Séance X. Méthodes numériques pour les EDO linéaires.

1. On se propose de résoudre numériquement l'équation différentielle homogène suivante

$$\begin{cases} y'(t) + a\,y(t) = 0\,, & t \in [0\,,T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec une constante $a \geq 0$.

1.1 Écrire le *schéma d'Euler explicite* pour l'équation ci-dessus et calculer la solution numérique y_n au temps $t_n = n\,\Delta t$ explicitement en fonction de y_0 et de n.

1.2 Pour tout $t \in [0\,,T]$ fixé, montrer que la solution numérique vérifie la limite suivante

$$y_n = (1 - \frac{t}{n}\,a)^n\,y_0 \quad \longrightarrow \quad e^{-at}\,y_0\,,$$

pour $n \to \infty$. En déduire qu'elle converge à la solution analytique quand $\Delta t \to 0$ et avec l'hypothèse que $n\,\Delta t = t$ est toujours constant.

1.3 Discuter les hypothèses sur Δt pour lesquelles la solution numérique ci-dessus est stable, i.e. elle vérifie la propriété suivante

$$|y_n| = |(1 - a\,\Delta t)^n\,y_0| \leq |y_0|\,, \quad \forall\, n \geq 0\,.$$

1.4 Écrire le *schéma d'Euler implicite* pour l'équation ci-dessus et calculer la solution numérique y_n au temps $t_n = n\,\Delta t$ explicitement en fonction de y_0 et de n. En déduire qu'elle converge à la solution analytique quand $\Delta t \to 0$ et avec l'hypothèse que $n\,\Delta t = t$ est toujours constant. Procéder comme pour le schéma explicite et démontrer que la propriété de stabilité est vérifiée pour toute valeur de $\Delta t > 0$. On dit alors que le schéma est *inconditionnellement stable*.

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)}, & t \in [0, T] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

qui admet comme solution non triviale $y(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^2$.

Calculer les approximations y_n de $y(t_n)$ par la méthode d'Euler explicite, où $t_n = n\Delta t$ et $\Delta t = \frac{T}{N}$. Expliquer le résultat obtenu.

3. On suppose que $e_0, e_1, e_2, \ldots$ vérifient l'inéquation

$$e_{n+1} \leq Bh^{k+1} + e^{Ah}e_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad A, B, h \geq 0.$$

Démontre que

$$e_N \leq Bh^k \frac{e^{ANh} - 1}{A} + e^{ANh}e_0.$$

4. On considère l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t))\,, & t \in [a\,,b] \\ y(a) \text{ donnée} \end{cases} \tag{1}$$

Le nombre N étant donné, l'intervalle $[a, b]$ est discrétisé comme suit :

$$N \geq 2, \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad t_0 = a, \quad t_i = t_{i-1} + h \quad \textit{pour } 1 \leq i \leq N.$$

On considère l'approximation de l'EDO (1) par un schéma d'Euler explicite :

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \quad 0 \leq i \leq N-1.$$

On convient de toujours prendre $y_0 = y(a)$, puisque cette valeur initiale est connue. Les y_i sont sensées approcher $y(t_i)$ (si la méthode est convergente), mais en général $y(t_i) \neq y_i$.
Enfin, la fonction f sera considérée assez régulière, et en tout cas *au moins uniformément Lipschitz en* y :

$$\exists C_T \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall y, z \in \mathbb{R} \quad |f(t, z) - f(t, y)| \leq C_T |z - y|$$

Le but de ce problème est d'étudier l'erreur commise en approchant la solution $y(t)$ par le polynôme P_1 par morceaux (ligne brisée) passant par les points (t_i, y_i).

Pour cela, on se place dorénavant dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.

4.1 Rappeler ce que vaut l'ordre de l'erreur globale $y(t_i) - y_i$ en fonction de h.

4.2 Soit $P_1(t)$ le PIL défini sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ par

$$P_1(t_i) = y_i \quad P_1(t_{i+1}) = y_{i+1}$$

Donner l'expression de P_1 sous sa forme de Newton.

4.3 Ecrire le développement de Taylor de $y(t)$ autour de t_i avec reste à l'ordre deux.

4.4 Déduire des deux questions précédentes que pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

$$y(t) - P_1(t) = y(t_i) - y_i + (t - t_i)(f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, y_i)) + O(h^2)$$

puis que

$$|y(t) - P_1(t)| \leq |y(t_i) - y_i|(1 + O(h)) + O(h^2)$$

et alors

$$|y(t) - P_1(t)| = O(h)$$

($P_1(t)$, le PIL avec (t_i, y_i) et (t_{i+1}, y_{i+1}) donne une approximations à l'ordre 1 partout dans $[t_i, t_{i+1}]$)