Séance IV. Forme de Newton.

1. (S'entraîner) Écrire la table de différences divisées pour le polynôme P vérifiant :

$$P(-1) = -6,\ P(0) = 1,\ P(1) = 2,\ P(2) = -3$$

Écrire P sous sa forme de Newton.
Quel polynôme P obtient-on si on ajoute la condition $P(-2) = 9$?

2. (...encore un) Trouver un polynôme P de degré minimal tel que :
$P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 7$, $P(3) = 34$.
Se servir des calculs précédents pour trouver un polynôme Q tel que :
$Q(-1) = -14$, $Q(0) = 1$, $Q(1) = 2$, $Q(2) = 7$, $Q(3) = 34$.

3. (Gérer les points multiples) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4([a,b])$.
On se donne $N+1$ points $x_i \in [a,b]$ a priori distincts.
On souhaite comprendre ce qui se passe lorsque l'un des points se dédouble, i.e. par exemple $x_1 = x_0$.

3.1 Dans un premier temps, pour simuler que x_1 va devenir aussi proche que l'on veut de x_0, on pose $x_1 = x_0 + h$ avec h très petit.
On se donne les valeurs (à l'ordre zero) $y_i = f(x_i)$.
Montrer que la différence divisée $f[x_0, x_1]$ a une limite quand $h \to 0$ et l'expliciter.
En dehors de $f[x_0, x_1]$, que deviennent les autres différences divisées quand $h \to 0$?

3.2 Écrire la forme de Newton du polynôme d'interpolation de Lagrange basé sur les points

$$\{x_0,\ x_0 + h,\ x_2, ...\}.$$

Montrer que les coefficients de ce polynôme convergent quand $h \to 0$ vers ceux du polynôme :

$$H(x) = f[x_0]+f'(x_0)(x-x_0)+f[x_0,x_0,x_2](x-x_0)^2+f[x_0,x_0,x_2,x_3](x-x_0)^2(x-x_2)+...$$

où les c_i sont les différences divisées habituelles.

3.3 Montrer que si l'on connaît en plus des y_i la valeur de $f'(x_0)$ (information à l'ordre un), alors H est l'unique interpolant de f (dit de type Lagrange-Hermite) de degré au plus égal à N tel que :

$$H(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 2, ..., N \quad H'(x_0) = f'(x_0).$$

3.4 Quelle règle permettrait de gérer le cas de points d'interpolation dédoublés pour former la table des différences divisées ?