une commande dynamique est importante.

9.1. Introduction

L'établissement des modèles dynamiques pour les chaînes cinématiques fermées est un point de passage obligé pour établir un schéma de commande pour les manipulateurs rapides. Ce sujet a fait l'objet de nombreuses publications généralistes [219, 319, 335] qui ont montré que le problème était complexe.

L'existence de robots parallèles rapides a suscité une abondante littérature sur les modèles dynamiques et sur leur utilisation pour la commande : robots à 3 degrés de liberté, soit plans [268, 426] ou spatiaux [35, 61, 65, 71, 251, 374, 427], robot «Hexa» [29, 66, 356], robots à câbles [213], manipulateurs hybrides série-parallèle [408, 340], système de robots [254], robots parallèles flexibles [247], robots binaires [57] ainsi que pour des manipulateurs composés d'un robot porteur et d'un micro-manipulateur [216, 217]. Le cas du robot général a été étudié par divers auteurs [90, 118, 227, 243, 328, 371, 374, 426, 454], parfois pour déterminer ces modes vibratoires [171, 172].

A l'opposé notons qu'il existe aussi une école préconisant de ne pas utiliser les modèles dynamiques en raison de trop grosses erreurs de modélisation (certains paramètres du modèle sont effectivement difficile à estimer, même s'il a

été proposé des méthodes d'estimation en ligne [38]) qui préfère en rester à une commande axe par axe, mais plus robuste qu'un simple PID [55]. Un autre argument de cette école est que l'établissement d'un modèle dynamique utilisable bute à la fois sur le modèle lui même mais aussi sur le difficile problème du modèle géométrique direct, toujours présent dans les modèles.

Devaquet [87] et Pierrot [357] se sont plus spécialement intéressés aux modèles dynamiques du robot «Delta» pour aboutir à une formulation du modèle dynamique inverse (forces articulaires pour obtenir une accélération donnée de la plate-forme). Une étude complète de ce modèle reposant sur le principe des travaux virtuels a été proposée par Clavel [61]. Codourey [65] a proposé quant à lui un modèle dynamique inverse simplifié (les inerties des barres parallèles sont négligées et leur masse distribuée aux deux extrémités) reposant sur le formalisme de Newton-Euler, calculable sur transputer en environ 750 μ s. Ce modèle a été utilisé pour la commande d'un robot «Delta» à entraînement direct, en particulier pour des tâches de transfert rapide où des clothoïdes constituent le profil de la trajectoire. Ultérieurement Miller, un autre membre de l'équipe de Clavel, a montré que l'on pouvait aussi obtenir le modèle dynamique inverse du «Delta» en utilisant le formalisme de Lagrange, en choisissant astucieusement les variables [301]. Ultérieurement cet auteur a proposé d'utiliser le principe d'Hamilton qui permet de ne pas avoir à calculer ou mesurer les accélérations [302]. Toujours dans la même équipe Guglielmetti [149] a montré que l'on pouvait aussi obtenir le modèle complet en utilisant la formulation de Newton-Euler si l'on accepte que soit utilisées les variables articulaires et les variables cartésiennes. Dans la même équipe mentionnons le travail de Ghorbel [122] qui tente d'établir un modèle dynamique compact dans un domaine déterminé en écrivant tout d'abord les modèles des branches puis en rajoutant les contraintes de fermeture.

Do [90] utilise le formalisme de Newton-Euler pour trouver le modèle dynamique inverse d'un robot général. Il fait l'hypothèse que le centre de masse d'un segment est constamment placé au milieu du segment et que le plateau mobile est un disque (ce qui simplifie son tenseur d'inertie). Sous ces conditions les forces articulaires deviennent solution d'un système linéaire de 6 équations. A partir de ce résultat cet auteur propose un algorithme de génération de trajectoire incluant le modèle dynamique, qu'il teste sur différentes trajectoires en simulation. Malheureusement cet algorithme est assez complexe et l'auteur n'indique pas de temps de calcul. Nous pouvons cependant suspecter qu'il est trop important pour que l'algorithme puisse être réellement implanté. Sugimoto [427] utilise une méthode similaire à celle de Do. Reboulet [374] s'intéresse au modèle direct d'un SSM, en faisant l'hypothèse simplificatrice raisonnable que la position du centre de masse des segments ne varie pas le long du segment et en utilisant le formalisme de Newton-Euler. Il obtient un modèle plus simple que celui de Do, qu'il simplifie encore plus en supposant que le manipulateur évolue toujours autour de sa position nominale. Bénéa [32]

utilise lui aussi le formalisme de Newton-Euler pour obtenir les modèles dynamiques d'une variante de l'«Hexa» et Helinski [164] l'utilise pour établir les modèles d'un SSM utilisé pour la simulation d'une tourelle de char.

Nguyen [328] utilise, quant à lui, le formalisme de Lagrange pour établir un modèle dynamique complet, qui reste cependant extrêmement théorique quant à son utilisation réelle. Il est établi cependant que dans la pratique pour des manipulateurs de type SSM on peut trouver une borne sur la vitesse des actionneurs linéaires permettant de négliger les forces de Coriolis et d'inertie. Nguyen fait remarquer aussi que la disposition des points d'articulation sur les plateaux joue un rôle important : plus la base est proche d'un triangle et la plate-forme proche d'un hexagone régulier plus la puissance des actionneurs pourra être faible. Fujimoto [112], Geng [118] et Liu [259, 260, 263] utilisent eux aussi le formalisme de Lagrange pour établir les modèles d'un robot général. Ils ne rentrent cependant pas dans le détail des calculs et ne donne aucune indication sur leur complexité.

Hoffman [171, 172] s'est intéressé à la détermination des fréquences propres d'un manipulateur de type SSM avec des actionneurs hydrauliques. Il suppose que l'huile a une certaine élasticité et modélise simplement chaque segment à l'aide de ressorts. Un logiciel d'analyse des vibrations est ensuite utilisé pour déterminer les fréquences propres. Dans le domaine des vibrations Geng [119] a proposé d'interposer un robot général entre deux structures pour faire du contrôle actif.

Ji [207] s'est particulièrement intéressé à l'influence de l'inertie des segments dans le calcul des modèles dynamiques en montrant que pour une plate-forme de Gough l'inertie des segments pouvait être attribuée à la plate-forme, ce qui permet de se ramener à une étude où l'inertie des segments est nulle.

Ait-Ahmed [4] a proposé un algorithme pour le calcul des modèles dynamiques reposant sur l'utilisation des chaînes arborescentes. Nous allons étudier ici ce type d'algorithme et ses limites sur l'exemple du MSSM.

9.2. Modèle dynamique inverse d'un MSSM

La méthode classique de construction des modèles dynamiques des chaînes fermées a été proposée sous diverses formes dans [219, 285, 319, 380]. Pour un mécanisme comportant N corps et L liaisons elle consiste à calculer le modèle dynamique d'un mécanisme arborescent obtenu à partir du mécanisme original par coupure de certaines liaisons passives de façon à ce que le mécanisme arborescent compte autant de boucles indépendantes $B = L - N$ que le mécanisme original. Ainsi pour un MSSM comprenant 31 corps et 36 liaisons on obtient un mécanisme arborescent à 5 boucles indépendantes en coupant le MSSM au niveau des liaisons sphériques de la plate-forme. Le nombre de liaisons de ce mécanisme est égal au nombre de corps soit 31 (figure ??). Parmi ces liaisons nous avons 6 liaisons actives connues et donc 25 liaisons élémentaires passives

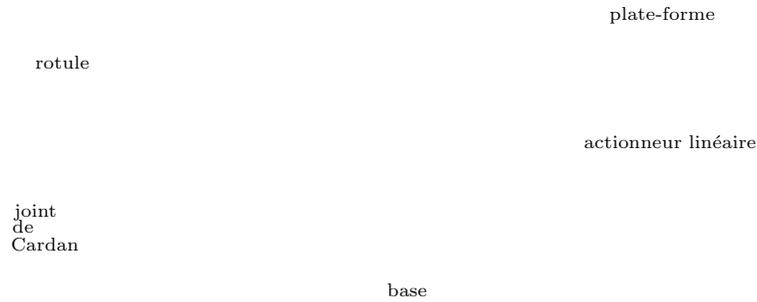


Figure 9.1: *Le modèle arborescent utilisé par les méthodes classiques pour la construction des modèles dynamique (d'après [4])*

pour lesquelles on doit écrire une équation de contrainte. Ces équations sont ensuite introduites dans le modèle dynamique du mécanisme arborescent à l'aide des multiplicateurs de Lagrange pour obtenir le modèle dynamique du mécanisme original. On voit ainsi que le nombre de multiplicateur est élevé, ce qui rend la résolution délicate.

La méthode proposée par Ait-Ahmed consiste à couper plus de liaisons passives que dans la méthode classique. Ainsi pour le MSSM le mécanisme arborescent est obtenu en supprimant la plate-forme et les liaisons rotule c'est-à-dire en supprimant 18 liaisons passives (figure ??). Le mécanisme obtenu ne contient que 18 liaisons dont 12 nécessitent l'écriture d'équations de contrainte, soit moins de la moitié par rapport à la méthode classique. Quant aux corps supprimés leurs inerties seront rajoutées au torseur des forces extérieures. L'ajout



Figure 9.2: *Le modèle arborescent utilisé dans la méthode d'Ait-Ahmed pour la construction des modèles dynamique (d'après [4])*

des contraintes au modèle dynamique du mécanisme arborescent se fait par l'introduction de 12 multiplicateurs de Lagrange qui s'obtiennent facilement à partir de l'inverse d'une matrice ω_b de dimension 12×12 avec :

$$\omega_b = \frac{\partial S}{\partial q_b}$$

où q_b représente les paramètres des 12 liaisons et S la matrice ligne des 12

équations de contraintes. Pour le MSSM, Ait-Ahmed réussit à établir une forme symbolique de l'inverse de ω_b en raison de la structure particulière de la matrice. Ainsi est obtenu un modèle dynamique inverse symbolique d'un MSSM, sans hypothèse simplificatrice, calculable dans un temps inférieur à 16 ms. Notons que ce temps est encore loin de satisfaire les contraintes du temps réel.

La limitation de cette méthode est bien sur due à la nécessité du calcul de l'inverse d'une matrice 12 x 12. Ainsi Ait-Ahmed fait remarquer que pour le SSM la matrice ω_b perd sa structure particulière et qu'il n'a pas été possible de calculer son inverse. Il est donc nécessaire de procéder à une inversion numérique coûteuse en temps.

9.3. Modèles dynamiques d'un SSM

Pour illustrer la complexité des calculs des modèles dynamiques nous allons étudier le cas du SSM en commençant par le modèle direct.

9.3.1. Hypothèses et notation

Pour ce calcul nous adoptons les hypothèses suivantes :

- les segments sont de masse nulle et leurs tenseurs d'inertie I_i , exprimés dans le repère lié au segment, d'origine A_i , est :

$$I_i = \begin{pmatrix} J_i & 0 & 0 \\ 0 & J_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- la masse des segments est négligée

Le centre de gravité de l'organe terminal est noté G , sa masse m et son tenseur d'inertie I . L'accélération du point G est notée γ_G . Pour un vecteur \mathbf{v} de composantes (x, y, z) nous notons $\bar{\mathbf{v}}$ la matrice telle que :

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{a} = \bar{\mathbf{v}} \mathbf{a} \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

9.3.2. Principe de l'algorithme

La force \mathbf{f}_i exercée au point B_i se décompose en :

- une composante dirigée selon le vecteur unitaire du segment \mathbf{n}_i , qui n'est autre que la force articulaire τ_i , supposée connue.

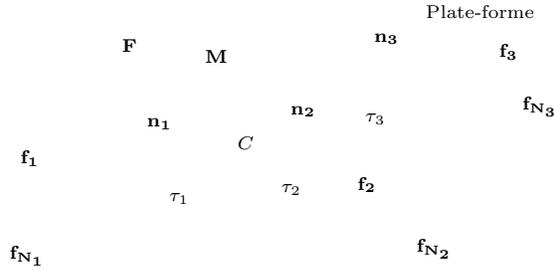


Figure 9.3: *Forces externes, articulaires et d'inertie exercées sur la plate-forme d'un manipulateur parallèle*

- une composante normale au vecteur \mathbf{n}_i , due à l'inertie, qui sera notée \mathbf{f}_{N_i} (figure ??).

Dans un premier temps nous supposons que l'on connaît le vecteur \mathbf{f}_i , c'est-à-dire, en fait, le vecteur \mathbf{f}_{N_i} . Nous avons :

$$\mathbf{f}_i = \tau_i \mathbf{n}_i + \mathbf{f}_{N_i} \quad (9.1)$$

Nous notons \mathbf{F}_N la force résultante de l'action des forces \mathbf{f}_{N_i} et \mathbf{M}_N leur moment résultant par rapport au point C . Si l'on note \mathbf{F} et \mathbf{M} la force et le moment par rapport au point C appliqués sur l'organe terminal, la condition d'équilibre s'écrit :

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{i=6} \tau_i \mathbf{n}_i + \mathbf{F}_N \quad (9.2)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{i=6} \tau_i (\mathbf{CB}_i \wedge \mathbf{n}_i) + \mathbf{M}_N \quad (9.3)$$

Soit σ_N et σ les vecteurs de dimension 6 définis par :

$$\sigma_N = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_N \\ \mathbf{M}_N \end{bmatrix} \quad \sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

L'équation (??) s'écrit :

$$\sigma = J^{-T} \tau + \sigma_N \quad (9.5)$$

Le moment \mathbf{M}_G appliqué sur l'organe terminal par rapport au point G est :

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{M} + \mathbf{GC} \wedge \mathbf{F} \quad (9.6)$$

Les équations de Newton-Euler s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{F} + m\mathbf{g} &= m\gamma_G \\ \mathbf{M}_G &= I\dot{\Omega} + \Omega \wedge I\Omega \end{cases} \quad (9.7)$$

A partir de l'accélération $\gamma_{\mathbf{G}}$ on déduit l'accélération de C , notée $\gamma_{\mathbf{C}}$, par :

$$\gamma_{\mathbf{C}} = \gamma_{\mathbf{G}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{GC} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GC}) \quad (9.8)$$

d'où :

$$\mathbf{F} + m\mathbf{g} = m(\gamma_{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{GC}}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GC}) \wedge \boldsymbol{\Omega}) \quad (9.9)$$

De cette équation et des équations (??,??,??) on tire :

$$\mathbf{M} = (I - m\overline{\mathbf{GC}}^2)\dot{\boldsymbol{\Omega}} - m\overline{\mathbf{GC}}\gamma_{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge I\boldsymbol{\Omega} - m\overline{\mathbf{GC}}(\mathbf{g} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GC})) \quad (9.10)$$

On pose :

$$\omega = ((\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GC}) \wedge \boldsymbol{\Omega})$$

On peut écrire les équations (??),(??) sous forme matricielle :

$$\sigma = T_1 \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{T}_2 \quad (9.11)$$

où $\dot{\mathbf{W}}$ représente la dérivée du torseur cinématique, T_1 est une matrice 6×6 et \mathbf{T}_2 un vecteur de dimension 6, définis par :

$$T_1 = \begin{pmatrix} mI_{33} & m\overline{\mathbf{GC}} \\ -m\overline{\mathbf{GC}} & I - m\overline{\mathbf{GC}}^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} m\omega - m\mathbf{g} \\ \boldsymbol{\Omega} \wedge I\boldsymbol{\Omega} + m\overline{\mathbf{GC}}(\omega - \mathbf{g}) \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

où I_{33} représente la matrice identité d'ordre 3. Des équations (??),(??) on déduit :

$$T_1 \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{T}_2 = J^{-T} \tau + \sigma_{\mathbf{N}} \quad (9.13)$$

Cette équation conclut la première étape de notre calcul. Nous avons établi la dérivée du torseur cinématique en C en fonction des forces articulaires et du torseur des forces normales aux segments. Ce torseur s'exprime lui aussi en fonction de la dérivée du torseur cinématique et c'est cette relation que nous allons déterminer maintenant.

Notons γ_i l'accélération du point B_i . On a :

$$\gamma_i = \gamma_{\mathbf{C}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{CB}_i + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{CB}_i) \quad (9.14)$$

que l'on réécrit sous forme matricielle :

$$\gamma_i = U_{1_i} \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{U}_{2_i} \quad (9.15)$$

où U_{1_i} est une matrice 3×6 et \mathbf{U}_{2_i} un vecteur de dimension 3, définis par :

$$U_{1_i} = \begin{pmatrix} I_{33} & -\overline{\mathbf{CB}_i} \end{pmatrix} \quad \mathbf{U}_{2_i} = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{CB}_i) \quad (9.16)$$

La projection $\gamma_{\mathbf{N}_i}$ de γ_i dans un plan normal à \mathbf{n}_i est donnée par :

$$\gamma_{\mathbf{N}_i} = (\mathbf{n}_i \wedge \gamma_i) \wedge \mathbf{n}_i \quad (9.17)$$

que l'on écrit sous forme matricielle en utilisant l'équation (??) :

$$\gamma_{\mathbf{N}_i} = -\overline{\mathbf{n}_i}^2 U_{1_i} \dot{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{n}_i}^2 \mathbf{U}_{2_i} \quad (9.18)$$

On a d'autre part :

$$\mathbf{f}_{\mathbf{N}_i} = -\frac{J_i}{\rho_i^2} \gamma_{\mathbf{N}_i} \quad (9.19)$$

Les composantes du vecteur $\sigma_{\mathbf{N}}$ sont :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{N}} = \sum_{i=1}^{i=6} \mathbf{f}_{\mathbf{N}_i} \quad \mathbf{M}_{\mathbf{N}} = \sum_{i=1}^{i=6} \mathbf{C}\mathbf{B}_i \wedge \mathbf{f}_{\mathbf{N}_i} \quad (9.20)$$

En utilisant les équations (??),(??) on a :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{N}} = \left(\sum_{i=1}^{i=6} \frac{J_i}{\rho_i^2} \overline{\mathbf{n}_i}^2 U_{1_i} \right) \dot{\mathbf{W}} + \sum_{i=1}^{i=6} \frac{J_i}{\rho_i^2} (\overline{\mathbf{n}_i}^2 \mathbf{U}_{2_i}) \quad (9.21)$$

et

$$\mathbf{M}_{\mathbf{N}} = \left(\sum_{i=1}^{i=6} \frac{J_i}{\rho_i^2} \overline{\mathbf{C}\mathbf{B}_i} \overline{\mathbf{n}_i}^2 U_{1_i} \right) \dot{\mathbf{W}} + \sum_{i=1}^{i=6} \frac{J_i}{\rho_i^2} \overline{\mathbf{C}\mathbf{B}_i} \overline{\mathbf{n}_i}^2 \mathbf{U}_{2_i} \quad (9.22)$$

On regroupe ces deux dernières équations pour déterminer $\sigma_{\mathbf{N}}$, que l'on écrit sous forme matricielle :

$$\sigma_{\mathbf{N}} = V_1 \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{V}_2 \quad (9.23)$$

où V_1 est une matrice 6×6 et \mathbf{V}_2 un vecteur de dimension 6, définis par :

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=6} \frac{J_i}{\rho_i^2} \overline{\mathbf{n}_i}^2 U_{1_i} \\ \sum_{i=1}^{i=6} \frac{J_i}{\rho_i^2} \overline{\mathbf{C}\mathbf{B}_i} \overline{\mathbf{n}_i}^2 U_{1_i} \end{pmatrix} \quad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{i=6} \frac{J_i}{\rho_i^2} (\overline{\mathbf{n}_i}^2 \mathbf{U}_{2_i}) \\ \sum_{i=1}^{i=6} \frac{J_i}{\rho_i^2} \overline{\mathbf{C}\mathbf{B}_i} \overline{\mathbf{n}_i}^2 \mathbf{U}_{2_i} \end{bmatrix} \quad (9.24)$$

Des équations (??),(??) on tire :

$$(T_1 - V_1) \dot{\mathbf{W}} + (\mathbf{T}_2 - \mathbf{V}_2) = J^{-T} \tau \quad (9.25)$$

soit :

$$\dot{\mathbf{W}} = (T_1 - V_1)^{-1} J^{-T} \tau - (T_1 - V_1)^{-1} (\mathbf{T}_2 - \mathbf{V}_2) \quad (9.26)$$

Cette équation constitue le modèle dynamique direct d'un SSM. Le modèle inverse, plus intéressant pour la génération de trajectoire, s'établit simplement par :

$$\tau = J^T (T_1 - V_1) \dot{\mathbf{W}} + J^T (\mathbf{T}_2 - \mathbf{V}_2) \quad (9.27)$$

9.4. Modèle dynamique du poignet actif

Le principe de l'algorithme utilisé est similaire à celui présenté précédemment. La force \mathbf{f}_i exercée au point B_i se décompose en :

- une composante \mathbf{f}_{s_i} dirigée selon le vecteur \mathbf{n}_i
- une composante \mathbf{f}_{N_i} perpendiculaire à \mathbf{n}_i , due à l'inertie (figure ??)

