Séance VII. Différentiation numérique.

Dans ce qui suit, la fonction u est définie de $[0,1]$ sur $\mathbb{R}$, suffisamment régulière, et l'intervalle $[0,1]$ est *discrétisé* en N sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ uniform avec $h = x_{i+1} - x_i$. Par ailleurs, on notera toujours $u_i = u(x_i)$.

1. Montrer que les quotients suivants sont des approximations *consistantes* de la dérivée première $u'(x_i)$:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\ ; \quad \frac{u_i - u_{i-1}}{h}\ ; \quad \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

donner pour chacune l'ordre d'approximation.

2. Pour approcher la *dérivée seconde* $u''(x_i)$, on utilise généralement l'approximation dite *centrée* suivante :

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

quel est l'ordre de cette approximation ?

3. Sur le *bord* du domaine $[0,1]$, on peut parfois être amené à devoir approcher $u''(0)$ ou $u''(1)$ inconnues d'un problème donné.

Pour les valeurs au bord $x_0 = 0$ par exemple, il n'y a pas de points du domaine *à gauche* de x_0, sur lesquels on peut se baser pour utiliser l'approximation de $u''(x_i)$ ci-dessus.

Trouver une approximation *consistante* de $u''(x_i)$ utilisant les points x_i, x_{i+1} *et* x_{i+2}.

4. a) Trouver une approximation *consistante* de $u''(x_i)$ utilisant les valeurs de u aux points $x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1}$ *et* x_{i+2}.

b) Peut-on, sur la base des mêmes valeurs seulement, trouver une approximation *consistante* de la dérivée *troisième* $u^{(3)}(x_i)$? Quelle est celle d'ordre maximal ?

5. On cherche une approximation *consistante* de $u''(x_i)$ basée sur les valeurs aux points $x_i,\ x_j$ *et* x_k ($x_i = ih,\ x_j = jh, x_k = kh$). Alors, on pose :

$$u''(x_i) \approx a.u_i + b.u_j + c.u_k \tag{1}$$

et on suppose que l'approximation est *exacte* pour les polynômes de degré au plus égal à 2 (Pourquoi ?).

a) En écrivant successivement l'égalité (1) ci-dessus pour les fonctions :

$$u(x) = 1,\ u(x) = x \text{ et } u(x) = \frac{x^2}{2}$$

montrer que les nombres $a,\ b$ *et* c sont solutions d'un système linéaire dont le déterminant est, au signe près, égal à :

$$(j - i).(k - i).(j - k).$$

b) Que peut-on conclure sur la possibilité d'approcher $u''(x_i)$ par les valeurs en 3 points quelconques ? La réponse était-elle prévisible ?