Université Paris 7
IUP 2
Analyse de Performance et Simulation
Année 2003-2004

Interrogation écrite
mercredi 31 mars 2004
durée 2 heures

Les documents sont interdits. Les calculatrices non programmables sont autorisées. La méthode et des explications claires et précises compteront plus que le résultat final. On prendra donc le temps de BIEN JUSTIFIER ses calculs.

Le sujet est en principe trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

Exercice 1[Questions de cours]

1. Qu'est-ce que la 'Middle Square Method' ?
2. Que calcule l'algorithme de Brent ? En quoi est-il efficace ?
3. Qu'est-ce qu'une 'suite de nombres pseudo-aléatoires' ?

Exercice 2

1. Convertir les nombres suivants :
   a) $(11011)_2$ en base 10,
   b) $(368)_9$ en base 2,
   c) $(\underbrace{1101...1101}_{4n \text{ chiffres}})_2$ en base 10.
2. Donnez le développement décimal illimité de $23/11$.
3. Convertir $(2,45)_7$ en fraction décimale.
4. Convertir le développement $(5,(61)^\infty)_{10}$ en fraction en base 8.

Exercice 3

Soit n un entier. On rappelle que l'on a $n = a_N...a_0 = \Sigma_{0\leq k\leq N} a_k 10^k$. Que vaut $n \bmod 5$? En déduire un critère de divisibilité par 5.

Tournez la page SVP.

Exercice 4

Déterminez l'ensemble des solutions des relations de récurrence suivantes en fonction des premiers termes de la suite :

1. $u_n = 6u_{n-1}$
2. $u_n = u_{n-1} + 6u_{n-2} + 7$

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$
   $2x^2 + 3x - 3 = 0$.
2. Résoudre par la méthode vue en cours et discuter dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
   $3x^2 + 2x + 6 = 0 \bmod 7$.
3. Résoudre par la méthode vue en cours et discuter dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
   $x^2 + 2x + m = 0 \bmod 5$.

Exercice 6

1. Donnez l'orbite et les paramètres du générateur suivant :
   $$x_0 = 1; x_{n+1} = 3x_n + 5 \bmod 11$$
2. Donnez la pieuvre du générateur suivant :
   $$x_{n+1} = 2x_n + 11 \bmod 13$$

Exercice 7

Trouvez tous les a qui rendent ce générateur de période maximale. Justifiez.

$$x_0 = 9; x_{n+1} = ax_n + 3 \bmod 8$$

Exercice 8

1. Trouvez, s'ils existent, le premier et le k^{eme} n (en fonction de k) tel que (on résoudra ici sans utiliser le Théorème des Restes Chinois) :
   $$5^n = 4 \times 6^n \bmod 7$$
2. Trouvez, s'ils existent, le premier et le k^{eme} n (en fonction de k) tel que (on résoudra ici sans utiliser le Théorème des Restes Chinois) :
   $$5^n = 4n \times 6^n \bmod 7$$

Changez de feuille SVP.

Exercice 9

Prouvez que si le produit ab divise le produit cd et que a premier avec c et b premier avec d, alors a divise d et b divise c.

Exercice 10

On rappelle que la suite des nombres de Fibonacci est définie par

$$F_0 = 0; F_1 = 1; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrez que la suite des 'Fibonacci impairs' $a_n = F_{2k-1}$ vérifie la récurrence :

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$$