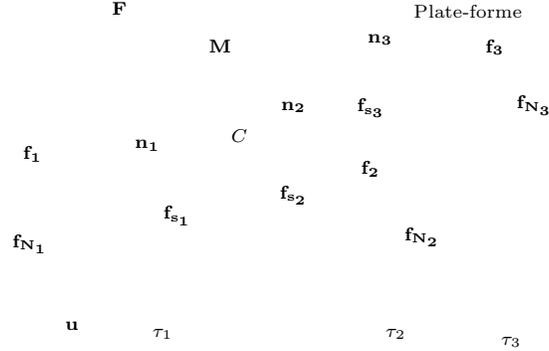


Figure 9.4: Forces externes, articulaires et d'inertie exercées sur le poignet
La force \mathbf{f}_{s_i} est reliée à la force articulaire τ_i par :

$$\mathbf{f}_{s_i} = \tau_i (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n}_i \quad (9.28)$$

En utilisant les mêmes notations que dans la section précédente on peut écrire :

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{i=6} \tau_i (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n}_i + \mathbf{F}_N \quad (9.29)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{i=6} \tau_i (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{CB}_i \wedge \mathbf{n}_i) + \mathbf{M}_N \quad (9.30)$$

Soit J_α^{-1} la matrice définie par les lignes :

$$[(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n}_i, (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{CB}_i \wedge \mathbf{n}_i)] \quad (9.31)$$

Notons que cette matrice n'est pas la transposée de l'inverse de la matrice jacobienne cinématique du poignet actif. Les équations (??) s'écrivent sous forme matricielle :

$$\sigma = J_\alpha^{-1} \tau + \sigma_N \quad (9.32)$$

Le calcul de σ_N est identique à celui fait dans la section précédente. Le modèle dynamique s'obtient donc simplement en remplaçant dans les équations (??), (??) la matrice J^T par la matrice J_α . On a donc

$$\dot{\mathbf{W}} = (T_1 - V_1)^{-1} J_\alpha^{-1} \tau - (T_1 - V_1)^{-1} (\mathbf{T}_2 - \mathbf{V}_2) \quad (9.33)$$

$$\tau = J_\alpha (T_1 - V_1) \dot{\mathbf{W}} + J_\alpha (\mathbf{T}_2 - \mathbf{V}_2) \quad (9.34)$$

9.5. Temps de calcul

L'utilisation du modèle dynamique inverse dans une commande nécessite une quantité importante de calculs. A partir des coordonnées articulaires on exécute un calcul du modèle géométrique direct qui permet d'obtenir les coordonnées cartésiennes et les orientations du plateau mobile. On évalue ensuite le vecteur \mathbf{GC} (et par conséquent $\overline{\mathbf{GC}}$) défini par :

$$\mathbf{GC} = R\mathbf{GC}_r \quad (9.35)$$

A ce stade on calcule la matrice T_1 , puis, à partir des mesures des orientations on estime le vecteur $\mathbf{\Omega}$. Ceci nous permet de calculer le vecteur ω et d'obtenir ainsi le vecteur \mathbf{T}_2 .

A partir de l'orientation on calcule les vecteurs \mathbf{CB}_i , ce qui permet d'obtenir les matrices U_{1i} et les vecteurs \mathbf{U}_{2i} . On peut aussi déterminer les vecteurs unitaires des segments \mathbf{n}_i , donc la matrice V_1 et le vecteur \mathbf{V}_2 . Enfin on calcule la matrice J^{-1} (ou J_α^{-1}), que l'on inverse numériquement.

A partir de la donnée de la configuration actuelle du plateau mobile, de la valeur des variables articulaires et des vitesses actuelles, le temps de calcul des forces articulaires nécessite 10,5 ms. Le calcul des accélérations à partir des forces articulaires s'effectue dans un temps du même ordre de grandeur. Dans la pratique l'utilisation des modèles dynamiques généraux (inverse et directe) semble donc difficilement envisageable à moins d'utiliser au mieux la structure du modèle soit pour une implantation sur processeur spécialisé soit pour utiliser des architectures informatiques parallèles. Des propositions d'implantation de ce type ont été faite par Begon [29], Codourey [65], Gosselin [140], et Guglielmetti [149].

9.6. Exemples d'utilisation des modèles dynamiques

9.6.1. Modèle dynamique inverse

Nous présentons un exemple de calcul des forces articulaires à partir d'une consigne d'accélération pour la «main gauche» INRIA. Les paramètres de l'expérience sont :

$$m = 1 \text{ kg} \quad J_i = 2500 \text{ kg cm}^2 \quad I_{11} = I_{22} = I_{33} = 400 \text{ kg cm}^2 \quad I_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Les consignes d'accélération sont :

$$\gamma_x = 1 \text{ cm/s}^2 \quad t \in [0, 2] \quad \gamma_x = -1 \text{ cm/s}^2 \quad t \in]2, 4] \quad \gamma_y = 5 \text{ cm/s}^2 \quad t \in [0, 4]$$

Les autres accélérations sont nulles. Les vitesses cartésiennes et angulaires initiales de la plate-forme sont nulles, la position initiale est $[0,0,53,3]$ et l'orientation initiale $[0,0,0]$.

Les coordonnées en x, y du plateau mobile sont tracées sur la figure ??, alors que les forces articulaires pour les différents segments sont présentées en figure ??.

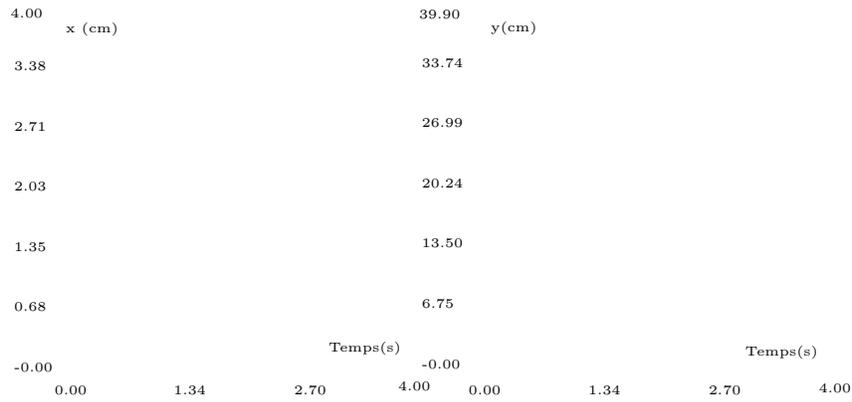


Figure 9.5: Trajectoire décrite lorsque l'on donne une consigne d'accélération et que l'on utilise le modèle dynamique inverse.

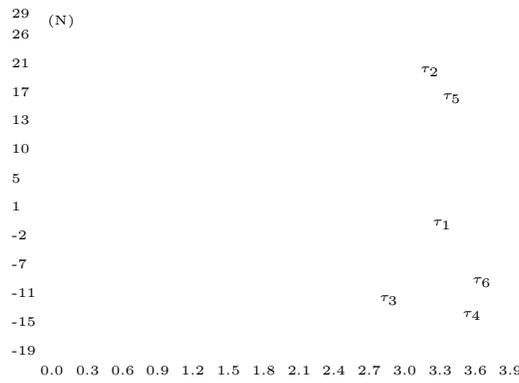


Figure 9.6: Forces articulaires calculées avec le modèle dynamique inverse.

9.6.2. Modèle dynamique direct

Nous reprenons l'exemple de la section précédente pour montrer un exemple d'application du modèle dynamique direct. Nous supposons que nous désirons réaliser à partir de la position nominale du robot une trajectoire verticale de la plate-forme. Le modèle dynamique inverse indique qu'alors les vérins doivent exercer à tout instant une force identique, que l'on va supposer constante et égale à 1,65 N. Mais une erreur de la commande fait que les forces réellement

appliquées sont :

$$\tau_1 = 1,6665 \text{ N} \quad \tau_i = 1,65 \text{ N} \quad \forall i \in [2, 6]$$

Les vitesses cartésiennes et angulaires initiales de la plate-forme sont nulles et la position initiale est (0,0,53,3) alors que tous les angles d'Euler sont nuls.

Les coordonnées en x, y, z du plateau mobile sont tracées sur la figure ?? . On

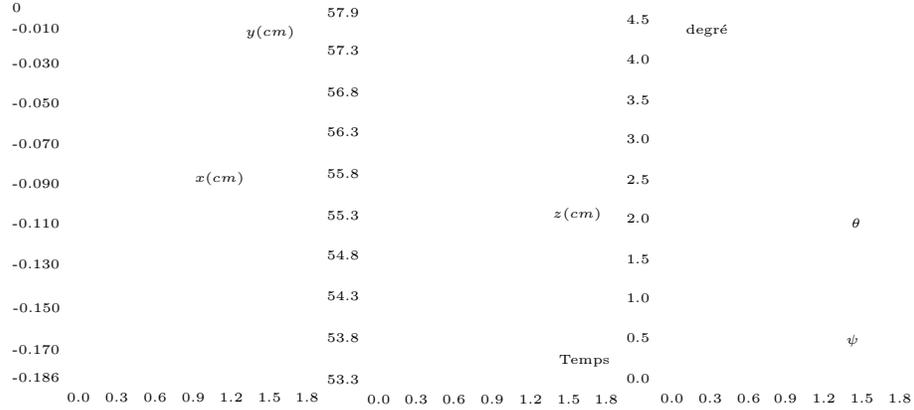


Figure 9.7: Trajectoire décrite par la plate-forme sous l'influence de forces articulaires constantes et identiques avec une erreur de 1% sur la force appliquée sur le premier segment.

peut remarquer que cette faible erreur sur une force articulaire conduit à une trajectoire qui s'écarte sensiblement de la trajectoire désirée. Ainsi la position finale atteinte est (-0,186, -0,0521, 57,864) avec les angles d'Euler $\psi=0,447$ degrés, $\theta= 4,7031$ degrés, $\phi= 0$ degrés alors qu'avec une commande parfaite la position serait (0,0,54,57) et $\psi = \phi = 0$, $\theta = 0,355$ degré. Sur cet exemple il apparaît clairement qu'une utilisation naïve des modèles directes ne permettra pas d'obtenir de bonnes performances.

9.7. Exercices

Exercice 9.1: Montrer comment l'on peut utiliser le principe de Lagrange pour obtenir le modèle dynamique inverse d'un robot de type «Delta» (indication : plutôt que d'utiliser seulement les variables articulaires on introduira aussi les paramètres de position de la plate-forme).

Problème 9.1: Comment établir une borne sur le temps de calcul d'un modèle dynamique afin qu'une commande reposant sur ce modèle soit plus efficace qu'une commande classique ne prenant pas en compte la dynamique?

Table des matières

Chapitre 10

Conception

Dans ce chapitre nous nous intéressons au problème de la conception des robots parallèles. Après un choix de l'architecture mécanique il s'agit de déterminer les dimensions et principales caractéristiques du robot afin qu'il réponde au mieux à un cahier des charges donné. Nous décrivons les principales approches permettant de résoudre, au moins partiellement, ce problème.

10.1. Introduction

La conception d'un mécanisme commence par le choix d'une architecture mécanique qui peut être obtenue soit par synthèse à partir des contraintes de la tâche ou en faisant appel à une solution à priori. Dans une seconde étape l'architecture mécanique choisie est modélisée puis ce modèle est utilisé pour effectuer la *synthèse géométrique* du mécanisme, c'est-à-dire pour déterminer les caractéristiques géométriques et physiques du mécanisme le plus approprié à la tâche.

On distingue deux approches pour la synthèse géométrique : l'une est la méthode «essai-erreur» qui consiste à modifier manuellement la géométrie du mécanisme et d'évaluer à l'aide d'un logiciel de simulation ses performances jusqu'à obtention d'un mécanisme jugé satisfaisant, l'autre est l'approche «conception optimale» dans laquelle une procédure numérique est employée pour déterminer la géométrie du mécanisme qui optimise un ou des critères donnés.

Dans le domaine des manipulateurs parallèles il existe très peu de simulateurs en raison de la diversité des architectures mécaniques possibles et surtout

des problèmes qu'ont les simulateurs de mécanisme employés généralement pour gérer les chaînes cinématiques fermées complexes. Des approches généralistes ont été toutefois proposées : utilisation des bond-graphs [482], simulateur de dynamique «Map» [210], ainsi que des simulateurs spécialisés¹ : pour les robots plans [397] et pour les robots sphériques à 3 degrés de liberté («Smaps» [136]). En tout état de cause le nombre de paramètres intervenant dans la géométrie d'un robot parallèle rend délicate l'utilisation de la méthode «essai-erreur». Nous ne nous intéresserons donc dans ce chapitre qu'à des méthodes de conception optimale.

La littérature est relativement pauvre sur la conception des manipulateurs parallèles. La raison en est que, d'une part, le nombre de paramètres à gérer est élevé et que, d'autre part, les caractéristiques qui peuvent intervenir dans un cahier des charges sont délicates à estimer car elle sont le plus souvent dépendantes de la posture de l'organe terminal. Ainsi si l'on considère un robot général, une géométrie est définie au minimum par les coordonnées des points (A, B) , ce qui représente déjà 36 paramètres (Masory [278] dénombre en fait 132 paramètres pour décrire complètement un robot général). Du côté des caractéristiques on peut vouloir, par exemple, rendre maximum la raideur moyenne dans un espace de travail donné. Or l'estimation de cette moyenne est très lourde en temps de calcul puisqu'à l'heure actuelle on ne sait calculer la matrice de raideur que pour une posture donnée : on est donc obligé de recourir à une discrétisation de l'espace opérationnel qui est de dimension 6.

On trouve cependant des articles où l'on propose des approches pour optimiser un ou des critères :

- rigidité : Bhattacharya [37] réduit tout d'abord le nombre de paramètres à trois en faisant des hypothèses sur la disposition des points A, B . Puis il utilise la matrice de raideur pour définir différents critères dont il calcule la valeur moyenne sur l'espace de travail en procédant par discrétisation. Vu le nombre réduit de paramètres il peut ensuite tracer des courbes montrant la valeur des différents critères en fonction des paramètres, ce qui permet de choisir au mieux le robot.
- dynamique : Khatib [217] s'intéresse aux caractéristiques inertielles et d'accélération de son robot «Artisan», un robot à 3 degrés de liberté. Il introduit une fonction de coût permettant de quantifier les performances dynamiques du robot. Cette fonction contient plusieurs termes permettant d'évaluer l'isotropie des performances en accélération et du comportement inertiel. Il utilise ensuite une procédure numérique pour trouver les paramètres qui optimise la moyenne de la fonction de coût calculée pour un nombre fini de posture.

¹Un programme permettant la visualisation de différents robots parallèles plans et spatiaux est disponible par ftp anonyme, répertoire `prisme/Visu_robot`

- dextérité et isotropie : Ma [270] s'intéresse à l'optimisation des dimensions d'un SSM permettant d'obtenir le meilleur manipulateur du point de vue des singularités et des performances en terme de dextérité. Pour chiffrer cette dextérité il utilise le nombre de condition et constate numériquement que ce nombre est minimal (donc la dextérité est maximale) pour la position nominale du manipulateur. Il cherche donc les dimensions du SSM telles que l'inverse du nombre de condition en position nominale soit le plus grand possible. Un algorithme numérique est utilisé et fournit des dimensions très proches de celles utilisées pour les simulateurs de vol. Mendes Lopes [286], Pittens [360], Zanganeh [480] recherchent les paramètres permettant de minimiser le nombre de condition de la matrice jacobienne inverse cinématique, ce qui permet d'obtenir une certaine isotropie pour les vitesses articulaires nécessaires à la réalisation d'une vitesse d'amplitude donnée qu'elle qu'en soit la direction. Le nombre de condition est délicat à manier car d'une part il est dépendant de la posture et, d'autre part, la jacobienne inverse n'est pas invariante vis-à-vis du choix des unités de dimension. Il est donc nécessaire de diviser la composante liée aux vitesses angulaires par une longueur pour normaliser la matrice (par exemple celle qui minimise le nombre de condition dans une posture donnée, appelée «longueur naturelle» par Ma et Angeles [270]). Gosselin, dans de nombreux articles [123, 124, 133, 136], suggère de minimiser le nombre de condition moyen sur tout l'espace de travail. Cet index a été utilisé par Kurtz [231] pour construire une fonction de coût permettant l'optimisation des performances du poignet redondant de Hayward.
- l'espace de travail : Murray [313] et Shirkhodaie [406] se sont intéressés à la synthèse de robot plan de type 3 – RPR pour trouver les paramètres géométriques du robot permettant d'assurer qu'une famille de points donnée fait partie de son espace de travail. Larochelle [237] fait de même pour les robots sphériques à 3 degrés de liberté. Stoughton [421] considère la forme de l'espace de travail d'un micro-robot parallèle : en raison de la taille réduite chercher à ce que l'espace de travail soit le plus proche possible d'une sphère revient à minimiser le nombre de condition. Han [154] se propose de rechercher les dimensions des mécanismes à 4 barres qui motorise son robot pour que l'espace de travail soit maximal.
- combinés : Claudinon [59] considère un SSM et impose des contraintes sur l'espace de travail, les vitesses réalisables et la dynamique. Après avoir réduit le nombre de paramètres une première procédure numérique est utilisée pour optimiser les contraintes sur l'espace de travail et les vitesses puis une seconde procédure permet de satisfaire les contraintes dynamiques. On peut aussi noter les travaux de Clavel [61] pour l'optimisation du robot «Delta», dont le nombre de paramètres réduit permet de traiter plus facilement le problème. Han [154] combine espace

de travail maximal et masse de l'équipage mobile alors que Smith [409] évalue grossièrement l'erreur de positionnement à partir des erreurs capteur puis cherche à réduire la masse du plateau mobile en calculant les forces auxquels il est soumis puis sa déformation afin de réduire son épaisseur au maximum.

Curieusement l'influence de la géométrie sur la précision du robot a été peu étudiée. On trouve seulement des travaux comme ceux de Ropponen [387] et de Masory [278], ayant pour but d'estimer les erreurs de positionnement d'un robot donné en prenant en compte non seulement les erreurs capteurs mais aussi les tolérances de fabrication sur les centres des articulations.

L'approche générale de la conception d'un robot «optimal» repose donc peu ou prou sur la minimisation d'une fonction de coût. Mais cette approche souffre de nombreux défauts :

- les résultats obtenus en minimisant une fonction de coût multi-critères dépendent fortement des poids mis sur les différents critères.
- si la fonction ne contient qu'un critère les résultats obtenus peuvent conduire à des aberrations : ainsi Gosselin a montré que le SSM dont le volume de travail est maximal pour des courses fixées des actionneurs possède une base et une plate-forme similaire : il est donc en singularité permanente. Les singularités sont donc un exemple de *critère caché* n'apparaissant pas forcément dans un cahier des charges mais dont le concepteur doit toujours se préoccuper.
- un cahier des charges se présente le plus souvent sous la forme de performances minimales à garantir, combinées à des performances à optimiser. La fonction de coût n'est donc pas une fonction continue, ce qui pose quelques problèmes aux méthodes numériques d'optimisation (une synthèse des méthodes d'optimisation utilisées en théorie des mécanismes pourra être trouvée dans [100]).
- certains critères de performance doivent être évalués sur tout l'espace de travail ce qui en rend l'estimation coûteuse en temps de calcul. Or les méthodes d'optimisation numériques nécessitent de fréquentes estimations de la fonction de coût dans laquelle interviennent les critères : pour ne pas obtenir des temps de calcul prohibitifs on est donc amené à réduire très fortement le nombre de paramètres en faisant des hypothèses très intuitives, voire injustifiées, sur la nature de la géométrie du robot optimal.

Avant d'exposer une méthode plus générale que l'approche fonction de coût revenons sur les principaux critères qui peuvent intervenir dans un cahier des charges pour un mécanisme donné.

- critères géométriques : encombrement, espace de travail (amplitude, forme), débattements des actionneurs et des articulations passives, erreurs de positionnement maximum, isotropie des performances, qualité du suivi de trajectoire, facteur de transmission.
- critères cinématiques : vitesses maximales des actionneurs et de la plate-forme, vitesse minimale garantie de la plate-forme pour des vitesses articulaires bornées, quelle que soit la posture du robot dans un espace de travail donné.
- critères statiques : forces/moments maximaux sur les segments, raideur, forces/moments maximaux applicables à la plate-forme, efficacité énergétique, singularités dans l'espace de travail, position du centre de masse.
- critères dynamiques : accélérations maximales des actionneurs et de la plate-forme, accélération minimale garantie de la plate-forme quelle que soit la posture du robot dans un espace de travail pour des accélérations articulaires bornées.

10.2. Méthodologie de conception

Dans cette section nous allons nous restreindre au cas du robot général. La méthodologie que nous proposons, dénommée **Democrat**, passe tout d'abord par une réduction du nombre de paramètres. Après cette phase on pourra introduire *l'espace des paramètres* dans lequel un point représente une géométrie unique de robot. La recherche du robot optimal consiste donc à trouver le lieu des points de l'espace des paramètres où le cahier des charges est respecté au mieux. Cette recherche ne s'effectuera en général que dans un domaine fini de l'espace des paramètres, que l'on appellera *l'espace de recherche*.

Dans une première étape nous utiliserons certains éléments du cahier des charges pour restreindre l'espace de recherche à des zones fermées qui seront les seules à contenir les points représentatifs des robots optimaux. Dans une seconde étape ces zones seront discrétisées et le robot correspondant à chaque point de cette discrétisation sera évalué par rapport au cahier des charges.

