Séance III. Etude de l'erreur d'interpolation.

1. (S'entraîner) Soit la fonction $f(x) = x^4$. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de f respectivement aux points $\{-1,0,1\}$ et $\{-1,0,1,2\}$. Que vaut l'erreur d'interpolation dans ce dernier cas ?

2. (Bien comprendre que $\xi = \xi(\mathbf{z})$) Dans la formule de l'erreur, *"pour z donné dans $[a,b]$, il existe ξ dans $]a,b[$ tel que ..."* le fait que le point ξ dépende de z est fondamental :
Si $f \in \mathcal{C}^2([x_0,x_1])$, l'erreur pour l'interpolation linéaire de f au points x_0, x_1 est :

$$f(z) - p(z) = (z-x_0)(z-x_1)\frac{f''(\xi(z))}{2}, \quad x_0 < z < x_1$$

Déterminer la fonction $\xi(z)$ explicitement dans le cas où $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 1,\ x_1 = 2.$

3. (Les tracés graphiques sont-ils précis ?) Soit la fonction f donnée par :

$$f(x) = \sqrt{2e}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

On discrétise $[0,1]$ en N intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ (i=0,...,N-1) où $x_i = i.h$ et $h = \frac{1}{N}$.
On suppose que les valeurs *exactes* $f_i = f(x_i)$ sont connues et tabulées. Les valeurs intermédiaires sont calculées via l'interpolation linéaire des valeurs tabulées.
Pour $x_i \le x \le x_{i+1}$, on posera $x = x_i + \theta h$, avec $0 \le \theta \le 1$.

3.1 exprimer l'erreur d'interpolation $e(x)$ en fonction de θ et de h,

3.2 trouver une majoration de cette erreur en fonction de h seul,

3.3 comment choisir h pour avoir

$$\forall x \in [0,1] \quad |e(x)| \le 10^{-8}$$

4. (Gagne-t-on à ajouter des points ?) On discrétise l'intervalle $[a,b]$ en N intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ (i=0,...,N-1) où $x_i = a + i.h$ et $h = \frac{b-a}{N}$.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{(N+1)}([a,b])$.

4.1 Montrer que :

$$\forall x \in [a,b] \quad \prod_{j=0}^{j=N} |x - x_j| \le \frac{1}{4}h^{N+1}N!$$

4.2 En déduire que, dans le cas d'une discrétisation uniforme, l'erreur d'interpolation de Lagrange est majorée de la façon suivante :

$$|f(z) - P_n(z)| \le \frac{h^{N+1}}{4(N+1)} \max_{t\in[a,b]} |f^{(N+1)}(t)|$$