



## APPEL A PROJETS PEPS Interdisciplinaires 2015

### MoMIS 2015 – Modèles mathématiques et Interactions Sociales

#### Identification

Porteur du projet	M. Frédéric Giroire
Titre long	Dynamique et contrôle du Risque systémique dans les graphes de réseaux financiers
Acronyme	Systemic

#### Résumé du projet : (10 lignes maxi)

La dernière crise financière a révélé les conséquences importantes de la sous estimation du risque systémique dans la propagation de défauts dans le secteur bancaire. Le but de ce projet est de mettre en commun les compétences de chercheurs en Économie (modélisation économique, estimation statistique, réglementation prudentielle), en Théorie des Graphes (conception et algorithmique de graphes) et en Finance Mathématique (modélisation des risques et systèmes dynamiques). A l'aide des outils de la théorie des graphes, nous souhaitons évaluer l'impact de méthodes dynamiques de régulation permettant de stabiliser le système interbancaire, en minimisant le risque de contagion interne au réseau. Notre approche devrait permettre d'identifier les noeuds (établissements financiers) sur lesquels le régulateur devrait intervenir dynamiquement de façon optimale, en injectant des liquidités. Nous pourrions également identifier des structures de graphes de connexions, présentant une certaine stabilité en cas de fragilisation de certains établissements financiers. La nouveauté de ce projet est en particulier la considération de graphes de réseaux interbancaires hétérohomogènes, et la mise en place de stratégies de contrôle dynamique du système.

Ce projet de recherche a-t-il déjà fait été proposé dans le cadre du PEPS HuMaIn : NON

#### Exposé scientifique du projet :

La dernière crise financière a révélé les conséquences importantes de la sous estimation du risque systémique dans la propagation de défauts dans le secteur bancaire. Face à cette observation, la modélisation du risque systémique est devenue l'un des sujets de recherche les plus actifs du domaine. Les approches envisagées jusqu'à maintenant ne permettent pas encore de capturer précisément la façon dont les connexions entre institutions financières (prêt interbancaire, investissement sur des produits partageant un risque commun,...) impactent le risque de propagation d'un défaut majeur, comme celui de Lehman Brothers en 2008.

Le but de ce projet est de mettre en commun les compétences de chercheurs en Économie (modélisation économique, estimation statistique), en Théorie des Graphes (conception et algorithmique de graphes) et en Finance Mathématique (modélisation des risques et systèmes dynamiques) afin d'essayer d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

- Quels sont les indicateurs pertinents qui permettent de mesurer la fragilité du système bancaire ?
- En particulier, quelle structure de connexion interbancaire favorise le risque de propagation de fragilité à l'intérieur d'un graphe représentant un système de banques interconnectées ?
- Quelles sont les mesures optimales que devrait prendre un régulateur afin de limiter le risque de propagation : par exemple, comment contraindre le nombre de connexions, ou et quand intervenir sur le système en injectant des liquidités pour réduire la fragilité d'une banque ?
- Quelles sont les institutions bancaires dont le défaut éventuel n'aura qu'un faible impact sur la stabilité sur système global ?

Ce projet vise donc à comprendre les conséquences macroéconomiques sur le système bancaire de l'équilibre résultant du comportement microéconomique de chaque institution bancaire. Pour analyser ces risques, nous allierons la modélisation économique avec des outils de la théorie des graphes et la dynamique des systèmes.

## 1. Modélisation du risque systémique

Afin d'en avoir un traitement mathématique adéquat, la modélisation du risque de contagion entre agents est généralement effectuée via la considération d'interactions locales entre agents. Via sa stratégie d'investissement, de diversification ou de couverture des risques, chaque institution bancaire choisit d'établir des connexions avec d'autres

institutions (par exemple via des prêts interbancaires). Etant donné le nombre conséquent d'agents, il est trop souvent considéré que les agents sont identiques. Ils sont donc exposés de façon similaire aux autres institutions et forment un graphe « homogène » (complet uniforme).

D'un point de vue mathématique, cela permet par exemple d'étudier le cas limite, plus facile à traiter numériquement, dans lequel il y a une infinité d'agents dans le système. Dans ce cas, quantifier l'exposition du système, se réduit à connaître la dynamique de la distribution des réserves monétaires (par exemple), via l'équation de Fokker Planck, voir [1]. Chaque agent cherche alors à réduire son exposition au risque via la résolution d'un problème qui dépend de son niveau de liquidité et de la distribution globale des niveaux de liquidité de l'infinité d'agents présents. Via la résolution numérique de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman correspondante, on peut alors déterminer le comportement optimal de chaque agent, étant donné l'état global du système. On peut ainsi construire certains indicateurs de la fragilité du système et chercher une stratégie optimale de régulation, via différents leviers.