10.2.1. Réduction des paramètres

Dans tous les éléments intervenant dans un cahier des charges on peut remarquer l'importance de la position des points A, B . Dans l'absolu un paramétrage complet de ces points implique l'usage de 36 coordonnées. Nous allons simplifier ce paramétrage en utilisant les hypothèses suivantes :

- la hauteur relative des points (z_{a_i}, z_{b_i}) est connue

- après avoir défini un repère de référence et un repère mobile on connaît les lignes passant par O, C sur lesquelles se trouve les points A, B . En d'autres termes les angles α_i, β_i sont connus (figure ??).

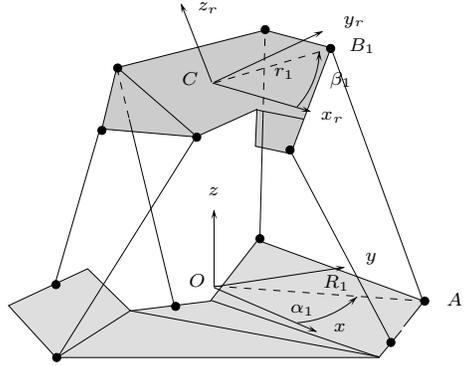


Figure 10.1: Réduction du nombre de paramètres. Seules sont supposées inconnues les distances R_1^i du point A_i à O et r_1^i du point B_i à C

Sous ces hypothèses les seules inconnues sont les distances R_1^i des points A_i à O et r_1^i du point B_i à C , soit un total de 12 inconnues. On peut alors poser :

$$\mathbf{A}_i \mathbf{O} = R_1^i \mathbf{u} \quad \mathbf{C} \mathbf{B}_i^r = r_1^i \mathbf{v}$$

où \mathbf{u}, \mathbf{v} sont des vecteurs unitaires connus et $\mathbf{C} \mathbf{B}_i^r$ représente les coordonnées de B_i dans le repère mobile. Notons que dans le cas où la base et la plate-forme sont planes et que les points A, B se trouvent sur des cercles les inconnues deviennent tout simplement les deux rayons des cercles (un robot respectant ces contraintes sera appelé un *SSM circulaire*).

L'espace des paramètres est donc un espace de dimension 12 où chaque axe de coordonnées correspond à une valeur d'un élément R_1^i ou r_1^i . Un point dans cet espace représente donc une position unique pour tous les points A, B . Notons cependant que certaines caractéristiques du cahier des charges feront intervenir de manière indépendante chaque paire (R_1^i, r_1^i) . Dans ces conditions l'espace des paramètres peut être décomposé en 6 *plans paramètre*, un pour chaque paire.

10.2.2. Restriction de l'espace de recherche

En adoptant le formalisme de réduction du nombre de paramètres présenté dans la section précédente nous disposons de deux algorithmes permettant de réduire la taille de l'espace de recherche. Le premier permet de traiter des contraintes sur l'espace de travail du robot, le second des contraintes sur les vitesses articulaires.

10.2.2.1. Restriction par l'espace de travail

Dans cette section nous supposons que l'on connaît pour chaque segment la valeur minimum ρ_{min} de sa longueur ainsi que sa valeur maximum ρ_{max} . On suppose de plus que l'utilisateur est susceptible de décrire des trajectoires à réaliser par la plate-forme, ces trajectoires étant définies par des segments que doit pouvoir parcourir C , avec une orientation constante de la plate-forme (des segments identiques mais avec des orientations différentes pouvant être spécifiés). Ces segments seront appelés les *segments trajectoire*. On remarque tout de suite que le respect des contraintes sur les longueurs font intervenir indépendamment chaque paire (A_i, B_i) puisque la longueur du segment i ne dépend que de la trajectoire de la plate-forme et de la localisation des points A_i, B_i . On peut donc utiliser la décomposition de l'espace des paramètres en plans paramètre. A ce stade on va considérer un seul segment, donc un plan paramètre.

Lorsque le point C se déplace sur un segment trajectoire M_1M_2 on peut écrire :

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OM}_1 + \lambda \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \quad \text{avec } \lambda \in [0, 1] \quad (10.1)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \mathbf{AO} + \mathbf{OC} + R\mathbf{CB}^r \\ &= R_1\mathbf{u} + \mathbf{OM}_1 + \lambda \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 + r_1 R\mathbf{v} \end{aligned} \quad (10.2)$$

où R représente la matrice de rotation entre le repère mobile et le repère fixe. La longueur du segment ρ est la norme du vecteur \mathbf{AB} et l'on a donc :

$$\rho^2 = R_1^2 + r_1^2 + 2R_1r_1\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + R_1F(\lambda) + r_1G(\lambda) + H \quad (10.3)$$

Considérons maintenant l'équation $E(\lambda) = \rho^2 - \rho_{max}^2 = 0$ pour une valeur particulière de λ . Cette équation définit une ellipse dans le plan paramètre. Pour tous les points à l'intérieur de l'ellipse on a $\rho^2 - \rho_{max}^2 < 0$ et, en conséquence, pour le λ considéré la longueur du segment est inférieure à ρ_{max} . Comme l'on désire que cette contrainte soit vérifiée pour tout λ dans l'intervalle $[0, 1]$ on en déduit que seul les points à l'intérieur de toutes les ellipses $E(\lambda)$ définissent des positions valides pour les points A, B . En d'autres termes l'espace de recherche se réduit à l'intersection de toutes les ellipses $E(\lambda)$ lorsque λ parcourt l'intervalle $[0, 1]$. Il est de plus facile de montrer que cette intersection se réduit à l'intersection de $E(0)$ et de $E(1)$ (cf. exercice).

Intéressons-nous maintenant à l'équation $E_s(\lambda) = \rho^2 - \rho_{min}^2 = 0$. Pour un λ fixé cette équation définit une ellipse dans le plan paramètre. Pour tous les points à l'intérieur de l'ellipse on a $\rho^2 - \rho_{min}^2 < 0$: la longueur du segment est donc inférieur à ρ_{min} . En conséquence les points représentatifs de A, B doivent se trouver à l'extérieur de toutes les ellipses $E_s(\lambda)$ lorsque λ parcourt l'intervalle $[0, 1]$. En d'autres termes l'union U des ellipses $E_s(\lambda)$ définit une

zone qui doit être exclue de l'espace de recherche. On peut montrer que cette union se calcule relativement aisément de manière géométrique (cf. exercice). En conséquence pour le segment i et pour le segment trajectoire j considérés la zone de recherche Z_{ij} se réduit à :

$$Z_{ij} = (E(0) \cap E(1)) - U_{ij} \quad (10.4)$$

En itérant le processus pour chaque segment trajectoire la zone de recherche finale se réduit à l'intersection des Z_{ij} . Si le robot est un SSM circulaire on a un seul plan paramètre et la zone de recherche est tout simplement l'intersection des Z_{ij} calculées pour tous les segments et tous les segments trajectoire. La figure ?? illustre l'algorithme, le résultat ayant été obtenu dans un temps d'environ 500 ms. Cet algorithme peut être étendu pour prendre en compte

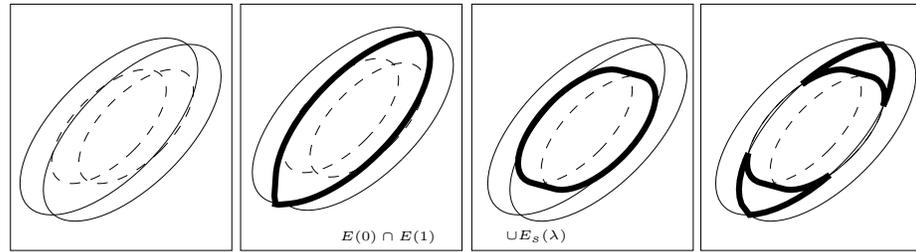


Figure 10.2: *A gauche on a représenté en trait fin les ellipses $E(0), E(1)$ et en pointillé deux des ellipses $E_s(\lambda)$. On calcule l'intersection de $E(0), E(1)$ puis l'union des ellipses $E_s(\lambda)$ (en trait épais). Enfin on soustrait l'union des E_s à l'intersection pour obtenir la zone de recherche.*

les limites des débattements sur les articulations en A, B si l'on adopte la modélisation des contraintes décrite dans le chapitre « Espace de travail » (cf. exercice). De plus si le robot est un SSM circulaire on peut aussi prendre en compte les collisions entre segments [297].

Dans notre implantation² les ellipses sont converties en ligne polygonales ce qui permet d'exécuter toutes les opérations d'intersection, union comme opérations booléennes sur des polygones. Cet algorithme peut être étendu à d'autres types de robots parallèles (cf. exercice).

10.2.2.2. Restriction par les vitesses articulaires

Un deuxième type d'algorithme pour restreindre la zone de recherche concerne les contraintes sur les vitesses articulaires. Le but de cet algorithme est de déterminer la zone de l'espace des paramètres telle que l'on puisse exécuter un

²Une implantation de cet algorithme est disponible par `ftp` anonyme, répertoire `prisme/Design`

déplacement de C avec un vecteur vitesse fixé quelle que soit la position de ce point sur un ensemble de segments trajectoire, sans que les vitesses articulaires n'excèdent une borne donnée. Là aussi comme la vitesse articulaire d'un segment ne dépend que de la posture et de la vitesse cartésienne de la plate-forme et pas des vitesses articulaires des autres segments, on peut découper l'espace des paramètres en plan paramètre.

Si \mathbf{V}_c est la vitesse cartésienne désirée de la plate-forme et que $\dot{\rho}_l$ représente la borne sur les vitesses articulaires on doit avoir :

$$-\dot{\rho}_l \leq \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{V}_c}{\|\mathbf{AB}\|} \leq \dot{\rho}_l \quad (10.5)$$

On recherche donc les lieux des points de coordonnées (R_1, r_1) où ces inégalités sont satisfaites. La frontière de cette zone est le lieu des points où :

$$\rho^2 \dot{\rho}_l^2 - (\mathbf{AB} \cdot \mathbf{V}_c)^2 = 0 \quad (10.6)$$

En utilisant le paramétrage de la position de C sur un segment trajectoire définie par l'équation (??) on obtient :

$$R_1^2(\dot{\rho}_l^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{V}_c)^2) + r_1^2(\dot{\rho}_l^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}_c)^2) + 2R_1r_1(\dot{\rho}_l^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{V}_c)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}_c)) + D(\lambda) = 0 \quad (10.7)$$

Cette équation définit une famille de conique paramétrée par λ . Pour un λ donné la conique découpe le plan paramètre en zones dont certaines sont celles où l'équation de contrainte (??) est satisfaite. De plus nous avons vu dans le chapitre « Cinématique » que les extremums de la vitesse articulaire sont obtenus soit pour $\lambda = 0, 1$ où éventuellement pour $\lambda = \lambda_n$ solution d'une équation linéaire, si λ_n est dans l'intervalle $[0, 1]$. On n'aura donc à considérer que les coniques obtenues pour ces valeurs particulières de λ . Plus précisément on appelle C_0, C_1 les coniques obtenues pour $\lambda = 0, 1$ et on note Z_0, Z_1 les zones délimitées par ces coniques où l'équation de contrainte (??) est satisfaite. Le cas où $\lambda = \lambda_n$ doit être traité à part puisqu'il faut s'assurer que λ_n est dans l'intervalle $[0, 1]$. En substituant $\lambda = \lambda_n$ dans l'équation (??) on obtient une équation de degré 4 qui se factorise en deux équations de degré 2, définissant des coniques C_{n_1}, C_{n_2} . Ces coniques divisent le plan paramètre en zones et pour certaine d'entre elles l'équation (??) est satisfaite. On notera Z_{n_1}, Z_{n_2} les zones limitées par ces coniques où la contrainte est satisfaite. Il faut maintenant s'intéresser au lieu des points où λ_n est dans l'intervalle $[0, 1]$. On a :

$$\lambda_n = \frac{aR_1^2 + br_1^2 + cR_1r_1 + dR_1 + er_1 + f}{uR_1 + vr_1 + w} = \frac{n}{d}$$

La conique définie par $n = 0$ découpe le plan paramètre en deux régions $Z_{n>0}, Z_{n<0}$ où $n > 0$ et $n < 0$. L'équation $d = 0$ découpe le plan paramètre en deux demi-plans $Z_{d>0}, Z_{d<0}$ où $d > 0$ et $d < 0$. La zone $Z_{\lambda_n>0}$ où $\lambda_n \geq 0$ est donc définie par :

$$Z_{\lambda_n>0} = (Z_{d>0} \cap Z_{n>0}) \cup (Z_{d<0} \cap Z_{n<0})$$

De la même manière l'équation $n - d = 0$ est une conique qui permet de définir une zone $Z_{\lambda_n < 1}$ où $\lambda_n \leq 1$ avec

$$Z_{\lambda_n < 1} = (Z_{d > 0} \cap Z_{n-d < 0}) \cup (Z_{d < 0} \cap Z_{n-d > 0})$$

La région Z_n pour laquelle λ_n est dans l'intervalle $[0,1]$ est donc l'intersection de $Z_{\lambda_n > 0}$ et $Z_{\lambda_n < 1}$. En résumé la zone de recherche Z est définie par :

$$Z = Z_0 \cap Z_1 \cap ((Z_{n_1} \cap Z_n) \cup (Z_{n_2} \cap Z_n))$$

En pratique les coniques ne définissent pas des zones fermées : on est donc obligé de faire une hypothèse sur les valeurs maximales de R_1, r_1 . La figure ?? illustre les coniques intervenant dans les calculs ainsi que la zone de recherche finalement obtenue. Ce calcul doit être fait pour chaque segment trajectoire, la zone

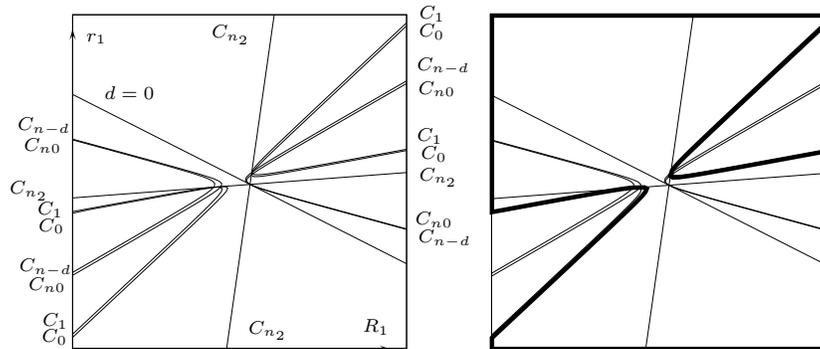


Figure 10.3: *A gauche les coniques intervenant dans le calcul de la zone de recherche restreint par les limites sur les vitesses articulaires. A droite la zone de recherche finalement obtenue (en trait épais)*

finale de recherche étant alors l'intersection des zones obtenues pour chaque segment trajectoire. Dans notre implantation les coniques sont converties en ligne polygonales ce qui permet d'exécuter toutes les opérations d'intersection, union comme opérations booléennes sur des polygones. Le temps de calcul pour l'exemple de la figure ?? est de l'ordre de 2,5 secondes. Bien entendu la zone de recherche obtenue peut être intersectée avec la zone de recherche déterminée dans la section précédente pour aboutir à une zone où les contraintes sur les vitesses articulaires sont respectées et où les segments trajectoire appartiennent bien à l'espace de travail du robot.

10.2.3. Recherche du robot optimal

Après avoir obtenu l'espace de recherche nous pouvons procéder à la détermination du robot optimal. Pour cela le programme principal procède à une discrétisation de l'espace de recherche, chaque nœud de la discrétisation

représentant une géométrie unique de robot. Il s'agit alors de déterminer si le robot associé à un nœud satisfait ou non au cahier des charges. On distingue deux types de cahier des charges :

- *cahier des charges minimum* : on demande uniquement un minimum sur l'ensemble des performances (plusieurs robots de la discrétisation peuvent alors être solution)
- *cahier des charges maximum* : on recherche un robot présentant, au moins pour un critère, un maximum de performance (il y aura au plus une solution)

Le robot courant doit être soumis à une procédure qui évalue ses performances et retourne :

- 0 : le robot courant ne satisfait pas au cahier des charges.
- 1 : le cahier des charges est minimum et le robot courant le satisfait. La géométrie courante est ajoutée à la liste des solutions.
- 2 : le cahier des charges est maximum et le robot courant est meilleur que la solution courante. La géométrie du robot courant remplace la solution courante dans la liste des solutions.

Il reste donc à convertir le cahier des charges sous une forme procédurale permettant l'évaluation du robot. Pour cela nous utilisons un langage de haut niveau de structure similaire au langage C, auquel on a ajouté des instructions permettant d'évaluer les performances du robot les plus usuels. Pour chaque robot la procédure écrite dans ce langage est interprétée et certaine instruction de ce langage renvoie au programme principal les valeurs 0, 1 ou 2.

Une procédure écrite dans ce langage est présentée en figure ???. Dans cet exemple le but du cahier des charges est de déterminer un robot dont l'espace de travail est un cube centré en (0,0,30) avec des arêtes de longueur 10, ne présentant pas de singularité dans cet espace de travail, dont la plus grande erreur de positionnement selon l'axe x n'excède pas 0,4 pour une erreur capteur de 0,1 et dont la raideur selon l'axe x minimale dans l'espace de travail (noté k_x^{min}) est maximal (il s'agit donc d'un cahier des charges maximum). Deux instructions clés du langage sont **abort** qui renvoie 0 au programme principal (le robot ne satisfait pas le cahier des charges) et **optimal** qui renvoie 2. La variable **best_stiffness** contient la valeur de k_x^{min} pour la solution courante. Cette variable est initialisée à -1 au tout premier appel à la procédure (ligne 1-3). On vérifie ensuite s'il y a une singularité dans l'espace de travail et si c'est le cas on utilise l'instruction **abort** (lignes 4-7). On définit ensuite les erreurs capteurs, les raideurs des segments (lignes 8-9). On continue par l'évaluation du maximum de l'erreur de positionnement selon l'axe x pour les valeurs données de l'erreur capteur. Pour cela on utilise une méthode de discrétisation : il est

```

/* au premier appel on initialise la variable best_stiffness à -1 */
1 if (first_call==1) bloc
2     {best_stiffness} = -1
3 end_bloc
/* on vérifie si il y a une singularité dans l'espace de travail. Si c'est le cas la procédure
renvoie 0 */
4 {sing}= singularity in cube center 0 0 30 , 10 10 10
5 if ( %0 >0 ) bloc
6     abort
7     end_bloc
/* définition des erreurs capteurs et des raideurs des segments */
8 sensor_accuracy= 0.1 , 0.1 , 0.1 , 0.1 , 0.1 , 0.1
9 articular_stiffness= 100 , 100 , 100 , 100 , 100 , 100
/* pour calculer l'erreur de positionnement selon l'axe x on utilise de la discrétisation,
il faut donc définir les pas */
10 step z 1
11 step x 1 step y 1
/* on détermine l'erreur de positionnement maximal selon l'axe x */
12 {acc}=maximal accuracy in cube center 0 0 30 , 10 10 10
13 {accx}={acc}[1]

14 if ({accx} <0.4 ) bloc
/* l'erreur maximale est inférieur à 0,4. On peut évaluer la raideur */
15     {stiffness}=minimal stiffness in cube center 0 0 30 , 10 10 10
16     {current_stiffness}={stiffness}[1][1]
17     if ({current_stiffness} > {best_stiffness}) bloc
18         {best_stiffness}={current_stiffness}
19         optimal
20     end_bloc
21 end_bloc
22 abort

```

Figure 10.4: *Un exemple de transcription d'un cahier des charges maximum sous forme procédurale*

donc nécessaire de définir les pas utilisés selon chaque axe de l'espace de travail (lignes 10-11). On peut alors calculer cette erreur (ligne 12) et la comparer à la valeur 0,4 (ligne 14). Si la valeur est supérieure à 0,4 on passe à l'instruction `abort` de la ligne 22. Sinon on évalue la raideur k_x minimal (ligne 15). Si cette valeur est supérieure à la valeur de la solution courante on la met dans la variable `best_stiffness` et l'on exécute l'instruction `optimal` : la géométrie courante est la solution optimale (lignes 18-19).

Un tel langage permet de décrire des cahiers des charges même complexes. A noter que la méthodologie permet aussi de recourir à l'approche fonction de coût puisque le langage permet aussi de renvoyer au programme principal la valeur d'une telle fonction. Quant au temps de calcul il est dépendant de plusieurs facteurs : taille de la zone de recherche, pas utilisé pour sa discrétisation et, pour une grande partie, efficacité des algorithmes qui estiment les performances du robot. Nous avons d'ailleurs exposé au cours des précédents chapitres des méthodes permettant de calculer efficacement certains critères dans tout espace de travail en translation : course des actionneurs, présence de singularité, extremum des vitesses articulaires et des raideurs. Clairement la découverte de telles méthodes pour d'autres critères est un point critique pour le développement de la conception optimale.

