Séance XI. Etude expérimentale de schémas numériques pour la solution d'EDOs.

On considère l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a\,, b] \\ y(a) = y_a \text{ donnée} \end{cases}$$

On souhaite faire l'étude expérimentale de différents schémas d'intégration de cette équation différentielle, pour différentes fonctions $f(t, y)$.

Le nombre N étant donné, l'intervalle $[a, b]$ est discrétisé comme suit :

$$N \geq 2, \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad t_0 = a, \quad t_i = t_{i-1} + h \quad pour\ 1 \leq i \leq N.$$

Les valeurs calculées par le schéma sont notées y_i, elles sont sensées approcher $y(t_i)$ (si la méthode est convergente). On prendra soin de toujours prendre $y_0 = y(a)$, puisque cette valeur initiale est connue.

1. **Implémentation.**
   Ecrire un programme scilab permettant de calculer $(y_n)_{1\leq n\leq N}$ par les trois schémas :

   Euler explicite : $y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$

   Runge-Kutta 2 : $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ où $k_1 = h\, f(t_n, y_n),\ k_2 = h\, f(t_n + h, y_n + k_1)$

   Adams-Bashford : $y_{n+1} = y_{n-1} + 2h\, f(t_n, y_n)$

   On listera, *avant de commencer à programmer*, les données en entrée, les données numériques (internes) et les sorties (résultats, graphiques, etc.) Les tableaux y porteront respectivement les initiales des méthodes : yEE, yRK2, yAB2 ; Adams-Bashford nécessitera un pas (starter) pour y_1, qu'on fera par Euler explicite.

2. **Etude.**
   On étudie sur l'intervalle $[a, b] = [0, 1]$ la simulation numérique par Euler, RK2 et AB2 de l'EDO ci-dessus, dont on calculera une solution exacte y_{exact} pour les trois fonctions f suivantes :

   $$f_1(t, y) = \alpha y, \qquad f_2(t, y) = -\beta y^2, \qquad f_3(t, y) = \gamma\pi\sqrt{1 - y^2}, \qquad y_a = y_{exact}(0)$$

   Les paramètres réels non nuls α, β et γ sont laissés au choix (jouer avec des valeurs).

   2.1 Tracer sur un même graphique les courbes de la solution exacte $y(t_n)$ et (y_n) $(0 \leq n \leq N)$ calculé par les 3 méthodes, un graphique pour chacune des valeurs suivantes de N : $5, 10, 20, 40 \ldots 320$

   2.2 Verfication de code : Pour les trois méthodes (et $\alpha = 2$, $\beta = 2$ et $\gamma = 0.2$), tracer les courbes log-log d'erreur $E_N = \max_{1\leq n\leq N} |y(t_n) - y_n|$ en fonction de N $(N = 5, 10, 20, 40, \ldots, 320)$. *Estime* l'ordre de la méthode à partir de ce graphique.

   2.3 Montre avec un expérimente numérique que Euler explicite est stable seulement si le pas est suffisamment petit (Exo. 1, TD 10). Est-ce que RK2 est inconditionnellement stable ?

   2.4 Que remarquez-vous dans le cas de f_3 pour les valeurs de $\gamma > \frac{1}{2}$? Explication ?

   2.5 Que remarquez-vous pour Adams-Bashford dans le cas de f_1 pour les valeurs de $\alpha > 0$ versus les $\alpha < 0$? Explication ?

Le rapport de TP doit être rédigé en LaTeX, organisé en 3. sections : 1. Introduction (rappeler le contexte et les objectifs du TP, les schémas à étudier (grosso modo l'énoncé de cette feuille) / 2. Etude de cas n° 1.-3., et une discussion qui suive **2.1-2.5** / 3. Conclusion (faire la synthèse de ce que vous avez observé).