Séance VI. Interpolation de Hermite. Approximation moindres carrés.

1. On se donne une fonction f dont on connaît deux valeurs et leur dérivée en deux points, par exemple $f(0),\ f'(0)$ et $f(1),\ f'(1)$.
Trouver un polynôme de degré minimal, interpolant f et dont la dérivée interpole f', en ces deux points, *id est* :

$$\begin{array}{ll} P(0) = f(0) & P'(0) = f'(0) \\ P(1) = f(1) & P'(1) = f'(1) \end{array} \tag{1}$$

2. (Théorème de l'erreur pour Hermite) Soit f une fonction de classe $C^4([-1,1])$.
On note $P_2(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = +1$.

2.1 Caractériser l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes $P(x)$ satisfaisant les conditions :

$$P(-1) = f(-1),\ P(0) = f(0),\ P'(0) = f'(0),\ P(1) = f(1).$$

où P' et f' sont les dérivées de P et de f.

(Exprimer les conditions portant sur le polynôme $R(x) = P(x) - P_2(x)$;
en déduire que $R(x) = x(x^2-1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme satisfaisant une condition que l'on identifiera ; enfin, caractériser tous les polynômes Q admissibles et conclure.)

2.2 Montrer qu'il existe dans $\mathcal{P}$ un unique élément $P^*(x)$ de degré au plus égal à 3.

2.3 En appliquant le théorème de Rolle, montrer que :

$$\forall x \in [-1,1] \quad , \exists c \in]-1,1[\quad f(x) = P^*(x) + x^2(x^2-1)\frac{f^{(4)}(c)}{4!}.$$

3. Soit l'espace $C^0([-\sqrt{3},\sqrt{3}])$ muni du produit scalaire :

$$< u, v >= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} u(x)v(x)dx$$

3.1 calculer le produit scalaire $< u, v >$ pour $u(x) = x^n$ et $v(x) = 1$.

3.2 soient $P_0,\ P_1,\ P_2$ les polynômes donnés par :

$$P_0(x) = 1 \tag{2}$$
$$P_1(x) = x - AP_0(x) \tag{3}$$
$$P_2(x) = x^2 - BP_1(x) - CP_0(x) \tag{4}$$

Déterminer les constantes A, B, C pour que les polynômes $P_0,\ P_1,\ P_2$ soient deux à deux orthogonaux.
Calculer les nombres $S_i = < P_i, P_i >$
Que peut-on dire de la famille $\{P_0,\ P_1,\ P_2\}$.

3.3 déterminer l'*approximation au sens des moindres carrés* de la fonction $f(x) = x^4$ sur l'intervalle $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ par un polynôme de degré 2.

(pour cela, on notera $q_2(x)$ le polynôme cherché, et on posera :

$$q_2(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x)$$

On exprimera la fonction à minimiser au moyen du produit scalaire ; on déterminera les coefficients c_i, puis on exprimera $q_2(x)$ dans la base canonique $\{1,\ x,\ x^2\}$)