Les avantages principaux de la méthodologie proposée sont la réduction de la zone de recherche et l'utilisation du langage permettant de décrire de manière souple les cahiers des charges. Son inconvénient principal est que les méthodes de réduction de la zone de recherche impose une limitation sur la géométrie des robots recherchés. On va toutefois voir sur quelques exemples comment cette limitation peut être contournée.

10.2.4. Exemples d'applications

La méthodologie proposée a été employée pour la conception de différents positionneurs précis pour l'European Synchrotron Radiation Facility (ESRF) situé à Grenoble. L'objet de ces manipulateurs est le déplacement précis de charges lourdes dans des espaces de travail relativement réduit.

10.2.4.1. Le robot HFM2

La charge nominale de ce robot est de 850 kg et les contraintes sur l'espace de travail, la précision de positionnement et les raideurs sont données dans la table ???. La course des vérins est fixée afin de pouvoir réutiliser des actionneurs existants. On a limité la recherche à un SSM circulaire avec une symétrie à 120° , les angles séparant deux articulations proches étant fixés à 20° .

Pour restreindre la zone de recherche par les contraintes sur l'espace de travail il est nécessaire d'avoir la longueur minimum ρ_{min} des segments. Pour déterminer cette inconnue on a choisi de prendre la valeur qui permet d'avoir la

	x (mm)	y	z (mm)	θ_x (mrad)	θ_y (mrad)	θ_z (mrad)
espace	± 30	-	± 20	± 5	± 5	0-10
précision	$\pm 0,01$	-	$\pm 0,1$	$\pm 0,1$	$\pm 0,1$	$\pm 0,05$
raideur	++	--	-	-	-	+++

Tableau 10.1: Contraintes sur l'espace de travail, la précision de positionnement et les raideurs pour le robot HFM2

plus grande aire possible de l'espace de recherche. On a sélectionné 19 segments trajectoire et l'on a calculé la valeur de l'aire de l'espace de recherche en fonction de ρ_{min} (figure ??). A l'aide de ce graphe on peut voir que ρ_{min} doit être

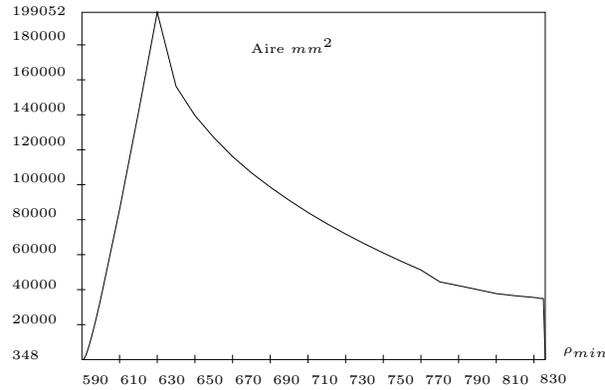


Figure 10.5: Variation de l'aire de l'espace de recherche en fonction de ρ_{min} pour le robot HFM2.

compris entre 590 et 830. Des essais systématique ont permis de déterminer la meilleure valeur dans cette gamme, conduisant à l'espace de recherche présenté en figure ???. On a ensuite décrit le cahier des charges en recherchant le robot

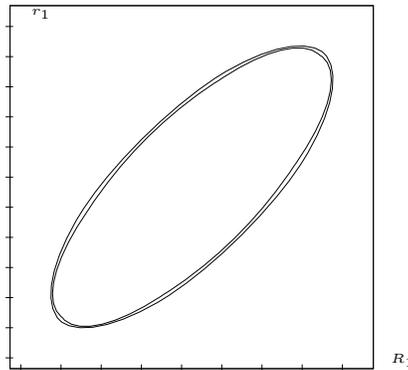


Figure 10.6: Espace de recherche pour le robot HFM2

atteignant la précision désirée avec des capteurs dont la précision n'était pas meilleure que $\pm 2 \mu\text{m}$ et ayant la valeur la plus élevée possible pour le minimum de la raideur pour les rotations autour de l'axe z . Il a été noté que pour les robots de l'espace de recherche la précision capteur nécessaire pour atteindre la précision de positionnement désirée était extrêmement variable puisque l'on a observé un rapport de 120 entre le meilleur robot et le pire.

10.2.4.2. Le robot HDM1

Dans cet exemple on recherche un SSM circulaire dont la charge nominale est de 850 kg avec des contraintes sur l'espace de travail et sur la précision de positionnement présentées dans la table ???. On a de plus comme contrainte que le rayon de la base ne doit pas excéder 360 et que $r_1 < R_1$. Comme

	x (mm)	y	z (mm)	θ_x (mrad)	θ_y (mrad)	θ_z (mrad)
Espace	± 5	-	± 28	± 5	± 5	0-8
Précision	$\pm 0,01$	-	$\pm 0,1$	$\pm 0,1$	$\pm 0,1$	$\pm 0,05$
Raideur	++	-	-	-	-	+++

Tableau 10.2: Cahier des charges pour le robot HDM1

dans l'exemple précédent la course des actionneurs est fixée. Pour déterminer les longueurs minimum possibles des segments, on calcule l'aire de l'espace de recherche en faisant varier la longueur minimum des segments (figure ???).

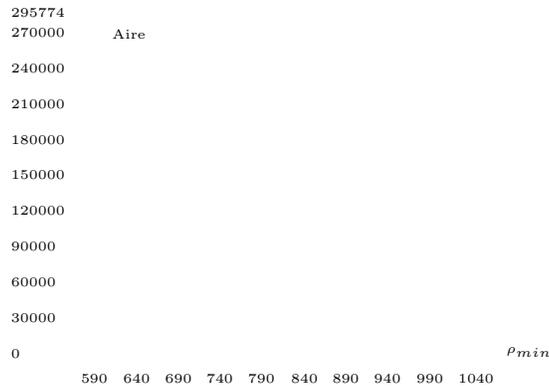


Figure 10.7: Variation de l'aire de l'espace de recherche en fonction de ρ_{min} pour le robot HDM1.

On a remarqué que pour un ρ_{min} supérieur à 715 il n'existe plus de robot ayant un $R_1 < 360$ et $r_1 < R_1$. Notre possibilité de choix se limite donc à un ρ_{min} compris entre 600 et 715. Pour obtenir les raideurs maximales nous avons étudié l'influence des angles α, β sur la raideur pour la rotation autour de l'axe z , ceci pour la position nominale. On suppose ici que l'angle entre

deux paires successives d'articulation de segment est 2γ pour la base et $2\gamma_m$ pour le plateau mobile et l'on trace la raideur en fonction de ces deux angles (figure ??). On constate alors que la raideur augmente si l'on réduit γ, γ_m .

Figure 10.8: Raideur k_{θ_z} du raideur HDM1 en position nominale en fonction des angles γ, γ_m .

Bien entendu une limite s'impose car les centres des articulations doivent être distincts pour des raisons d'encombrement. On a donc retenu deux valeurs possibles pour γ, γ_m : 5 et 10 degrés. Pour chacune des ces valeurs on a retenu comme solution pour ρ_{min} celle qui conduit à la raideur k_{θ_z} maximale en position nominale. On a alors calculé la zone de recherche et déterminé le robot satisfaisant les contraintes de précision de positionnement avec l'erreur capteur la plus élevée possible. Ceci conduit donc à deux solutions selon la valeur des angles γ, γ_m , notées solution 1 et 2, dont les caractéristiques sont présentées dans la table ?. Pour la solution 1, correspondant à $\gamma = 10^\circ$, l'erreur capteur est de $\pm 0,0024$ mm alors que pour la solution 2 elle est de $\pm 0,00279$ mm.

10.3. Exercices

Exercice 10.1: Montrer que l'intersection des ellipses $E(\lambda)$ (cf. section ??) se réduit à l'intersection des ellipses $E(0), E(1)$.

Exercice 10.2: Montrer comment calculer l'union des ellipses $E_s(\lambda)$ (cf. section ??) lorsque λ varie dans l'intervalle $[0,1]$. Indication : on considérera les points M définis par $\mathbf{MO} = R_1\mathbf{u} + r_1\mathbf{v}$.

Exercice 10.3: Montrer que les ellipses $E(\lambda)$ (cf. section ??) ont leur centre qui se déplace sur une ligne lorsque λ varie et que leur orientation est toujours $\pi/4$ (on supposera que les vecteurs \mathbf{u}, \mathbf{v} ne sont pas identiques).

Exercice 10.4: Montrez comment prendre en compte les contraintes sur les articulations aux points A pour déterminer la zone de recherche imposée par

	x	y	z	θ_x	θ_y	θ_z
ϵ_{min} , sol. 1	0,01	0,0095	0,0026	0,008939	0,010245	0,021152
ϵ_{min} , sol. 2	0,01	0,0091	0,0031	0,010907	0,012515	0,020911
ϵ_{moy} , sol. 1	0,0096	0,0092	0,0026	0,008946	0,010295	0,020405
ϵ_{moy} , sol. 2	0,0096	0,0088	0,0031	0,010946	0,012604	0,020216
k_{moy} , sol. 1	3766,1	3765,3	52468,6	3399954,9	3399920,7	861799,3
k_{moy} , sol. 2	5392,1	5391,4	49216,5	3189225,7	3189192,2	1147837,4
k_{min} , sol. 1	3493,7	3493,4	51867,2	3356774,3	3356822,8	800216,4
k_{min} , sol. 2	5024,9	5024,4	48411,8	3133631,7	3133673,2	1070747,1

Tableau 10.3: Performances des deux solutions pour le robot HDM1 (ϵ =précision, k =raideur). Les valeurs moyennes correspondent à la moyenne du critère sur l'espace de travail du cahier des charges. Les unités sont : mm, mrad, N/mm, N.mm/mrad.

l'existence de segments trajectoire.

Exercice 10.5: Montrer que l'algorithme de restriction de la zone de recherche par les contraintes sur l'espace de travail peut être étendu aux robots plans de type 3 – RPR, 3–RRR.

Problème 10.1: Peut-on généraliser les calculs des restrictions sur la zone de recherche à des paramétrages plus généraux?

Problème 10.2: Peut-on évaluer de manière efficace sur tout un espace de travail les performances d'un robot général qui dépendent la matrice jacobienne (par exemple précision de positionnement, maximum des forces articulaires)?

Chapitre 11

Conclusion

Les caractéristiques des robots parallèles, très différentes de celles des manipulateurs série, se sont avérées particulièrement appropriées dans nombre d'applications. Nous croyons que l'emploi de tels mécanismes se généralisera pour :

- les manipulations précises, impliquant éventuellement de lourdes charges ;
- les tâches impliquant des vitesses importantes ;
- les applications où il y a contact entre les objets transportés et l'environnement.

Un frein au développement des manipulateurs parallèles n'est pas leur coût (ils sont le plus souvent constitués de l'assemblage de composants standard) mais réside dans la plus grande complexité de leur mise en œuvre, de leur commande et de leur conception.

L'efficacité de la commande est tout d'abord liée à celle du calcul des modèles géométriques. Nous avons vu que l'on dispose en général d'une formulation analytique de la solution du modèle géométrique inverse, mais pas de celle du modèle géométrique direct. De nombreux progrès ont été réalisés récemment sur ce dernier problème, en particulier sur les méthodes permettant l'obtention de l'ensemble des solutions. Néanmoins des algorithmes très rapides restent encore à développer pour les besoins de la commande. Une diminution des temps de calcul pourrait être obtenue à l'aide de circuits spécialisés exécutant en parallèle les opérations : en général la structure des calculs à effectuer est très favorable à une parallélisation. Une autre solution que nous

avons examinée est de disposer de capteurs mesurant d'autres informations que les variables articulaires. Cette redondance permet non seulement de résoudre efficacement le modèle géométrique direct mais peut aussi servir pour le calibrage du mécanisme.

Pour ce qui concerne les matrices jacobiniennes nous avons vu qu'on dispose aussi en général d'une formulation analytique de l'inverse jacobienne mais pas de la jacobienne. Cette méconnaissance est gênante non seulement pour la commande mais aussi pour la conception, cette matrice conditionnant une bonne part des performances que l'on peut obtenir d'un manipulateur parallèle. Un apport théorique important serait la découverte d'une méthode de calcul rapide de la jacobienne, qui tiendrait compte de la structure particulière de l'inverse jacobienne. Une fois de plus l'utilisation de circuits spécialisés opérant en parallèle permettrait une réduction importante des temps de calcul de ces matrices. Il faut aussi remarquer l'importance du calcul des extremums de la norme de ces matrices lorsque le plateau mobile décrit un espace de travail donné. Ces extremums permettront de déterminer les limites de certaines performances des robots parallèles comme la précision de positionnement, les forces articulaires et généralisées maximales ... Ce sujet est totalement ouvert.

La détermination de l'espace de travail des robots parallèles est en général plus complexe que pour les manipulateurs série, en raison du couplage entre les translations et les orientations. Les méthodes géométriques sont cependant généralement très efficaces et l'on ne peut que regretter qu'elles ne soient pas plus fréquemment utilisées. Le problème connexe de la planification de trajectoire a été abordé mais reste encore largement ouvert.

La recherche des configurations singulières s'avère très importante pour les manipulateurs parallèles. C'est un problème théorique difficile mais crucial pour les applications pratiques. Face à la difficulté d'une approche analytique nous avons proposé une méthode géométrique qui nous a permis, dans un certain nombre de cas, de découvrir non seulement toutes les configurations singulières, mais aussi de les caractériser par des relations entre les paramètres de position et d'orientation du plateau mobile. Par ailleurs une approche algébrique a permis d'établir une méthode pour déterminer la présence de singularités dans un espace de travail en translation donné : l'intérêt pratique évident de ce type d'algorithme en fait un sujet d'étude prometteur.

La méconnaissance de la matrice jacobienne rend difficile l'étude théorique de l'équilibre statique des manipulateurs parallèles ainsi que celle de leurs caractéristiques de vitesses et de précision de positionnement. Il en est de même pour les caractéristiques de raideur qui, même si elles font appel à la matrice jacobienne inverse, ont encore été peu étudiées. Ces sujets restent encore largement à défricher, en particulier lorsqu'il s'agit de déterminer les extremums de ces caractéristiques pour un espace de travail donné.

Nous avons aussi vu que les modèles dynamiques inverse et directe sont complexes. Même si l'on demande en général à ce type de mécanisme dans le cadre d'applications robotiques des performances très différentes de celles des simulateurs de vol il existe cependant des applications pour lesquels une commande dynamique semble incontournable. On bute ici sur le problème du temps de calcul, encore trop important, au moins pour les robots à 6 degrés de liberté.

Parmi les domaines de recherche où pratiquement tout reste à faire mentionnons ceux de la synthèse, de la conception et de la conception optimale des manipulateurs parallèles. Nous avons décrit les quelques travaux dans ce champ et il est apparu clairement qu'on ne sait pas encore apporter de réponse à la question de la détermination du meilleur mécanisme pour la réalisation d'une tâche donnée.

Un problème difficile est posé par le calibrage des manipulateurs parallèles. C'est le prix à payer pour les performances des robots parallèles : les erreurs de fabrication et de mesure des variables articulaires entraînant de faibles erreurs sur le positionnement de la plate-forme il est difficile d'utiliser ces erreurs pour identifier les paramètres géométriques réels du robot.

Le domaine des manipulateurs parallèles a pris une extension importante dans les dernières années, comme l'atteste à la fois le nombre sans cesse croissant de publications dans ce domaine et les applications diverses qui ont été faites de ces mécanismes. Si de nombreux travaux ont éclairci certains aspects particuliers de ce type de mécanisme, de nombreux sujets d'étude restent encore ouverts. Il a été démontré ces dernières années que le concept robot parallèle n'est pas purement académique et, qu'au contraire, il s'agit de systèmes dont l'utilisation en milieu industriel est une réalité. Nous espérons simplement que cet ouvrage aidera à la compréhension des phénomènes, parfois complexes, mis en jeu lors de l'élaboration et de l'utilisation des manipulateurs parallèles.

Table des matières

Bibliographie

Une base de donnée bibliographique sur les manipulateurs parallèles est disponible à l'adresse :

<http://www.inria.fr/prisme/personnel/merlet/merlet.html>

- [1] Adli M.A., Nagai K., Miyata K., et Hanafusa H. Analysis of internal force effect in parallel manipulators. *Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers*, 27(11):1266–1273, Novembre 1991.
- [2] Agrawal S.K. Workspace boundaries of in-parallel manipulator systems. *Int. J. of Robotics and Automation*, 7(2):94–99, 1992.
- [3] Agrawal S.K., Desmier G., et Li S. Fabrication and analysis of a novel 3 dof parallel wrist mechanism. *ASME J. of Mechanical Design*, 117(2):343–345, Juin 1995.
- [4] Ait-Ahmed M. *Contribution à la modélisation géométrique et dynamique des robots parallèles*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2 Février 1993.
- [5] Albus J., Bostelman R., et Dagalakis N. The NIST ROBOCRANE. *J. of Robotic Systems*, 10(5):709–724, Juillet 1993.
- [6] Alizade R.I. et Tagiyev N.R. A forward and reverse displacement analysis of a 6-dof in-parallel manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 29(1):115–124, Janvier 1994.
- [7] Alizade R.I., Tagiyev N.R., et Duffy J. A forward and reverse displacement analysis of an in-parallel spherical manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 29(1):125–137, Janvier 1994.
- [8] Amirat M.Y., Pontnau J., et Artigue F. Force-feedback control of a six dof parallel robot. Application to assembly in car manufacturing. *Revue d'Automatique et de Productique Appliquée*, 4(2):109–121, 1991.
- [9] Amirat M.Y., Pontnau J., et Artigue F. Six degrees of freedom parallel robot with C5 link. *Robotica*, 10(1):35–44, Janvier 1992.
- [10] Amirat M.Y., Pontnau J., et Artigue F. A three-dimensional measurement system for robot manipulators. *J. of Intelligent and Robotic Systems*, 9(3):291–299, 1994.
- [11] Angeles J. et Gosselin C. Détermination du degré de liberté des chaînes cinématiques simples et complexes. In *7th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 199–202, Seville, 17-22 Septembre 1987.
- [12] Angeles J. et Zanganeh K.E. The semi-graphical solution of the direct kinematics of general platform manipulators. In *ISRAM*, pages 45–52, Santa-Fe, 11-13 Novembre 1992.
- [13] Arai T., Cleary K., et al. Design, analysis and construction of a prototype parallel link manipulator. In *IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, volume 1, pages 205–212, Ibaraki, Japan, 3-6 Juillet 1990.
- [14] Arai T. et al. Development of a parallel link manipulator. In *ICAR*, pages 839–844, Pise, 19-22 Juin 1991.

- [15] Arai T., Stoughton R., et Merlet J-P. Teleoperator assisted hybrid control for parallel link manipulator and its application to assembly task. In *Int. Symp. on Measurement and Control in Robotics, ISMCR '92*, pages 817–822, Tsukuba, 15-19 Novembre 1992.
- [16] Arai T., Stoughton R., et Raju G.J. Bilateral control for parallel link manipulators. In *IMACS/SICE Int. Symp. on Robotics, Mechatronics, and Manufacturing Systems*, pages 467–472, Kobe, 16-20 Septembre 1992.
- [17] Arai T., Stoughton R., et Jaya Y.M. Micro hand module using parallel link mechanism. In *Japan-USA Symp. on Flexible Automation*, pages 163–168, San Francisco, 13-15 Juillet 1993.
- [18] Arai T., Larssonneur R., et Jaya Y.M. Calibration and basic motion of a micro-hand module. In *Int. Conf. on Indus. Electronics, Control and Instrumentation (IECON)*, pages 1660–1665, Hawaii, 15-19 Novembre 1993.
- [19] Artigue F., Amirat M.Y., et Pontnau J. Isoelastic behavior of parallel robots. *Robotica*, 7:323–325, 1989.
- [20] Artobolevski I. *Théorie des mécanismes et des machines*. Mir, Moscou, 1975.
- [21] Arun V. et al. Determination of the workspace of the 3-dof double-octahedral variable-geometry-truss manipulator. In *22nd Biennial Mechanisms Conf.*, pages 493–500, Scottsdale, 13-16 Septembre 1992.
- [22] Asada H. et Granito C. Kinematic and static characterization of wrist joints and their optimal design. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 244–250, St Louis, 25-28 Mars 1985.
- [23] Austad A. Arm device, 4 Juin 1987. IPN n° WO 87,03239.
- [24] Baker J.E. An analysis of the Bricard linkages. *Mechanism and Machine Theory*, 15(4):267–286, 1980.
- [25] Ball R.S. *The Theory of Screws*. Hodges Foster and Co., Dublin, 1876.
- [26] Baret M. Six degrees of freedom large motion system for flight simulators, piloted aircraft environment simulation techniques. In *AGARD Conference Proceeding n°249, Piloted aircraft environment simulation techniques*, pages 22–1/22–7, Bruxelles, 24-27 Avril 1978.
- [27] Baron L. et Angeles J. The measurement subspaces of parallel manipulators under sensor redundancy. In *ASME Design Automation Conf.*, pages 467–474, Minneapolis, 11-14 Septembre 1994.
- [28] Baron L. et Angeles J. The isotropic decoupling of the direct kinematic of parallel manipulators under sensor redundancy. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1541–1546, Nagoya, 25-27 Mai 1995.
- [29] Bégon P. *Commande des robots parallèles rapides. Application au robot HEXA*. Thèse de doctorat, Université Montpellier II, Montpellier, 23 Juin 1995.
- [30] Bégon P., Pierrot F., et Dauchez P. Insertions rapides avec un robot parallèle à six degrés de liberté. *Revue d'Automatique et de Productique Appliquée*, 8(4):513–528, 1995.
- [31] Behi F. Kinematic analysis for a six-degree-of-freedom 3-PRPS parallel mechanism. *IEEE J. of Robotics and Automation*, 4(5):561–565, Octobre 1988.
- [32] Bénéa R. *Contribution à l'étude des robots pleinement parallèles de type 6R-RR-S*. Thèse de doctorat, Université de Savoie, Annecy, 16 Décembre 1996.
- [33] Bernelli-Zazzera F. et Gallieni D. Analysis and design of an hexapod mechanism for autonomous payload pointing. In *46th IAF Congress*, Oslo, 2-6 Octobre 1995.
- [34] Bernier D., Castelain J-M., et Li X. A new parallel structure with six degree of freedom. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 8–12, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.

