UNSA ESSI 1

Probabilités et statistiques
Examen Partiel (MAM3)

Examen Partiel

Tous les documents sont interdits. Tout matériel électronique est interdit à l'exception d'une calculatrice. Toutes les réponses doivent être justifiées. Une réponse non justifiée ne sera pas considérée. Penser à encadrer vos réponses.

Durée de l'examen : 1.5 heures.

Un barème indicatif de points est indiqué pour chaque exercice.

Exercice 1 (2 points).
On jette trois dés. Quelle est la probabilité

(1) d'obtenir trois "4",
(2) d'obtenir au moins un "4",
(3) d'obtenir deux "4".

Exercice 2 (4 points).
Une urne contient 5 boules blanches, 2 rouges et 3 noires.

(1) Tirant une boule au hasard, avec quelle probabilité est-elle rouge sachant qu'elle n'est pas noire ?
(2) Tirant deux boules au hasard, quelle est la probabilité d'en avoir une rouge sachant que la première tirée est noire ?
(3) Tirant deux boules au hasard, quelle est la probabilité d'en avoir une rouge sachant qu'il y en a au moins une noire ?

Exercice 3 (4 points).
Un test médical révèle la maladie qu'il recherche dans 99% des cas où elle est présente. Mais il donne aussi une indication positive erronée chez 1% des patients sains. C'est une maladie rare dont 0.5% de la population est atteinte. Quelle est la probabilité d'être vraiment malade quand le test est positif ?

Dans le cas où le test donne une indication positive, on fait un autre test qui donne des résultats indépendants du prémier. Ce deuxième test révèle la maladie dans 90% des cas où elle est présente et il donne une indication positive erronée chez 2% des patients sains. ~~Si le test donne une indication negative, le patient est sûrement sain.~~ Quelle est la probabilité que le prémier test donne une indication positive et le deuxième une indication negative ?

Exercice 4 (4 points).
X et Y sont deux variables aléatoires sur le même espace fondamental Ω, avec $X(\Omega) = \{7, 8, 9\}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2\}$. La loi jointe de probabilité de X et Y est représentée dans le tableau ci-dessous :

Y				
2	1/6	1/24	1/24	
1	1/2	1/8	1/8	
	7	8	9	X

Determiner si les deux variables sont indépendantes. Calculer l'espérance mathématique et la variance de $Z = X + Y$.

Exercice 5 (4 points).

Dans une certaine université, il y a 10 assistants au département de Mathématiques ; chaque assistant passe en moyenne le tiers de son temps au département. Il y a seulement 7 bureaux dans l'université. Quelle est la probabilité qu'en un jour donné au moins un assistant n'ait pas de bureau ?

Exercise 6 (6 points).

Pierre-Marie fait souvent du shopping pendant K heures pour acheter des livres de probabilités, K est une variable aléatoire qui a la même probabilité d'être 1, 2, 3 ou 4. Le nombre de livres N qui il achète est une variable aléatoire qui depend du temps K selon la loi suivante de probabilité conditionnelle :

$$p_{N|K}(n|k) = \frac{1}{k}, \text{ for } n = 1, 2, \ldots k.$$

(1) Determiner la loi de probabilité marginale de N.
(2) Determiner l'espérance mathématique et la variance de K, sachant que Pierre-Marie a acheté 2 livres.
(3) Determiner l'espérance mathématique de K, sachant que Pierre-Marie a acheté 2 ou 3 livres.
(4) Le prix de chaque livre est une variable aléatoire avec une moyenne égale à 30 euros. Calculer la dépense moyenne de Pierre-Marie quand il va faire du shopping.