Séance VIII. Intégration numérique.

1. On considère l'intégrale suivante :

$$I \;=\; \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

1.1 Calculer la valeur exacte de I.

1.2 Calculer une approximation numérique par la méthode des trapèzes, avec un pas $h=\frac{1}{3}$.

1.3 Pourquoi cette approximation est-elle supérieure à la valeur exacte de I ? est-ce vrai pour toute discrétisation uniforme de pas h ?

1.4 On souhaite approcher I par la méthode de Simpson. Quelle valeur de h permet d'avoir une erreur inférieure à 10^{-4} ?

2. On souhaite approcher l'intégrale (singulière) suivante :

$$I \;=\; \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x(1-x)}}\,dx$$

2.1 Pour quelle raison ne peut-on appliquer ici la méthode des trapèzes ou de Simpson ?

2.2 On cherche alors une formule du type :

$$I(f) \;=\; \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \;=\; \alpha f(0)+\beta f(\frac{1}{2})+\gamma f(1)+R_1(f)$$

Déterminer les coefficients α,β,γ de sorte que le reste $R_1(f)$ soit nul pour l'ensemble de polynômes de degré n le plus élevé possible, à préciser.
On indique que si on note :

$$I_k \;=\; \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \quad \text{alors } I_0=\pi \text{ et } I_k=\frac{2k-1}{2k}I_{k-1},\ k\geq 1.$$

2.3 On suppose qu'il existe une constante C telle que :

$$\forall f\in\mathcal{C}^{(n+1)} \quad \exists c\in[0,1]/ \quad R_1(f)=Cf^{(n+1)}(c).$$

En considérant $f(x)=x^4$, calculer C.

2.4 Application numérique : calculer une approximation de I par cette formule, et donner une majoration du reste $R_1\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$.

3. On considère les deux opérateurs linéaires suivants, définis pour les fonctions $f\in\mathcal{C}^\infty([-1,+1])$:

$$I(f) \;=\; \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx, \qquad J(f)=\omega_1 f(x_1)+\omega_2 f(x_2) \quad x_1,x_2\in[-1,1]\ x_1\neq x_2.$$

3.1 Déterminer (ω_1,ω_2) en fonction de (x_1,x_2) pour que $J(P)=I(P)$ pour tout $P\in\mathbb{P}_1$.

3.2 Montrer qu'il existe un unique couple (x_1,x_2) pour lequel $J(P)=I(P)$ pour tout $P\in\mathbb{P}_3$.

3.3 Calculer alors l'erreur $|J(f)-I(f)|$ pour $f(x)=e^x$. Combien d'évaluations de f aurait-il fallu pour obtenir la même erreur par la méthode des trapèzes (faitent un programme SCILAB pour tester) ?

On aura ainsi fait "avec les mains" une intégration de Gauss à 2 points, utilisant le polynôme de Legendre $\mathcal{L}_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$.