- [35] Berthomieu T. *Étude d'un micro-manipulateur parallèle et de son couplage avec un robot porteur*. Thèse de doctorat, ENSTAE, Toulouse, 24 Janvier 1989.
- [36] Bessala J. *Détermination des expressions analytiques d'espaces de travail des systèmes mécaniques, et applications*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 11 Septembre 1995.
- [37] Bhattacharya S., Hatwal H., et Ghosh A. On the optimum design of a Stewart platform type parallel manipulators. *Robotica*, 13(2):133–140, Mars- Avril 1995.
- [38] Bhattacharya S., Hatwal H., et Ghosh A. An on-line estimation scheme for generalized Stewart platform type parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 32(1):79–89, Janvier 1997.
- [39] Boissonnat J-D et Yvinec M. *Géométrie algorithmique*. Ediscience International, Paris, 1995.
- [40] Borel E. Mémoire sur les déplacements à trajectoire sphériques. *Mémoire présentés par divers savants*, 33(1):1–128, 1908.
- [41] Bouanane K. et Fenton R.G. Kinematic analysis of parallel manipulators. In *ARK*, pages 115–122, Ferrare, 7-9 Septembre 1992.
- [42] Boudreau R. et Turkkan N. Solving the forward kinematics of parallel manipulators with a genetic algorithm. *J. of Robotic Systems*, 13(2):111–125, Février 1996.
- [43] Brandt G. et al. A compact robot for image guided orthopedic surgery. In *First Joint Conf. of Computer Vision, Virtual Reality and Robotics (CRVMED)II and Medical Robotics and Computer Assisted Surgery (MRCAS)III*, Grenoble, 19-22 Mars 1997.
- [44] Bricard R. Mémoire sur les déplacements à trajectoire sphériques. *Journal de l'École Polytechnique*, 11(2):1–96, 1906.
- [45] Bricard R. Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé. *Journal de Mathématiques pures et appliquées, Liouville*, tome 3:113–148, 1897.
- [46] Cauchy A. Deuxième mémoire sur les polygones et les polyèdres. *Journal de l'École Polytechnique*, pages 87–98, Mai 1813.
- [47] Ceccarelli M., Ferraresi C., et Sorli M. Stiffness evaluation of a 6 d.o.f. platform prototype. In *3rd Int. Symp. on Measurement and Control in Robotics*, pages Bm.III–19, Bm.III–24, Turin, 21-24 Septembre 1993.
- [48] Chakarov D. et Parushev P. Synthesis of parallel manipulator with linear drive modules. *Mechanism and Machine Theory*, 29(7):917–932, Octobre 1994.
- [49] Charentus S. *Modélisation et commande d'un robot manipulateur redondant composé de plusieurs plate-formes*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 13 Avril 1990.
- [50] Chen N.X. et Song S-M. Direct position analysis of the 4-6 Stewart platform. *ASME J. of Mechanical Design*, 116(1):61–66, Mars 1994.
- [51] Cheng H.H. Real-time manipulation of a hybrid serial-and-parallel driven redundant industrial manipulator. *J. of Dyn. Syst. Meas. and Control*, 116:687–701, Décembre 1994.
- [52] Cheok Ka.C., Overholt J.L., et Beck R.R. Exact methods for determining the kinematics of a Stewart platform using additional displacement sensors. *J. of Robotic Systems*, 10(5):689–707, Juillet 1993.
- [53] Chélat O., Myszkowski P., Longchamp R., et Merlet J-P. Algorithme itératif à convergence démontrée pour les changements de coordonnées des mécanismes articulés. Rapport de Recherche 1996-07, EPFL, Institut d'Automatique, Lausanne, Suisse, Novembre 1996.
- [54] Chiacchio P., Pierrot F., Sciacivco L., et Siciliano B. Robust design of independent joint controllers with experimentation on a high-speed parallel robot. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 40(4):393–403, Août 1993.

- [55] Chirikjian G.S. A binary paradigm for robotic manipulators. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 3063–3070, San Diego, 8-13 Mai 1994.
- [56] Chirikjian G.S. Hyper-redundant manipulator dynamics: a continuum approximation. *Advanced Robotics*, 9(3):217–243, 1995.
- [57] Clarkson K. L. Safe and effective determinant evaluation. In *Proc. 33rd Annu. IEEE Sympos. Found. Comput. Sci.*, pages 387–395, 1992.
- [58] Claudinon B. et Lievre J. Test facility for rendez-vous and docking. In *36th Congress of the IAF*, pages 1–6, Stockholm, 7-12 Octobre 1985.
- [59] Clavel R. Une nouvelle structure de manipulateur parallèle pour la robotique légère. *APII*, 23(6):501–519, 1989.
- [60] Clavel R. *Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté*. Thèse de doctorat, EPFL, Lausanne, 1991. n° 925.
- [61] Clavel R. Robots parallèles, 1994. Techniques de l'Ingénieur, Traité Mesures et Contrôle.
- [62] Cleary K. et Arai T. A prototype parallel manipulator: kinematics construction, software, workspace results and singularity analysis. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 566–571, Sacramento, 11-14 Avril 1991.
- [63] Cleary K. et Brooks T. Kinematic analysis of a novel 6-dof parallel manipulator. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 708–713, Atlanta, 2-6 Mai 1993.
- [64] Codourey A. *Contribution à la commande des robots rapides et précis. Application au robot Delta à entraînement direct*. Thèse de doctorat, EPFL, Lausanne, 1991. n° 922.
- [65] Colbaugh R., Glass K., et Seraji H. Direct adaptive control of robotics systems. In *American Control Conf.*, pages 1138–1143, San Francisco, 2-4 Juin 1993.
- [66] Collins C.L. et Long G.L. On the duality of twist/wrench in serial and parallel chain robot manipulators. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 526–531, Nagoya, 25-27 Mai 1995.
- [67] Collins C.L. et Long G.L. The singularity analysis of an in-parallel hand controller for force-reflected teleoperation. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 11(5):661–669, Octobre 1995.
- [68] Comin F. Six degree-of-freedom scanning supports and manipulators based on parallel robots. *Review of Scientific Instruments*, 66(2):1665–1667, Février 1995.
- [69] Corrigan T.R.J. et Dubowsky S. Emulating micro-gravity in laboratory studies of space robotics. In *ASME Design Automation Conf.*, pages 109–116, Minneapolis, 11-14 Septembre 1994.
- [70] Cox D.J. et Tesar D. The dynamic model of a three-degree-of-freedom parallel robotic shoulder module. In *4th ICAR*, pages 475–487, Columbus, Ohio, 13-15 Juin 1989.
- [71] Craver W.M. Structural analysis and design of a three-degree-of-freedom robotic shoulder module. Master's thesis, The University of Texas, Austin, 1989.
- [72] Dafaoui M., Amirat Y., Pontnau J., et Francois C. Manipulateur parallèle à six degrés de liberté: modèles et volume de travail. *Revue d'Automatique et de Productique Appliquée*, 7(2):195–220, 1994.
- [73] Dagalakis N.G. et al. Stiffness study of a parallel link robot crane for shipbuilding applications. *J. of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 111(3):183–193, Août 1989.
- [74] Dandurand A. The rigidity of compound spatial grid. *Structural Topology* 10, pages 43–55, 1984.
- [75] Danescu G. et Dahan M., 3 Janvier 1994. Prolégomènes n° 6 (INRIA).

- [76] Danescu G. *Une méthode algébrique de synthèse et conception de mécanismes articulés*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, Besançon, 22 Juin 1995.
- [77] Daniali H.R.M., Zsombor-Murray P.J., et Angeles J. The kinematics of a 3 d.o.f. planar and spherical double-triangular parallel manipulators. In J. Angeles P. Kovacs, G. Hommel, editor, *Computational Kinematics*, pages 153–164. Kluwer, 1993.
- [78] Daniali H.R.M., Zsombor-Murray P.J., et Angeles J. Singularity analysis of a general class of planar parallel manipulators. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1547–1552, Nagoya, 25-27 Mai 1995.
- [79] Daniel R.W., Fischer P.J., et Hunter B. A high performance parallel input device. In *SPIE, Telemanipulator Technology and Space Telerobotics*, pages 272–281, Boston, 3-9 Septembre 1993.
- [80] Dasgupta B. et Mruthyunjaya T.S. A canonical formulation of the direct position kinematics for a general 6-6 Stewart platform. *Mechanism and Machine Theory*, 29(6):819–827, Août 1994.
- [81] Dasgupta B. et Mruthyunjaya T.S. A constructive predictor-corrector algorithm for the direct position kinematic problem for a general 6-6 Stewart platform. *Mechanism and Machine Theory*, 31(6):799–811, Août 1996.
- [82] Davidson J.K. et Hunt K.H. Rigid body location and robot workspaces: some alternative manipulator forms. *J. of Mechanisms, Transmission and Automation in Design*, 109:224–232, Juin 1987.
- [83] Davis A.T. et Bradshaw A. Solution and transputer computation of the forward geometry of a manipulator with fully parallel architecture. In Warwick K., editor, *Robotics: applied mathematics and computational aspects*, pages 391–402. Oxford University Press, 1993.
- [84] Dedieu J-P et Norton G.H. Stewart varieties: a direct algebraic method for Stewart platforms. *SigSam*, 24(4):42–59, Octobre 1990.
- [85] Démidovitch B. et Maron I. *Eléments de calcul numérique*. Mir, 1979.
- [86] Devaquet G. et Brauchli H. A simple mechanical model for the Delta-robot. *Robotersysteme*, 8(4):193–199, 1992.
- [87] Dhingra A., Kohli D., et Xu Y.X. Direct kinematic of general Stewart platforms. In *22nd Biennial Mechanisms Conf.*, pages 107–112, Scottsdale, 13-16 Septembre 1992.
- [88] Dietmaier P. Forward kinematics and mobility of one type of symmetric Stewart-Gough platforms. In *ARK*, pages 379–388, Portoroz-Bernadin, 22-26 Juin 1996.
- [89] Do W.Q.D. et Yang D.C.H. Inverse dynamic analysis and simulation of a platform type of robot. *J. of Robotic Systems*, 5(3):209–227, 1988.
- [90] Dorsey J.T., Sutter T.R., et Wu K.C. Structurally adaptive space crane concept for assembling space systems on orbit. Rapport de Recherche TP-3307, NASA Research Center, Langley, Novembre 1992.
- [91] Douady D. *Contribution à la modélisation des robots parallèles: conception d'un nouveau robot à 3 liaisons et six degrés de liberté*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, Paris, 9 Décembre 1991.
- [92] Drosdol J. et Panik F. The Daimler-Benz driving simulator. A tool for vehicle development, 25 Février-1 Mars 1985. SAE Technical Paper Series.
- [93] Dubowsky S. et al. The design and implementation of a laboratory test bed for space robotics: the VES mod. II. In *ASME Design Automation Conf.*, pages 99–108, Minneapolis, 11-14 Septembre 1994.
- [94] Duffy J. *Statics and Kinematics with Applications to Robotics*. Cambridge University Press, New-York, 1996.

- [95] Dunlop G.R., Jones T.P., et Lintott A.B. Three DOF parallel robots for linear and spherical positioning. In *ISRAM*, pages 655–660, Hawaï, 15-17 Août 1994.
- [96] Dwolastzki B. et Thornton G.S. The GEC Tetrabot-A serial-parallel topology robot: control design aspects. In *IEE Int. Workshop on Robot Control*, pages 426–431, Oxford, 11-12 Avril 1989.
- [97] Earl C.F. et Rooney J. Some kinematics structures for robot manipulator designs. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 105(1):15–22, Mars 1983.
- [98] Ebert-Uphoff I. et Chirikjian G.S. Inverse kinematics of discretely actuated hyper-redundant manipulators using workspace densities. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 139–145, Minneapolis, 24-26 Avril 1996.
- [99] Erdman A.G. *Modern Kinematics*. Wiley, New-York, 1993.
- [100] Everett L.J. Forward calibration of closed-loop jointed manipulators. *Int. J. of Robotics Research*, 8(4):85–91, Août 1989.
- [101] Faugère J.C. et Lazard D. The combinatorial classes of parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 30(6):765–776, Août 1995.
- [102] Feng G. et al. A physical model of the solution space and the atlas of the reachable workspace for 2-dof parallel planar manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 31(2):173–184, Février 1996.
- [103] Feng G. et al. Physical model of the solution space of 3-dof parallel planar manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 31(2):161–171, Février 1996.
- [104] Fenyi S.E. Stewart platform based 6-axis force and torque transducers. In J-P. Merlet B. Ravani, editor, *Computational Kinematics*, pages 221–230. Kluwer, 1995.
- [105] Ferraresi C., Montacchini G., et Sorli M. Workspace and dexterity evaluation of 6 d.o.f. spatial mechanisms. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 57–61, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.
- [106] Fichter E.F. et McDowell E.D. A novel design for a robot arm. In *Proc. Int. Computer Technical Conf.*, pages 250–255, San Francisco, 1980.
- [107] Fichter E.F. Kinematics of a parallel connection manipulator. In *ASME Design Engineering Technology Conf.*, pages 1–8, Cambridge (MA), 7-12 Octobre 1984.
- [108] Fichter E.F. A Stewart platform based manipulator: general theory and practical construction. *Int. J. of Robotics Research*, 5(2):157–181, Été 1986.
- [109] Fioretti A. Implementation-oriented kinematics analysis of a 6 dof parallel robotic platform. In *4th IFAC Symp. on Robot Control, Syroco*, pages 43–50, Capri, 19-21 Septembre 1994.
- [110] Freudenstein F. On the variety of motion generated by mechanisms. *Transaction of the ASME*, pages 156–160, Février 1962.
- [111] Fujimoto K. et al. Derivation and analysis of equations of motion for a 6 d.o.f. direct drive wrist joint. In *IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 779–784, Osaka, 3-5 Novembre 1991.
- [112] Funabashi H. et al. Development of spatial parallel manipulators with 6 d.o.f. *JSME Int. J., Serie III, Vibration*, 34(3):387–392, 1991.
- [113] Funabashi H. In parallel actuated mechanisms as a new robotic mechanism. *Advanced Robotics*, 8(6):535–544, Décembre 1994.
- [114] Funabashi H. et Takeda Y. Determination of singular points and their vicinity in parallel manipulators based on the transmission index. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 1977–1981, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.

- [115] Geiger B. *Three-dimensional modeling of human organs and its application to diagnosis and surgical planning*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, France, 1993.
- [116] Geng Z. et Haynes L.S. Neural network for the forward kinematics problem of a Stewart platform. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 2650–2655, Sacramento, 11-14 Avril 1991.
- [117] Geng Z. et Haynes L.S. On the dynamic model and kinematic analysis of a class of Stewart platforms. *Robotics and Autonomous Systems*, 9(4):237–254, 1992.
- [118] Geng Z. et Haynes L.S. Six-degree-of-freedom active vibration isolation using a Stewart platform mechanism. *J. of Robotic Systems*, 10(5):725–744, Juillet 1993.
- [119] Geng Z. et Haynes L.S. An effective kinematics calibration method for Stewart platform. In *ISRAM*, pages 87–92, Hawaï, 15-17 Août 1994.
- [120] Geng Z. et Haynes L.S. A 3-2-1 kinematic configuration of a Stewart platform and its application to six degree of freedom pose measurements. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 11(1):23–34, Mars 1994.
- [121] Ghorbel F., Chetelat O., et Longchamp R. A reduced model for constrained rigid bodies with application to parallel robots. In *4th IFAC Symp. on Robot Control, Syroco*, pages 57–62, Capri, 19-21 Septembre 1994.
- [122] Gosselin C. *Kinematic analysis optimization and programming of parallel robotic manipulators*. Thèse de doctorat, McGill University, Montréal, 15 Juin 1988.
- [123] Gosselin C. et Angeles J. The optimum kinematic design of a spherical three-degree-of-freedom parallel manipulator. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 111(2):202–207, 1989.
- [124] Gosselin C. Stiffness mapping for parallel manipulators. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 6(3):377–382, Juin 1990.
- [125] Gosselin C. Determination of the workspace of 6-dof parallel manipulators. *ASME J. of Mechanical Design*, 112(3):331–336, Septembre 1990.
- [126] Gosselin C. et Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 6(3):281–290, Juin 1990.
- [127] Gosselin C. et Angeles J. Kinematic inversion of parallel manipulators in the presence of incompletely specified tasks. *ASME J. of Mechanical Design*, 112(4):494–500, Décembre 1990.
- [128] Gosselin C., Sefrioui J., et Richard M.J. Solution polynomiale au problème de la cinématique directe des manipulateurs parallèles plans à 3 degrés de liberté. *Mechanism and Machine Theory*, 27(2):107–119, Mars 1992.
- [129] Gosselin C. et Lavoie E. Spherical parallel manipulators: dexterity and isotropy. In *ARK*, pages 143–149, Ferrare, 7-9 Septembre 1992.
- [130] Gosselin C., Lavoie E., et Toutant P. An efficient algorithm for the graphical representation of the three-dimensional workspace of parallel manipulators. In *22nd Biennial Mechanisms Conf.*, pages 323–328, Scottsdale, 13-16 Septembre 1992.
- [131] Gosselin C., Sefrioui J., et Richard M.J. On the direct kinematics of general spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators. In *22nd Biennial Mechanisms Conf.*, pages 7–11, Scottsdale, 13-16 Septembre 1992.
- [132] Gosselin C.M et Lavoie E. On the kinematic design of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators. *Int. J. of Robotics Research*, 12(4):394–402, Août 1993.
- [133] Gosselin C. et Merlet J-P. On the direct kinematics of planar parallel manipulators: special architectures and number of solutions. *Mechanism and Machine Theory*, 29(8):1083–1097, Novembre 1994.

- [134] Gosselin C. et Hamel J.-F. The Agile Eye: A high performance three-degree-of-freedom camera-orienting device. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 781–787, San Diego, 8-13 Mai 1994.
- [135] Gosselin C., Perreault T., et Vaillancourt C. Smaps: a computer-aided design package for the analysis and optimization of a spherical parallel manipulators. In *ISRAM*, pages 115–120, Hawaï, 14-18 Août 1994.
- [136] Gosselin C. et Gagné M. A closed-form solution for the direct kinematics of a special class of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators. In J.-P. Merlet B. Ravani, editor, *Computational Kinematics*, pages 231–240. Kluwer, 1995.
- [137] Gosselin C. et Wang J. Singularity loci of planar parallel manipulator. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 1982–1986, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.
- [138] Gosselin C., Lemieux S., et Merlet J.-P. A new architecture of planar three-degree-of-freedom parallel manipulator. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 3738–3743, Minneapolis, 24-26 Avril 1996.
- [139] Gosselin C. Parallel computational algorithms for the kinematics and dynamics of planar and spatial parallel manipulators. *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 118(1):22–28, Mars 1996.
- [140] Goudali A., Lallemand J.-P., et Zeghloul S. Espace de travail de la nouvelle structure 2-Delta. *Revue d'Automatique et de Productique Appliquée*, 8(2-3):205–210, 1995.
- [141] Gough V.E. Contribution to discussion of papers on research in automobile stability, control and tyre performance, 1956-1957. Proc. Auto Div. Inst. Mech. Eng.
- [142] Gough V.E. et Whitehall S.G. Universal tire test machine. In *Proceedings 9th Int. Technical Congress F.I.S.I.T.A.*, volume 117, pages 117–135, London, Mai 1962.
- [143] Grace K.W. et al. A six degree of freedom micromanipulator for ophthalmic surgery. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 630–635, Atlanta, 2-6 Mai 1993.
- [144] Griffis M. et Duffy J. A forward displacement analysis of a class of Stewart platform. *J. of Robotic Systems*, 6(6):703–720, 1989.
- [145] Griffis M., Crane C., et Duffy J. A smart kinestatic interactive platform. In *ARK*, pages 459–464, Ljubljana, 4-6 Juillet 1994.
- [146] Grimbart D. et Marchal P. Dynamic testing of a docking system. In *First European In-Orbit Operations Technology Symposium*, pages 281–288, Darmstadt, 7-9 Septembre 1987.
- [147] Grunewald P. Car body painting with the spine spray system. In *14th Int. Symp. on Industrial Robots (ISIR)*, pages 633–641, Gothenburg, 1984.
- [148] Guglielmetti P. *Model-Based control of fast parallel robots: a global approach in operational space*. Thèse de doctorat, EPFL, Lausanne, 24 Mars 1994.
- [149] Guozhen W. Forward displacement analysis of a class of the 6-6 Stewart platforms. In *22nd Biennial Mechanisms Conf.*, volume DE-45, pages 113–117, Scottsdale, 13-16 Septembre 1992.
- [150] Hamlin G.J. et Sanderson A.C. A novel concentric multilink spherical joint with parallel robotics applications. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1267–1272, San Diego, 8-13 Mai 1994.
- [151] Han K., W. Chung, et Youm Y. New resolution scheme of the forward kinematics of parallel manipulators using extra sensor data. *ASME J. of Mechanical Design*, 118(2):214–219, Juin 1996.
- [152] Han C.-S., Tesar D., et Traver A. The optimum design of a 6 dof fully parallel micromanipulator for enhanced robot accuracy. In *ASME Design Automation Conf.*, pages 357–363, Montréal, 17-20 Septembre 1989.

- [153] Han C-S., Hudgens J.C., Tesar D., et Traver A.E. Modeling, synthesis, analysis and design of high resolution micromanipulator to enhance robot accuracy. In *IEEE Int. Conf. on Intelligent Robot and Systems (IROS)*, pages 1153–1162, Osaka, 3-5 Novembre 1991.
- [154] Hara A. et Sugimoto K. Synthesis of parallel micromanipulators. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 111(1):34–39, Mars 1989.
- [155] Harris D.M.J. A hydraulic parallel-linkage robot. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 1695–1699, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.
- [156] Harris D.M.J. Parallel-linkage robot coordinate transformation through screw theory. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 1565–1568, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.
- [157] Hartenberg R.S. Denavit J. *Kinematic synthesis of linkages*. McGraw-Hill, New-York, 1964.
- [158] Hashimoto M. et Imamura Y. Design and characteristics of a parallel link compliant wrist. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 2457–2462, San Diego, 8-13 Mai 1994.
- [159] Hatip O.E. et Ozgoren M.K. Utilization of a Stewart platform mechanism as a stabilizator. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 1393–1396, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.
- [160] Haugh E.J., Adkins F.A., et Luh C.M. Domain of operation and interference for bodies in mechanisms and manipulators. In J-P. Merlet B. Ravani, editor, *Computational Kinematics*, pages 193–202. Kluwer, 1995.
- [161] Haynes L.S., Geng Z., et Teter J. A new Terfenol-D actuator design with applications to multiple DOF active vibration control. In *SPIE Smart structures and Intelligent systems*, pages 919–928, Albuquerque, 1-4 Février 1993.
- [162] Hayward V. et Kurtz R. Preliminary study of serial-parallel redundant manipulator. In *NASA Conference on Space Telerobotics*, pages 39–48, Pasadena, 31 Janvier 1989.
- [163] Helinski A.L. Dynamic and kinematic study of a Stewart platform using Newton-Euler techniques. Rapport de Recherche 13479, Tank Automotive Command, Janvier 1990.
- [164] Hertz R.B. et Hughes P.C. Forward kinematics of a 3 d.o.f. variable-geometry-truss manipulators. In J. Angeles P. Kovacs, G. Hommel, editor, *Computational Kinematics*, pages 241–250. Kluwer, 1993.
- [165] Hervé J.M. Analyse structurelle des mécanismes par groupe de déplacements. *Mechanism and Machine Theory*, 13(4):437–450, 1978.
- [166] Hervé J-M. et Sparacino F. Star, a new concept in robotics. In *ARK*, pages 176–183, Ferrare, 7-9 Septembre 1992.
- [167] Hervé J.M. Group mathematics and parallel link mechanisms. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 2079–2082, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.
- [168] Hesselbach J. et Kerle H. Structurally adapted kinematic algorithms for parallel robots up to six degrees of freedom (dof). In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 1935–1939, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.
- [169] Higuchi T., Ming A., et Jiang-Yu J. Application of multi-dimensional wire crane in construction. In *5th Int. Symp. on Robotics in Construction*, pages 661–668, Tokyo, 6-8 Juin 1988.
- [170] Hoffman R. Dynamics and control of a flight simulator motion system. In *Canadian Conf. on Automatic Control*, pages 1–10, Montréal, 23-25 Mai 1979.
- [171] Hoffman R. et McKinnon M.G. Vibrational modes of an aircraft simulator motion system. In *5th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 603–606, Montréal, Juillet 1979.

- [172] Homma K. et Arai T. Upper limb motion assist system with parallel mechanisms. In *2nd Japan-France Congress on Mechatronics*, pages 388–391, Takamatsu, 1-3 Novembre 1994.
- [173] Huang Z., Tao W.S., et Fang Y.F. Study on the kinematics characteristics of 3 DOF in-parallel actuated platform mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 31(8):999–1007, Novembre 1996.
- [174] Huang Z. et Fang Y.F. Kinematic characteristics analysis of 3 DOF in-parallel pyramid mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 31(8):1009–1018, Novembre 1996.
- [175] Huang M.Z. A note on kinematics of in-parallel actuated platform manipulators. In *2nd National Applied Mechanisms and Robotics Conf.*, pages IXC.6–1/IXC.6–4, Cincinnati, 3-6 Novembre 1992.
- [176] Hui R. et al. Mechanisms for haptic feedback. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 2138–2143, Nagoya, 25-27 Mai 1995.
- [177] Hunt K.H. *Kinematic geometry of mechanisms*. Clarendon Press, Oxford, 1978.
- [178] Hunt K.H. Geometry of robotics devices. *Mechanical Engineering Transactions*, 7(4):213–220, 1982.
- [179] Hunt K.H. Structural kinematics of in parallel actuated robot arms. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 105(4):705–712, Mars 1983.
- [180] Hunt K.H. et Primrose E.J.F. Assembly configurations of some in-parallel actuated manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 28(1):31–42, Janvier 1993.
- [181] Husain M. et Waldron K.J. Position kinematics of a mixed mechanism. In *22nd Biennial Mechanisms Conf.*, volume DE-45, pages 41–48, Scottsdale, 13-16 Septembre 1992.
- [182] Husain M. et Waldron K.J. Direct position kinematics of the 3-1-1-1 Stewart platform. *ASME J. of Mechanical Design*, 116(4):1102–1108, Décembre 1994.
- [183] Husty M.L. et Zsombor-Murray P. A special type of singular Stewart-Gough platform. In *ARK*, pages 449–458, Ljubljana, 4-6 Juillet 1994.
- [184] Husty M.L. An algorithm for solving the direct kinematic of Stewart-Gough-type platforms. Rapport de Recherche TR-CIM-94-7, Université McGill, Montréal, 30 Juin 1994.
- [185] Innocenti C. et Parenti-Castelli V. Direct position analysis of the Stewart platform mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, 25(6):611–621, 1990.
- [186] Innocenti C. et Parenti-Castelli V. Direct kinematics of the 6-4 fully parallel manipulator with position and orientation uncoupled. In *European Robotics and Intelligent Systems Conf.*, Corfou, 23-28 Juin 1991.
- [187] Innocenti C. et Parenti-Castelli V. A novel numerical approach to the closure of the 6-6 Stewart platform mechanism. In *ICAR*, pages 851–855, Pise, 19-22 Juin 1991.
- [188] Innocenti C. et Parenti-Castelli V. Direct kinematics of the reverse Stewart platform mechanism. In *3rd IFAC/IFIP/IMACS Symp. on Robot Control, Syroco*, pages 75–80, Vienne, 16-18 Septembre 1991.
- [189] Innocenti C. et Parenti-Castelli V. Reduction singularities in kinematics solution of the general geometry 6-6 Stewart platform. In *IMACS/SICE Int. Symp. on Robotics, Mechatronics, and Manufacturing Systems*, pages 451–458, Kobe, 16-20 Septembre 1992.
- [190] Innocenti C. et Parenti-Castelli V. Forward kinematics of the general 6-6 Stewart fully-parallel mechanism: an exhaustive numerical approach via a mono-dimensional search algorithm. In *22nd Biennial Mechanisms Conf.*, volume DE-45, pages 545–552, Scottsdale, 13-16 Septembre 1992.
- [191] Innocenti C. et Parenti-Castelli V. Analytical form solution of the direct kinematics of a 4-4 fully in-parallel actuated six degree-of-freedom mechanism. In *9th RoManSy*, pages 41–50, Udine, 1992.

- [192] Innocenti C. et Parenti-Castelli V. Singularity-free evolution from one configuration to another in serial and fully-parallel manipulators. In *22nd Biennial Mechanisms Conf.*, pages 553–560, Scottsdale, 13–16 Septembre 1992.
- [193] Innocenti C. et Parenti-Castelli V. Echelon form solution of direct kinematics for the general fully-parallel spherical wrist. *Mechanism and Machine Theory*, 28(4):553–561, Juillet 1993.
- [194] Innocenti C. et Parenti-Castelli V. Direct kinematics in analytical form of a general 5-4 fully-parallel manipulators. In J. Angeles P. Kovacs, G. Hommel, editor, *Computational Kinematics*, pages 141–152. Kluwer, 1993.
- [195] Innocenti C. et Parenti-Castelli V. Closed-form direct position analysis of a 5-5 parallel mechanism. *ASME J. of Mechanical Design*, 115(3):515–521, Septembre 1993.
- [196] Innocenti C. Analytical determination of the intersection of two coupler-point curves generated by two four-bar linkages. In J. Angeles P. Kovacs, G. Hommel, editor, *Computational Kinematics*, pages 251–262. Kluwer, 1993.
- [197] Innocenti C. et Parenti-Castelli V. Symbolic-form forward kinematics of a 5-4 fully-parallel manipulators. In Lenarčič J. et Ravani B., editors, *ARK*, pages 429–438, Ljubljana, 4-6 Juillet 1994. Springer-Verlag.
- [198] Innocenti C. Direct kinematics in analytical form of the 6-4 fully parallel mechanism. *ASME J. of Mechanical Design*, 117(1):89–95, Mars 1995.
- [199] Innocenti C. Algorithms for kinematic calibration of fully-parallel manipulators. In J-P. Merlet B. Ravani, editor, *Computational Kinematics*, pages 241–250. Kluwer, 1995.
- [200] Inoue H., Tsusaka Y., et Fukuizumi T. Parallel manipulator. In *Proc. 3rd ISRR*, pages 321–327, Gouvieux, France, 7-11 Octobre 1985.
- [201] Iwara H. Artificial reality with force-feedback: development of desktop virtual space with compact master manipulator. *Computer Graphics*, 24(4):165–170, Août 1990.
- [202] Jain S. et Kramer S.N. Forward and inverse kinematics solution of the variable geometry truss robot based on N-celled tetrahedron-tetrahedron truss. *ASME J. of Mechanical Design*, 112(1):16–22, Mars 1990.
- [203] Jean M. et Gosselin C. Static balancing of planar parallel manipulators. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 3732–3737, Minneapolis, 24-26 Avril 1996.
- [204] Jensen P.S. et al. Robotic micromanipulator for ophthalmic surgery. In *1st Int. Symp. on Medical Robotics and Computer assisted Surgery*, pages 204–210, Pittsburgh, 22-24 Septembre 1994.
- [205] Jessop C.M. *A treatise on the line complex*. Chelsea Publishing Company, New-York, 1969.
- [206] Ji Z. Dynamic decomposition for Stewart platforms. *ASME J. of Mechanical Design*, 116(1):67–69, Mars 1994.
- [207] Jo D.Y. et Haug E.J. Workspace analysis of closed loop mechanisms with unilateral constraints. In *ASME Design Automation Conf.*, pages 53–60, Montréal, 17-20 Septembre 1989.
- [208] Jung G.H. et Lee K.I. Real-time estimation of the Stewart platform forward kinematics solution. In *SICE*, pages 1239–1244, Kanazawa, 4-6 Août 1993.
- [209] Kang H.J. et Freeman R.A. An interactive software package (MAP) for the dynamic modeling and simulation of parallel robotic systems including redundancy. In *ASME Int. Computer in Engineering Conf.*, pages 117–123, Boston, 5-9 Septembre 1990.
- [210] Karger A. et Husty M. On self-motions of a class of parallel manipulators. In *ARK*, pages 339–348, Portoroz-Bernadin, 22-26 Juin 1996.
- [211] Kassner D.J. Kinematics analysis of a planar three-degree-of-freedom platform-type robot manipulator. Master's thesis, Purdue University, Purdue, Décembre 1990.

- [212] Kawamura S. et al. Development of an ultrahigh speed robot FALCON using wire drive system. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 215–220, Nagoya, 25-27 Mai 1995.
- [213] Kerr D.R. Analysis, properties, and design of a Stewart-platform transducer. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 111(1):25–28, Mars 1989.
- [214] Kerr D.R., Griffis M., Sanger D.J., et Duffy J. Redundant grasps, redundant manipulators and their dual relationships. *J. of Robotic Systems*, 9(7):973–1000, 1992.
- [215] Khatib O. Inertial characteristics and dextrous dynamic coordination of macro/micro manipulator systems. In *7th CISM-IFTOMM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators*, Udine, Italie, Septembre 1988.
- [216] Khatib O. et Bowling A. Optimization of the inertial and acceleration characteristics of manipulators. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 2883–2889, Minneapolis, 24-26 Avril 1996.
- [217] King R.F. A flight simulator for advanced aircraft-servo: design to realization. In *Summer Computation Simulation Conf.*, pages 248–253, Montréal, 13-19 Juillet 1973.
- [218] Kleinfinger J.F. *Modélisation dynamique de robots à chaînes cinématiques simple arborescente ou fermée en vue de leur commande*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, Nantes, 16 Mai 1986.
- [219] Knapczyk J. et Dzierzek S. Kinematic analysis of 6S-5S type Stewart platform mechanism by using vector method. In *ARK*, pages 123–128, Ferrare, 7-9 Septembre 1992.
- [220] Koevermans W.P. et al. Design and performance of the four d.o.f. motion system of the NLR research flight simulator. In *AGARD Conf. Proc. No 198, Flight Simulation*, pages 17–1/17–11, La Haye, 20-23 Octobre 1975.
- [221] Kohli D., Lee S-H, Tsai K-Y, et Sandor G.N. Manipulator configurations based on Rotary-Linear (R-L) actuators and their direct and inverse kinematics. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 110:397–404, Décembre 1988.
- [222] Kokkinis T. et Millies P. A parallel robot-arm regional structure with actuational redundancy. *Mechanism and Machine Theory*, 26(6):629–641, 1991.
- [223] Kokkinis T. et Millies P. Kinetostatic performance of a dynamically redundant parallel robot. *Int. J. of Robotics and Automation*, 7(1):30–37, 1992.
- [224] Koliskor A. Sh. The 1-coordinate approach to the industrial robot design. In *V IFAC/IFIP/IMACS/IFORS Symposium*, pages 108–115, Suzdal, URSS, 22-25 Avril 1986.
- [225] Kosuge K. et al. Input/output force analysis of parallel link manipulators. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 714–719, Atlanta, 2-6 Mai 1993.
- [226] Kosuge K. et al. Computation of parallel link manipulator dynamics. In *Int. Conf. on Indus. Electronics, Control and Instrumentation (IECON)*, pages 1672–1677, Hawaii, 15-19 Novembre 1993.
- [227] Kosuge K. et al. Force control of parallel link manipulator with hydraulic actuators. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 305–310, Minneapolis, 24-26 Avril 1996.
- [228] Kumar V. Characterization of workspaces of parallel manipulators. *ASME J. of Mechanical Design*, 114(3):368–375, Septembre 1992.
- [229] Kumar V. Instantaneous kinematics of parallel-chain robotic mechanisms. *ASME J. of Mechanical Design*, 114(3):349–358, Septembre 1992.
- [230] Kurtz R.L. et Hayward V. Multiple-goal kinematic optimization of a parallel spherical mechanism with actuator redundancy. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 8(5):644–651, Octobre 1992.

- [231] Lambert M. Polyarticulated retractile mechanism, 24 Mars 1987. United States Patent n° 4,651,589, Société Becart S.A.
- [232] Lande M.A. et David R.J.P. Articulation for manipulator arm, 17 Novembre 1981. United States Patent n° 4,300,362, Association des Ouvriers en Instruments de Précision, Paris.
- [233] Landsberger S.E. et Sheridan T.B. A new design for parallel link manipulator. In *Proc. Systems, Man and Cybernetics Conf.*, pages 812–814, Tucson, 1985.
- [234] Landsberger S.E. et Shanmugasundram A.P. Workspace of parallel link crane. In *IMACS/SICE Int. Symp. on Robotics, Mechatronics, and Manufacturing Systems*, pages 479–486, Kobe, 16-20 Septembre 1992.
- [235] Landsberger S.E. et Sheridan T.B. A minimal, minimal linkage: the tension-compression parallel link manipulator. In *IMACS/SICE Int. Symp. on Robotics, Mechatronics, and Manufacturing Systems*, pages 493–500, Kobe, 16-20 Septembre 1992.
- [236] Larochelle P.M. Design of 3-dof spherical robotic mechanisms. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 1826–1830, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.
- [237] Laumond J.P. Obstacle growing in a non-polygonal world. *Information processing letters*, 25(1):41–50, 1987.
- [238] Lazard D. Stewart platform and Gröbner basis. In *ARK*, pages 136–142, Ferrare, 7-9 Septembre 1992.
- [239] Lazard D. On the representation of rigid-body motions and its application to generalized platform manipulators. In J. Angeles P. Kovacs, G. Hommel, editor, *Computational Kinematics*, pages 175–182. Kluwer, 1993.
- [240] Lazard D. et Merlet J-P. The (true) Stewart platform has 12 configurations. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 2160–2165, San Diego, 8-13 Mai 1994.
- [241] Lebesgue H. Octaèdre articulé de Bricard. *L'enseignement mathématique*, (13):150–160, 1967.
- [242] Lebret G., Liu K., et Lewis F. Dynamic analysis and control of a Stewart platform manipulator. *J. of Robotic Systems*, 10(5):629–655, Juillet 1993.
- [243] Lee D.S. et Chirikjian G.S. A combinatorial approach to trajectory planning for binary manipulators. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 2749–2754, Minneapolis, 24-26 Avril 1996.
- [244] Lee D.S. et Chirikjian G.S. An efficient method for computing the forward kinematics of binary manipulators. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1012–1017, Minneapolis, 24-26 Avril 1996.
- [245] Lee H-Y. et Roth B. A closed-form solution of the forward displacement analysis of a class of in-parallel mechanisms. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 720–724, Atlanta, 2-6 Mai 1993.
- [246] Lee J.D. et Geng Z. A dynamic model of a flexible Stewart platform. *Computers & Structures*, 48(3):367–374, 3 Août 1993.
- [247] Lee M.K. Design of a high stiffness machining robot arm using double parallel mechanism. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 234–240, Nagoya, 25-27 Mai 1995.
- [248] Lee S. et Kim S. Kinematic feature analysis of parallel manipulator systems. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 77–82, San Diego, 8-13 Mai 1994.
- [249] Lee K-M. et Shah D.K. Kinematic analysis of a three-degrees-of-freedom in-parallel actuated manipulator. *IEEE J. of Robotics and Automation*, 4(3):354–360, Juin 1988.
- [250] Lee K-M. et Shah D.K. Dynamic analysis of a three-degrees-of-freedom in-parallel actuated manipulator. *IEEE J. of Robotics and Automation*, 4(3):361–368, Juin 1988.

- [251] Lee K-M. et Arjunan S. A three-degrees-of freedom micromotion in-parallel actuated manipulator. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 7(5):634–641, Octobre 1991.
- [252] Lerbet J. *Mécanique des systèmes de solides rigides comportant des boucles fermées*. Thèse de doctorat, Paris VI, Paris, 19 Juin 1987.
- [253] Li-Chun T., Jun Kuo W., et Jun Kuo M. Dynamic load-carrying capacity and inverse dynamics of multiple cooperating robotic manipulators. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 10(1):71–74, Février 1994.
- [254] Lin W., Duffy J., et Griffis M. Forward displacement analysis of the 4-4 Stewart platform. *ASME J. of Mechanical Design*, 114(3):444–450, Septembre 1992.
- [255] Lin W., Crane III C.D., et Duffy J. Closed-form forward displacement analysis of the 4-5 in-parallel platforms. *ASME J. of Mechanical Design*, 116(1):47–53, Mars 1994.
- [256] Ling S-H. et Huang M.Z. Kinestatic analysis of general parallel manipulators. In *ASME Mechanisms Design Conf.*, Minneapolis, 14-16 Septembre 1994.
- [257] Liu A-X. et Yang T-L. Configuration analysis of a class of parallel structures using improved continuation. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 155–158, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.
- [258] Liu K. et al . Modeling and control of a Stewart platform manipulator. In *ASME Symp. on Control of Systems with inexact dynamic models*, pages 83–89, Atlanta, 1991.
- [259] Liu K., Lebret G., Lowe J.A., et Lewis F.L. Control of a Stewart platform based robotic milling cell. In *ASME Winter Annual Meeting, Symp. on Manufacturing and Control issues in a robotics assembly Workcell*, Angheim, 8-13 Février 1992.
- [260] Liu K., Fitzgerald M.K., et Lewis F. Kinematic analysis of a Stewart platform manipulator. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 40(2):282–293, Avril 1993.
- [261] Liu K. et al. Stewart-Platform-based inlet duct painting system. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 106–113, Atlanta, 2-6 Mai 1993.
- [262] Liu K., Lewis F., Lebret G., et Taylor D. The singularities and dynamics of a Stewart platform manipulator. *J. of Intelligent and Robotic Systems*, 8:287–308, 1993.
- [263] Lösch S. Inverse force analysis of the general planar parallel manipulator. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 1831–1835, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.
- [264] Lösch S. Parallel redundant manipulator based on open and closed normal Assur chains. In J-P. Merlet B. Ravani, editor, *Computational Kinematics*, pages 251–260. Kluwer, 1995.
- [265] Luh C.M., Adkins F.A., Haugh E.J., et Qiu C.C. Working capability analysis of Stewart platforms. *ASME J. of Mechanical Design*, 118(2):221–227, Juin 1996.
- [266] Lumsden C.J. CELLSIM: Virtual cells for research and molecular therapy design. *J. of Medecine and Virtual Reality*, 1(1):6–10, 1995.
- [267] Ma O. et Angeles J. Direct kinematics and dynamics of a planar three-dof parallel manipulator. In *ASME Design and Automation Conf.*, volume 3, pages 313–320, Montréal, 17-20 Septembre 1989.
- [268] Ma O. et Angeles J. Architecture singularities of platform manipulator. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1542–1547, Sacramento, 11-14 Avril 1991.
- [269] Ma O. et Angeles J. Optimum architecture design of platform manipulator. In *ICAR*, pages 1131–1135, Pise, 19-22 Juin 1991.
- [270] McCallion H. et Pham D.T. The analysis of a six degrees of freedom work station for mechanized assembly. In *5th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 611–616, Montréal, Juillet 1979.

- [271] Machida K. et al. New robotic mechanism using a parallel moving platform. In *IMACS/SICE Int. Symp. on Robotics, Mechatronics, and Manufacturing Systems*, pages 425–430, Kobe, 16-20 Septembre 1992.
- [272] Maeda K. et al. An analysis of passive impedance of 6-dof direct-drive wrist joint. In *IMACS/SICE Int. Symp. on Robotics, Mechatronics, and Manufacturing Systems*, pages 433–438, Kobe, 16-20 Septembre 1992.
- [273] Maeda K. et al. Time delay control of a 6 d.o.f. direct drive wrist joint using pneumatic actuators. In *ICAR 93*, pages 159–164, Tokyo, 1-2 Novembre 1993.
- [274] Marco D, Torfason L., et Tesar D. Computer simulation and design of a three d.o.f. shoulder module. In *NASA Conference on Space Telerobotics*, volume 5, pages 273–282, Pasadena, 31 Janvier 1989.
- [275] Marconi . The Gadfly manipulator. Rapport de Recherche 732, Marconi Research Centre, 1985.
- [276] Masory O. et Wang J. Workspace evaluation of Stewart platforms. In *22nd Biennial Mechanisms Conf.*, pages 337–346, Scottsdale, 13-16 Septembre 1992.
- [277] Masory O., Wang J., et Zhuang H. On the accuracy of a Stewart platform-part II: Kinematic calibration and compensation. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 725–731, Atlanta, 2-6 Mai 1993.
- [278] Masory O. et al. Design and construction of a Space Emulator. In *American Control Conf.*, pages 1825–1829, San Francisco, 2-4 Juin 1993.
- [279] Mathey C. Les simulateurs d'entraînement. *Revue technique Thomson-CSF*, 25(2):683–705, Juin 1995.
- [280] Maurine P. et Dombre E. A calibration procedure for the parallel robot Delta 4. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 975–980, Minneapolis, 24-26 Avril 1996.
- [281] Mayer St-Onge B. et Gosselin C. Singularity analysis and representation of spatial six-dof parallel manipulators. In *ARK*, pages 389–398, Portoroz-Bernadin, 22-26 Juin 1996.
- [282] McAree P.R. et Daniel R.W. A fast, robust solution to the Stewart platform forward kinematics. *J. of Robotic Systems*, 13(7):407–427, Juillet 1996.
- [283] McCloy D. Some comparisons of serial-driven and parallel driven manipulators. *Robotica*, 8(4):355–362, 1990.
- [284] Megahed S. *Contribution à la modélisation géométrique et dynamique des manipulateurs à structure de chaîne cinématique simple ou complexe, application à leur commande*. Thèse de doctorat, UPS, Juillet 1984.
- [285] Mendes Lopes A. et Gomes de Almeida F. Manipulability optimization of a parallel structure robotic manipulator. In *2nd Portugese Automatic Control Conf.*, Porto, Septembre 1996.
- [286] Merkle R.C. A new family of six degree of freedom positional devices. <http://nano.xerox.com/nanotech/6dof.html>, 1994.
- [287] Merlet J-P. *Contribution à la commande par retour d'efforts. Application au contrôle des robots parallèles*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, Paris, 18 Juin 1986.
- [288] Merlet J-P. Singular configurations of parallel manipulators and Grassmann geometry. *Int. J. of Robotics Research*, 8(5):45–56, Octobre 1989.
- [289] Merlet J-P. et Gosselin C. Nouvelle architecture pour un manipulateur parallèle à 6 degrés de liberté. *Mechanism and Machine Theory*, 26(1):77–90, 1991.
- [290] Merlet J-P. Direct kinematics and assembly modes of parallel manipulators. *Int. J. of Robotics Research*, 11(2):150–162, Avril 1992.

- [291] Merlet J-P. Closed-form resolution of the direct kinematics of parallel manipulators using extra sensors data. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 200–204, Atlanta, 2-7 Mai 1993.
- [292] Merlet J-P. Forward kinematics of non-polyhedral parallel manipulators. *ASME J. of Mechanical Design*, 115(4):938–940, Décembre 1993.
- [293] Merlet J-P. et Mouly N. Espaces de travail et planification de trajectoire des robots parallèles plans. Rapport de Recherche 2291, INRIA, Février Décembre 1994.
- [294] Merlet J-P. Trajectory verification in the workspace for parallel manipulators. *Int. J. of Robotics Research*, 13(4):326–333, Août 1994.
- [295] Merlet J-P. Détermination de l'espace de travail d'un robot parallèle pour une orientation constante. *Mechanism and Machine Theory*, 29(8):1099–1113, Novembre 1994.
- [296] Merlet J-P. Designing a parallel robot for a specific workspace. Rapport de Recherche 2527, INRIA, Avril 1995.
- [297] Merlet J-P. Determination of the orientation workspace of parallel manipulators. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 13(1):143–160, 1995.
- [298] Merlet J-P. Direct kinematics of planar parallel manipulators. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 3744–3749, Minneapolis, 24-26 Avril 1996.
- [299] Mianowski K. et Nazarczuk K. Parallel drive of manipulator arm. In *8th RoManSy*, pages 140–147, Cracovie, 2-6 Juillet 1990.
- [300] Miller K. et Clavel R. The Lagrange-based model of Delta-4 robot dynamics. *Robotersysteme*, 8(1):49–54, 1992.
- [301] Miller K. Modeling of dynamics and model-based control of DELTA direct-drive parallel robot. *J. of Robotics and Mechatronics*, 17(4):344–352, 1995.
- [302] Millman P.A. et Colgate J.E. Design of a four d.o.f. force reflecting manipulandum with a specified force/torque workspace. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1488–1493, Sacramento, 11-14 Avril 1991.
- [303] Mimura N. et Y. Funahashi. A new analytical system applying 6 dof parallel link manipulator for evaluating motion sensation. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 227–233, Nagoya, 25-27 Mai 1995.
- [304] Ming A. et Higuchi T. Study on multiple degree of freedom positioning mechanisms using wires, Part 1, Concept, Design and Control. *Int. J. Japan Soc. Prec. Eng.*, 28(2):131–138, Juin 1994.
- [305] Ming A. et Higuchi T. Study on multiple degree of freedom positioning mechanisms using wires, Part 2, Development of a planar completely restrained positioning mechanism. *Int. J. Japan Soc. Prec. Eng.*, 28(3):235–242, Septembre 1994.
- [306] Minsky M. Manipulator design vignettes. Rapport de Recherche 267, MIT AI Lab., 1972.
- [307] Mitova T. et Vatkitchev A. Analysis of a closed space mechanism with three degree of mobility. In *XI COBEM*, Rio de Janeiro, 1991.
- [308] Miura K. et Furuya H. Variable geometry truss and its application to deployable truss and space crane arms. In *35th Congress of the Int. Astronautical Federation*, pages 1–9, Lausanne, 7-13 Octobre 1984.
- [309] Mohamed M.G. et Duffy J. A direct determination of the instantaneous kinematics of fully parallel robot manipulators. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 107(2):226–229, Juin 1985.
- [310] Mouly N. *Développement d'une famille de robots parallèles à motorisation électrique*. Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, Sophia, 11 Mai 1993.

- [311] Mourrain B. The 40 generic positions of a parallel robot. In Bronstein M., editor, *ISSAC'93*, ACM press, pages 173–182, Kiev (Ukraine), Juillet 1993.
- [312] Murray A.P., Pierrot F., Dauchez P., et McCarthy J.M. On the design of parallel manipulators for a prescribed workspace: a planar quaternion approach. In *ARK*, pages 349–357, Portoroz-Bernadin, 22-26 Juin 1996.
- [313] Murthy V.S. *Kinematics of serial manipulators and their parallel duals*. Thèse de doctorat, Ohio State University, 1990.
- [314] Murthy V. et Waldron K.J. Position kinematics of the generalized lobster arm and its series-parallel dual. *ASME J. of Mechanical Design*, 114(3):406–413, Septembre 1992.
- [315] Nahvi A., Hollerbach J.M., et Hayward V. Calibration of a parallel robot using multiple kinematics closed loops. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 407–412, San Diego, 8-13 Mai 1994.
- [316] Nahvi A. et Hollerbach J.M. The noise amplification index for optimal pose selection in robot calibration. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 647–654, Minneapolis, 24-26 Avril 1996.
- [317] Nair P. On the forward kinematics of parallel manipulators. *Int. J. of Robotics Research*, 13(2):171–188, Avril 1994.
- [318] Nakamura Y. et Ghodoussi M. Dynamics computation of closed-link robot mechanisms with nonredundant and redundant actuators. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 5(3):294–302, Juin 1989.
- [319] Nakamura Y., Kimura Y., et Arora G. Optimal use of non-linear electromagnetic force for micro motion wrist. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1040–1045, Sacramento, 11-14 Avril 1991.
- [320] Nakashima K. et al. Development of the parallel manipulator. In *IMACS/SICE Int. Symp. on Robotics, Mechatronics, and Manufacturing Systems*, pages 419–424, Kobe, 16-20 Septembre 1992.
- [321] Nanua P. et Waldron K.J. Direct kinematic solution of a Stewart platform. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 431–437, Scottsdale, 14-19 Mai 1989.
- [322] Nanua P. et Waldron K.J. Direct kinematic solution of a special parallel robot structure. In *8th RoManSy*, pages 134–142, Cracow, 2-5 Juillet 1990.
- [323] Nanua P. et Waldron K.J. Direct kinematic solution of a Stewart platform. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 6(4):438–444, Août 1991.
- [324] Nenchev D.N. et Uchiyama M. Singularity-consistent path planning and control of parallel robot motion through instantaneous-self-motion type. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1864–1870, Minneapolis, 24-26 Avril 1996.
- [325] Neumann K.E. Robot, 22 Mars 1988. United States Patent n° 4,732,525, Neos Product HB Norrtalje Suède.
- [326] Nguyen C.C. et Pooran F.J. Dynamic analysis of a 6 d.o.f. CKCM robot end-effector for dual-arm telerobot systems. *Robotics and Autonomous Systems*, 5(4):377–394, 1989.
- [327] Nguyen C.C. et al. Trajectory planning and control of a Stewart platform-based end-effector with passive compliance for part assembly. *J. of Intelligent and Robotics Systems*, 6(2-3):263–281, Décembre 1992.
- [328] Nguyen C.C. et al. Analysis and experimentation of a Stewart platform-based force/torque sensor. *Int. J. of Robotics and Automation*, 7(3):133–141, 1992.
- [329] Nguyen C.C. et al. Adaptive control of a Stewart platform-based manipulator. *J. of Robotic Systems*, 10(5):657–687, Juillet 1993.

- [330] Nielsen J. et Roth B. The direct kinematics of the general 6-5 Stewart-Gough mechanism. In *ARK*, pages 7–16, Portoroz-Bernadin, 22-26 Juin 1996.
- [331] Nombraïl N. *Analyse et commande d'une famille de robots manipulateurs a structure parallèle et redondante*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, 2 Décembre 1993.
- [332] Notash L. et Podhorodeski R.P. Forward displacement analysis of uncertainty configurations of parallel manipulators with a redundant branch. *J. of Robotic Systems*, 13(9):587–601, Septembre 1996.
- [333] Ojala P., Arai T., et Tanikawa T. Kinematic analysis and motion control of a redundant micro manipulator. In *2nd Japan-France Congress on Mechatronics*, pages 473–476, Takamatsu, 1-3 Novembre 1994.
- [334] Orin D.E. et Oh S.Y. Control of force distribution in robotic mechanisms containing closed kinematic chains. *J. of Dyn. Syst. Meas. and Control*, 102:134–141, Juin 1981.
- [335] Ouerfelli M. et Kumar V. Optimization of a spherical five bar parallel drive linkage. *ASME J. of Mechanical Design*, 116(1):166–173, Mars 1994.
- [336] Overholt J.L. et Zeid A.A. Partial state feedback linearization based control for a Stewart platform (Part I: Theory). In *23th Summer Computer Simulation Conf.*, pages 512–517, Baltimore, 22-24 Juillet 1991.
- [337] Padmanabhan B. et al. Closed-form inverse kinematic analysis of variable-geometry truss manipulator. *ASME J. of Mechanical Design*, 114(3):438–443, Septembre 1992.
- [338] Pang H. et Shahinpoor M. Analysis of static equilibrium of a parallel manipulator. *Robotica*, 11(5):433–443, 1993.
- [339] Pang H. et Shahinpoor M. Inverse dynamics of a parallel manipulator. *J. of Robotic Systems*, 11(8):693–702, Décembre 1994.
- [340] Papegay Y. *Outils formels pour la modélisation en mécanique*. Thèse de doctorat, Université de Nice, Nice, 13 Novembre 1992.
- [341] Parenti-Castelli V. et Innocenti C. Direct displacement analysis for some classes of spatial parallel mechanisms. In *8th RoManSy*, pages 123–130, Cracow, 2-6 Juillet 1990.
- [342] Parenti-Castelli V. Recent techniques for direct position analysis of the generalized Stewart platform mechanism. In *ARK*, pages 129–135, Ferrare, 7-9 Septembre 1992.
- [343] Parenti-Castelli V. et Innocenti C. Forward displacement analysis of parallel mechanisms: closed-form solution of PRR-3S and PPR-3S structures. *ASME J. of Mechanical Design*, 114(1):68–73, Mars 1992.
- [344] Parenti-Castelli V. et Di Gregorio R. A three-equation numerical method for the direct kinematics of the generalized Gough-Stewart platform. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 837–841, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.
- [345] Parrish R.V. et al. Motion software for a synergistic six-degree-of-freedom motion base. Rapport de Recherche D-7350, NASA, Décembre 1973.
- [346] Parushev P. et Chakarov D. Structural investigation of manipulators with linear drivers. In *8th RoManSy*, pages 148–155, Cracovie, 2-6 Juillet 1990.
- [347] Pasqui-Boutard V. *Méthode systématique pour la modélisation et l'analyse cinématique des mécanismes complexes*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 29 Août 1994.
- [348] Patarinski S.P. et Uchiyama M. Position/orientation decoupled parallel manipulator. In *ICAR*, pages 153–158, Tokyo, 1-2 Novembre 1993.

- [349] Pennock G.R. et Kassner D.J. Kinematic analysis of a planar eight-bar linkage: application to a platform-type robot. In *ASME Proc. of the 21th Biennial Mechanisms Conf.*, pages 37–43, Chicago, 16-19 Septembre 1990.
- [350] Pennock G.R. et Kassner D.J. The workspace of a general geometry planar three degree of freedom platform manipulator. *ASME J. of Mechanical Design*, 115(2):269–276, Juin 1993.
- [351] Perju D. et Dolga L. An optimizing study of a 6 components force transducer. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 2925–2929, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.
- [352] Peysah E.E. Determination of the position of the member of three joints and two joints four member. Assur group with rotational pairs. *Machinery*, (5):55–61, 1985. In russian.
- [353] Pfreundschuch G.H., Kumar V., et Sugar T.G. Design and control of a 3 d.o.f. in-parallel actuated manipulator. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1659–1664, Sacramento, 11-14 Avril 1991.
- [354] Pierrot F., Benoit M., Dauchez P., et Galmiche J-P. High speed control of a parallel robot. In *IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 949–954, Ibaraki, Japan, 3-6 Juillet 1990.
- [355] Pierrot F. *Robots Pleinement Parallèles Légers : Conception Modélisation et Commande*. Thèse de doctorat, Université Montpellier II, Montpellier, 24 Avril 1991.
- [356] Pierrot F., Dauchez P., et Fournier A. Fast parallel robots. *J. of Robotic Systems*, 8(6):829–840, Décembre 1991.
- [357] Pierrot F. et al. Manipulations robotiques à haute vitesse: une solution pleinement parallèle. *APII*, 26(1):3–14, 1992.
- [358] Pietrus A. *Étude numérique des systèmes triangulaires d'équations algébriques: Application à la robotique*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, Poitiers, 3 Décembre 1992.
- [359] Pittens K.H. et Podhorodeski R.P. A family of Stewart platforms with optimal dexterity. *J. of Robotic Systems*, 10(4):463–479, Juin 1993.
- [360] Podhorodeski R. Three branch hybrid-chain manipulators. In *ARK*, pages 150–155, Ferrare, 7-9 Septembre 1992.
- [361] Pollard W.L.V. Position controlling apparatus, 16 Juin 1942. United States Patent n° 2,286,571.
- [362] Pooran F.J. *Dynamics and control of robot manipulators with closed-kinematic chain mechanism*. Thèse de doctorat, The Catholic University of America, Washington D.C., 1989.
- [363] Potton S.L. Gec advanced device for assembly. *Manufacturing systems*, 13(2):130–144, 1983.
- [364] Powell I.L. The kinematic analysis and simulation of the parallel topology manipulator. *The Marconi Review*, XLV(226):121–138, Third Quarter 1982.
- [365] Raghavan M. The Stewart platform of general geometry has 40 configurations. In *ASME Design and Automation Conf.*, volume 32-2, pages 397–402, Chicago, 22-25 Septembre 1991.
- [366] Raghavan M. et Roth B. Solving polynomial systems for the the kinematic analysis of mechanisms and robot manipulators. *ASME J. of Mechanical Design*, 117(2):71–79, Juin 1995.
- [367] Ramachandran S. et al. A finite element approach to the design and dynamic analysis of platform type manipulators. *Finite elements in Analysis and Design*, 10(4):335–350, 1992.
- [368] Rao A.C. Topological characteristics of linkage mechanisms with particular reference to platform type robots. *Mechanism and Machine Theory*, 30(1):33–42, Janvier 1995.

- [369] Rebman J. Object manipulator, 23 Août 1988. United States Patent n° 4,765,795 Lord Corporation, Eric, Pa.
- [370] Reboulet C. et Robert A. Hybrid control of a manipulator with an active compliant wrist. In *3rd ISRR*, pages 76–80, Gouvieux, France, 7-11 Octobre 1985.
- [371] Reboulet C. et Pigeyre R. Hybrid control of a 6 d.o.f. in parallel actuated micro-macro manipulator mounted on a Scara robot. In *ISRAM*, volume 3, pages 293–298, Burnaby, 18-20 Juillet 1990. ASME Press Series.
- [372] Reboulet C. et al. Rapport d'avancement projet VAP, thème 7, phase 3. Rapport de Recherche 7743, CNES/DERA, Janvier 1991.
- [373] Reboulet C. et Berthomieu T. Dynamic model of a six degree of freedom parallel manipulator. In *ICAR*, pages 1153–1157, Pise, 19-22 Juin 1991.
- [374] Reboulet C., Lambert C., et Nombrai N. A parallel redundant manipulator: SPEED-R-MAN and its control. In *ISRAM*, pages 285–291, Santa-Fe, 11-13 Novembre 1992.
- [375] Reboulet C. et Pigeyre R. Hybrid control of a 6 d.o.f. in parallel actuated micro-manipulator mounted on a SCARA robot. *Int. J. of Robotics and Automation*, 7(1):10-14, 1992.
- [376] Reboulet C. et Leguay S. The interest of redundancy for the design of a spherical parallel manipulator. In *ARK*, pages 369–378, Portoroz-Bernadin, 22-26 Juin 1996.
- [377] Rees Jones J. Cross-coordinate control of a robot manipulator. In *Int. Workshop on Nuclear Robotics Technologies and Applications: Present and Future*, pages 1–10, University of Lancaster, 26-1-Juillet Juin 1979.
- [378] Reinholtz C.F. et Gokhale D. Design and analysis of variable geometry truss robots. In *9th Annual Conf. on Applied Mechanisms*, pages 1–5, Oklahoma State University, 1987.
- [379] Renaud M. *Technique de la Robotique*. Hermès, Paris, 1988.
- [380] Rojeski P. J. *A systems analysis approach to landing gear design*. Thèse de doctorat, Cornell University, Mai 1972.
- [381] Romdhane L. Orientation workspace of fully parallel mechanisms. *Eur. J. of Mechanics*, 13(4):541–553, 1994.
- [382] Romiti A. et Sorli M. Force and moment measurement on a robotic assembly hand. *Sensors and Actuators*, A(32):531–538, Avril 1992.
- [383] Romiti A., Sorli M., et N. Zhmud'. Design and properties of the Turin 6 d.o.f. parallel robot for deburring operations. In *3rd Int. Symp. on Measurement and Control in Robotics*, pages Bm.III-1, Bm.III-6, Turin, 21-24 Septembre 1993.
- [384] Ronga F. et Vust T. Stewart platforms without computer? In *Conf. Real Analytic and Algebraic Geometry*, pages 197–212, Trento, 1992.
- [385] Rooney J. et Earl C.F. Manipulator postures and kinematics assembly configurations. In *6th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 1014–1020, New Dehli, 1983.
- [386] Ropponen T. et Arai T. Accuracy analysis of a modified Stewart platform manipulator. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 521–525, Nagoya, 25-27 Mai 1995.
- [387] Roth B. The kinematics of motion through finitely separated positions. *ASME J. of Applied Mechanics*, pages 591–597, Septembre 1967.
- [388] Salcudean S.E. et al. A six degree-of-freedom, hydraulic, one person motion simulator. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 2437–2443, San Diego, 8-13 Mai 1994.
- [389] Salcudean S.E., Bachmann S., et Ben-Dov D. A six degree-of-freedom wrist with pneumatic suspension. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 2444–2450, San Diego, 8-13 Mai 1994.

- [390] Salisbury J.K. et Craig J.J. Articulated hands: force control and kinematic issues. *Int. J. of Robotics Research*, 1(1):4–17, 1982.
- [391] Sanchez J-C. *Intérêt d'une redondance cinématique pour la commande en effort d'un robot manipulateur. Applications au robot parallèle et redondant SPEED-R-MAN*. Thèse de doctorat, ENSAE, Toulouse, 11 Juin 1996.
- [392] Sarkissyan Y.L. et Parikyan T.F. Analysis of special configurations of parallel topology manipulator. In *8th RoManSy*, pages 156–163, Cracovie, 2-6 Juillet 1990.
- [393] Sarkissyan Y.L. et Parikyan T.F. Manipulator, 1990. Russian Patent n° 1585144.
- [394] Sarkissyan Y.L. et Parikyan T.F. Direct position problem for Stewart platform and multiple points of 5(SS) linkage coupler curve. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 1614–1618, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.
- [395] Sarma R., Kramer S.N., et Ramamurti V. The dynamic equations of motion and actuation scheme for the tetrahedron based variable geometry truss manipulator. In *22nd Biennial Mechanisms Conf.*, volume DE-45, pages 173–178, Scottsdale, 13-16 Septembre 1992.
- [396] Sefrioui J. *Problème géométrique direct et lieux de singularité des manipulateurs parallèles*. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, 2 Novembre 1992.
- [397] Sefrioui J. et Gosselin C. Étude et représentation des lieux de singularités des manipulateurs parallèles sphériques à trois degrés de liberté avec actionneurs prismatiques. *Mechanism and Machine Theory*, 29(4):559–579, Mai 1994.
- [398] Sefrioui J. et Gosselin C.M. On the quadratic nature of the singularity curves of planar three-degree-of-freedom parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 30(4):533–551, Mai 1995.
- [399] Seguchi Y., Tanaka M., et al. Dynamic analysis of a truss-type flexible robot arm. *JSME Int. J.*, 33(2):183–190, 1990.
- [400] Seguchi Y., Tanaka M., et al. Criteria-oriented configuration control of adaptive structure and its modular neural network representation. In *First Joint USA/Japan Conf. on adaptive structure*, pages 402–421, Maui, Hawaii, 13-15 Novembre 1990.
- [401] Shahinpoor M. Kinematics of a parallel-serial (hybrid) manipulator. *J. of Robotic Systems*, 9(1):13–36, 1992.
- [402] Shelef G. Six degree of freedom micromanipulator, 11 Avril 1989. United States Patent n° 4,819,496 Air Force Washington.
- [403] Shi X. et Fenton R.G. Solution to the forward instantaneous kinematics for a general 6 d.o.f. Stewart platform. *Mechanism and Machine Theory*, 27(3):251–259, Mai 1992.
- [404] Shi X. et Fenton R.G. Structural instabilities in platform-type parallel manipulators due to singular configurations. In *22nd Biennial Mechanisms Conf.*, volume DE-45, pages 347–352, Scottsdale, 13-16 Septembre 1992.
- [405] Shirkhodaie A.H. et Soni A.H. Forward and inverse synthesis for a robot with three degree-of-freedom. In *19th Summer Computer Simulation Conf.*, pages 851–856, Montréal, 27-30 Juillet 1987.
- [406] Sincarsin W.G. et Hughes P.C. Trussarm : candidate geometries. Rapport de Recherche 28-611/0401, Dynacon Enterprises Ltd., 1987.
- [407] Sklar M. et Tesar D. Dynamic analysis of hybrid serial manipulator system containing parallel modules. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 110(2):109–115, Juin 1988.
- [408] Smith III W.F. et Nguyen C.C. Mechanical analysis and design of a six-degree-of-freedom robotic wrist for Space assembly. In *Proc. 23th South Eastern Symp. on System*, pages 177–181, Columbia, 10-12 Mars 1991.

- [409] Smith III W.F. et Nguyen C.C. On the mechanical design of a Stewart platform-based robotics end-effector. In *IEEE Proc. of the Southeast Conf'91*, pages 875–879, Williamsburg, 7-10 Avril 1991.
- [410] Soni A.H., Tanasi G.C., et Varanasi S. Closed-loop multi-degree freedom mechanisms for surface generation and patching in machining 3d surfaces. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 2668–2674, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.
- [411] Sorli M. et Ceccarelli M. On the workspace of a 6 d.o.f. platform with three articulated double-parallelograms. In *ICAR*, pages 147–152, Tokyo, 1-2 Novembre 1993.
- [412] Sorli M. et Zhmud' N. Investigation of force and moment measurement system for a robotic assembly hand. *Sensors and Actuators A*, 37-38:651–657, Juillet- Août 1993.
- [413] Sorli M. et al. Mechanics of Turin parallel robot. *Mechanism and Machine Theory*, 32(1):51–77, Janvier 1997.
- [414] Sreenivasan S.V., Waldron K.J., et Nanua P. Closed-form direct displacement analysis of a 6-6 Stewart platform. *Mechanism and Machine Theory*, 29(6):855–864, Août 1994.
- [415] Sternheim F. Computation of the direct and inverse geometric models of the Delta 4 parallel robot. *Robotersysteme*, 3:199–203, 1987.
- [416] Sternheim F. Tridimensionnal computer simulation of a parallel robot. Results for the Delta 4 machine. In *18th Int. Symp. on Industrial Robots (ISIR)*, pages 333–340, Lausanne, 26-28 Avril 1988.
- [417] Stewart D. A platform with 6 degrees of freedom. *Proc. of the Institution of mechanical engineers*, 180(Part 1, 15):371–386, 1965.
- [418] Stocco L. et Salcudean T. A coarse-fine approach to force-reflecting hand controller design. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 404–410, Minneapolis, 24-26 Avril 1996.
- [419] Stoughton R. et Arai T. Optimal sensor placement for forward kinematics evaluation of a 6-dof parallel link manipulator. In *IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, (IROS)*, pages 785–790, Osaka, 3-5 Novembre 1991.
- [420] Stoughton R. et Arai T. Kinematic optimization of a chopsticks-type micro-manipulator. In *Japan-USA Symp. on Flexible Automation*, pages 151–157, San Fransisco, 13-15 Juillet 1993.
- [421] Stoughton R. et Arai T. A modified Stewart platform manipulator with improved dexterity. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 9(2):166–173, Avril 1993.
- [422] Stoughton R. et al. A redundant, 6-DOF parallel manipulator structure with improved workspace and dexterity. In *ISRAM*, pages 577–581, Hawaï, 15-17 Août 1994.
- [423] Subramanian M. et Kramer S.N. The inverse kinematic solution of the tetrahedron based variable geometry truss manipulator. *ASME J. of Mechanical Design*, 114:433–437, Septembre 1992.
- [424] Sugimoto K., Duffy J., et Hunt K.H. Special configurations of spatial mechanisms and robot arms. *Mechanism and Machine Theory*, 17(2):119–132, 1982.
- [425] Sugimoto K. Kinematic and dynamic analysis of parallel manipulators by means of motor algebra. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 109(1):3–7, Mars 1987.
- [426] Sugimoto K. Computational scheme for dynamic analysis of parallel manipulators. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 111(1):29–33, Mars 1989.
- [427] Sumpter B. et Soni A.H. Simulation algorithm of Oklahoma Crawdad robot. In *9th Applied Mechanisms Conf.*, pages VI.1–VI.3, Kansas City, 28-30 Janvier 1985.

- [428] Sutter T.R. et al. Structural characterization of a first generation articulated truss joint for space crane application. Rapport de Recherche TM 4371, NASA Research Center, Langley, Juin 1992.
- [429] Tadokoro S. A 6 d.o.f. parallel robot wrist joint by a pneumatic actuator drive. *Advanced Robotics*, 8(6):603, Décembre 1994.
- [430] Tahmasebi F. et Tsai L.-W. Closed form direct kinematics solution of a new parallel mini-manipulator. *ASME J. of Mechanical Design*, 116(4):1141–1147, Décembre 1994.
- [431] Tahmasebi F. et Tsai L.-W. Workspace and singularity analysis of a novel six-dof parallel minimanipulator. *J. of Applied Mechanisms and Robotics*, 1(2):31–40, Mars 1994.
- [432] Takanobu H. et al. Bio-parallel mechanism of mastication robot. In *IMACS/SICE Int. Symp. on Robotics, Mechatronics, and Manufacturing Systems*, pages 487–492, Kobe, 16-20 Septembre 1992.
- [433] Takeda Y., Funabashi H., et Sasaki Y. Analysis of working space and motion transmissibility of spherical in-parallel actuated mechanism. In *ICAR*, pages 165–170, Tokyo, 1-2 Novembre 1993.
- [434] Tanaka M. Truss-type mechanism. *Advanced Robotics*, 8(6):599, Décembre 1994.
- [435] Tancredi L. *De la simplification et la résolution du modèle géométrique direct des robots parallèles*. Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, Sophia, 20 Décembre 1995.
- [436] Tapia R.A. The Kantorovitch theorem for Newton's method. *American Mathematic Monthly*, 78(1.ea):389–392, 1971.
- [437] Tesar D. et Butler M.S. A generalized modular architecture for robot structures. *Manufacturing review*, 2(2), Juin 1989.
- [438] Thornton G.S. The GEC Tetrabot—a new serial-parallel assembly robot. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 437–439, Philadelphia, 24-29 Avril 1988.
- [439] Tsai L-W. et Tahmasebi F. Synthesis and analysis of a new class of six-degree-of-freedom parallel minimanipulators. *J. of Robotic Systems*, 10(5):561–580, Juillet 1993.
- [440] Tsai L-W. Kinematics of a three-dof platform with three extensible limbs. In *ARK*, pages 401–410, Portoroz-Bernadin, 22-26 Juin 1996.
- [441] Uchiyama M. A 6 d.o.f. parallel robot HEXA. *Advanced Robotics*, 8(6):601, Décembre 1994.
- [442] Unger D. et al. Optimum stiffness study for a parallel link robot crane under horizontal force. In *2nd Int. Symp. on Robotics and Manufacturing, Research, Education, Applications*, pages 1037–1046, Albuquerque, 1988.
- [443] Veblen O. et Young J.W. *Projective geometry*. The Athenaeum Press, 1910.
- [444] Vischer P. Argos: a novel parallel spherical structure. Rapport de Recherche 95-03, EPFL, Lausanne, Suisse, 25 Mars 1995.
- [445] Viscomi B.V., Michalerya W.D., et Lu L-W. Automated construction in the ATLSS integrated building systems. *Automation in Construction*, 3(1):35–43, Mai 1994.
- [446] Waldron K.J., Raghavan M., et Roth B. Kinematics of a hybrid series-parallel manipulation system. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 111(2):211–221, Juin 1989.
- [447] Waldron K.J. et Hunt K.H. Series-parallel dualities in actively coordinated mechanisms. *Int. J. of Robotics Research*, 10(2):473–480, Avril 1991.
- [448] Wampler C. et Arai T. Calibration of robots having kinematic closed-loops using non-linear least squares estimator. In *IFTOMM-jc Conf.*, pages 153–158, Nagoya, 24-26 Septembre 1992.

- [449] Wampler C.W., Hollerbach J.M., et Arai T. An implicit loop method for kinematic calibration and its application to closed-chain mechanisms. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 11(5):710–724, Octobre 1995.
- [450] Wampler C.W. Forward displacement analysis of general six-in-parallel SPS (Stewart) platform manipulators using soma coordinates. *Mechanism and Machine Theory*, 31(3):331–337, Avril 1996.
- [451] Wang L.C.T. et Chen C.C. On the numerical kinematic analysis of general parallel robotic manipulators. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 9(3):272–285, Juin 1993.
- [452] Wang L.C.T. et Chen C.C. On the dynamic analysis of a general parallel robotic manipulators. *Int. J. of Robotics and Automation*, 9(2):81–87, 1994.
- [453] Wang J. et Masory O. On the accuracy of a Stewart platform-part I: The effect of manufacturing tolerances. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 114–120, Atlanta, 2-6 Mai 1993.
- [454] Warnaar D.B. et Chew M. Kinematic synthesis of deployable-foldable truss structures using graph theory, Part 1: graph generation. *ASME J. of Mechanical Design*, 117(1):112–116, Mars 1995.
- [455] Wen F. et Liang C. Displacement analysis of the 6-6 platform mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 29(4):547–557, Mai 1994.
- [456] Wendlandt J.M. et Sastry S.S. Design and control of a simplified Stewart platform for endoscopy. In *33rd Conf. on Decision and Control*, pages 357–362, Lake Buena Vista, 14-16 Décembre 1994.
- [457] Weng T.C. *Kinematics of parallel manipulators with ground-mounted actuators*. Thèse de doctorat, University of Florida, Gainesville, 1988.
- [458] Whitney D.E. What is the RCC and what it can do. In 9^{ème} *ISIR*, pages 135–147, Washington, 13-15 Mars 1979.
- [459] Williams II R.L. et Reinholtz C.F. Closed-form workspace determination and optimization for parallel robot mechanisms. In *ASME Proc. of the the 20th Biennial Mechanisms Conf.*, pages 341–351, Kissimmee, Orlando, 25-27 Septembre 1988.
- [460] Wohlhart K. Displacement analysis of the general spherical Stewart platform. *Mechanism and Machine Theory*, 29(4):581–589, Mai 1994.
- [461] Wu K.C et Sutter T.R. Structural analysis of three space crane articulated truss joint concepts. Rapport de Recherche TM-4373, NASA Research Center, Langley, Mai 1992.
- [462] Xu Y-X., Kohli D., et Weng T-C. Direct differential kinematics of hybrid-chain manipulators including singularities and stability analyses. In *22nd Biennial Mechanisms Conf.*, volume DE-45, pages 65–73, Scottsdale, 13-16 Septembre 1992.
- [463] Yang D.C.H. et Lee T.W. Feasibility study of a platform type of robotic manipulator from a kinematic viewpoint. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 106(2):191–198, Juin 1984.
- [464] Yee C.S. et Lim K.B. Neural network for the forward kinematics problem in parallel manipulator. In *IEEE Int. Joint Conf. on Neural Network*, pages 1699–1704, Singapore, 18-21 Novembre 1991.
- [465] Yi B-J., Freeman R.A., et Tesar D. Force and stiffness transmission in redundantly actuated mechanisms: the case for a spherical shoulder mechanism. In *22nd Biennial Mechanisms Conf.*, pages 163–172, Scottsdale, 13-16 Septembre 1992.
- [466] Yi B-J. et Freeman R.A. Geometric characteristics of antagonistic stiffness in redundantly actuated mechanisms. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 654–661, Atlanta, 2-6 Mai 1993.

- [467] Yin J.P. et Liang C.G. The forward displacement analysis of a kind of special platform manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 29(1):1–9, Janvier 1994.
- [468] Yoshida K., Mavroidis C., et Dubowsky S. Impact dynamics of space long reach manipulators. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1909–1916, Minneapolis, 24–26 Avril 1996.
- [469] Yufeng L. et Tingli Y. Structure types and characteristics of six degree-of-freedom closed-chain manipulators with all actuators on base. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 1795–1799, Milan, 30 Août–2 Septembre 1995.
- [470] Zamanov V.B et Sotirov Z.M. Structures and kinematics of parallel topology manipulating systems. In *Proc. Int. Symp. on Design and Synthesis*, pages 453–458, Tokyo, 11–13 Juillet 1984.
- [471] Zamanov V.B et Sotirov Z.M. A contribution to the serial and parallel manipulator duality. In *8th IFToMM World Congress on the Theory of Machine and Mechanisms*, pages 517–520, Prague, 26–31 Août 1991.
- [472] Zamanov V.B et Sotirov Z.M. Parallel manipulators in robotics. In *IMACS/SICE Int. Symp. on Robotics, Mechatronics, and Manufacturing Systems*, pages 409–418, Kobe, 16–20 Septembre 1992.
- [473] Zanganeh K.E. et Angeles J. Mobility and position analysis of a novel redundant parallel manipulator. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 3049–3054, San Diego, 8–13 Mai 1994.
- [474] Zanganeh K.E. et Angeles J. Instantaneous kinematics and design of a novel redundant parallel manipulator. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 3043–3048, San Diego, 8–13 Mai 1994.
- [475] Zanganeh K.E. et Angeles J. The direct kinematics of general parallel manipulators with minimum sensor data. In *ISRAM*, pages 333–338, Hawaï, 14–18 Août 1994.
- [476] Zanganeh K.E. et Angeles J. On the isotropic design of general six-degree-of-freedom parallel manipulators. In J-P. Merlet B. Ravani, editor, *Computational Kinematics*, pages 213–220. Kluwer, 1995.
- [477] Zanganeh K.E. et Angeles J. Displacement analysis of a six-degree-of-freedom hand controller. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 1281–1286, Minneapolis, 24–26 Avril 1996.
- [478] Zeid A.A., Overholt J.L., et Beck R.R. Modeling of multibody systems for control using general purpose simulation languages. *Simulation*, 67(1):7–19, Janvier 1994.
- [479] Zhang M.D. et Song S.M. Study of three-degree-of-freedom parallel platforms for reactional compensation. In *ISRAM*, pages 373–378, Hawaï, 14–18 Août 1994.
- [480] Zhang C-D. et Song S.M. Kinematics of parallel manipulators with a positional subchain. In *ASME Proc. of the 21th Biennial Mechanisms Conference*, volume 2, pages 271–278, Chicago, 16–19 Septembre 1990.
- [481] Zhang C-D. et Song S.M. Forward kinematics of a class of parallel (Stewart) platforms with closed-form solutions. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 2676–2681, Sacramento, 11–14 Avril 1991.
- [482] Zhang C-D. et Song S.M. Forward position analysis of parallel mechanisms with 3 general open-subchains based on selection of independent joints. In *ISRAM*, pages 377–384, Santa-Fe, 11–13 Novembre 1992.
- [483] Zhang C-D. et Song S-M. Forward position analysis of nearly general Stewart platform. *ASME J. of Mechanical Design*, 116(1):54–60, Mars 1994.
- [484] Zhao M. et al. Development of a redundant robot manipulator based on three dof parallel platform. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 221–226, Nagoya, 25–27 Mai 1995.

- [485] Zhuang H. et Roth Z.S. Method for kinematic calibration of Stewart platforms. *J. of Robotic Systems*, 10(3):391–405, 1993.
- [486] Zhuang H. et Liu L. Self calibration of a class of parallel manipulators. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 994–999, Minneapolis, 24-26 Avril 1996.
- [487] Zlatanov D., Dai M.Q., Fenton R.G., et Benhabib B. Mechanical design and kinematics analysis of a three-legged six degree-of-freedom parallel manipulator. In *22nd Biennial Mechanisms Conf.*, volume DE-45, pages 529–536, Scottsdale, 13-16 Septembre 1992.
- [488] Zsombor-Murray P., Husty M., et Hartmann D. Singular Stewart-Gough platforms with spherocylindrical and spheroconical hip joint trajectories. In *9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, pages 1886–1890, Milan, 30 Août-2 Septembre 1995.

Table des matières