Une littérature relativement abondante commence à apporter des éléments de réponse à ces questions, mais le défaut principal de cette approche est l'hypothèse fondamentale permettant de passer le système à la limite : les agents sont identiques. Bien entendu, les institutions financières sont de tailles diverses, ont des niveaux d'expositions actuels distincts, poursuivent des objectifs qui peuvent diverger... Ainsi, il paraît nécessaire de construire des modèles qui prennent en compte cette asymétrie de nature et de comportement des agents, qui donnent naissance à des graphes de connexion hétérogènes. Dans la littérature, on peut citer par exemple [2,3,4] qui modélisent le système à l'aide de graphes aléatoires et apportent des réponses partielles à ces questions. Il apparaît naturellement que la structure même des graphes de connexion est une composante primordiale dans l'évaluation du risque de contagion globale. Comme détaillé ci-après, en s'inspirant des questions connexes déjà traitées dans la littérature de théorie des graphes (propagation d'épidémie ou de rumeurs, extinction et confinement de feux, etc.), nous allons chercher à mieux comprendre le type de structures qui diminue le plus le risque propagation de défauts dans le système.

## 2. Théorie des graphes: modélisation de la propagation.

Des problèmes connexes au risque d'effondrement du système bancaires ont été étudiés dans la communauté théorie des graphes et des réseaux, en particulier la propagation d'épidémies ou de feux ainsi que le calcul de mesures d'endiguement optimales, puis la diffusion d'information avec le développement des réseaux de télécommunications (problème du gossip puis de diffusion de vidéos), et la propagation de rumeurs avec l'apparition des réseaux sociaux.

Ces problèmes ont d'abord été étudiés avec des modèles homogènes où chaque individu est représenté de la même manière. Puis, ces dernières années, avec la constitution et la collecte de grands ensembles de données et en particulier de très grands réseaux (graphes du web, réseaux sociaux, ...), l'étude des réseaux complexes a attiré une attention croissante ces dernières années. La communauté scientifique s'est alors intéressé à des modèles hétérogènes où tous les individus n'ont pas la même place dans le graphe qui les relie.

L'étude de la propagation d'épidémies ou de rumeurs a particulièrement suivi cette évolution, par exemple dans le cas du modèle classique de propagation d'épidémie, le modèle SIR (i.e. Susceptible-Infected-Refractory) dans lequel un individu infecté peut mourir ou devenir immunisé. Ce modèle a d'abord été analysé (temps de propagation, proportion de la population finalement infectée, ...) sur un individu moyen (graphe homogène), e.g. [5], puis sur un graphe small-world [6], pour enfin arriver à des modèles hétérogènes qui prennent en entrée une distribution de degrés quelconque [7]. Les conclusions sont que la structure du réseau influence la propagation de rumeurs. En effet, le nombre total de noeuds infectés à la fin du processus dépend de la topologie du réseau et décroît quand la structure change de complètement aléatoire à scale-free.

## 3. Application de la théorie des graphes à la modélisation du risque systémique

Notre but dans ce projet est donc d'essayer d'appliquer les méthodes de théorie des graphes mises en oeuvre pour l'étude de la propagation d'épidémie ou de la diffusion d'information pour modéliser les risques du système bancaire. Notre objectif général est d'introduire et d'analyser des modèles hétérogènes. Notre point de départ sera l'étude d'un exemple précis, le modèle suivant.

Nous considérerons une modélisation du système bancaire par un graphe valué. Les sommets de ce graphe seront les banques et institutions financières qui auront chacune un montant de fonds propres. Des liens valués connectant les sommets représenteront les dettes contractées entre banques. Nous étudierons des scénarios sur ce

graphe dans lesquels une banque fait défaut et risque d'entraîner dans sa chute une part importante du système bancaire, voir par exemple le modèle de [2]. Dans notre modèle, quand une banque fait défaut, elle ne peut plus honorer ses dettes (ces liens sortants disparaissent) et certaines banques voisines peuvent en conséquence se trouver avec une balance négative et faire défaut à la suite. Pour ce modèle, nous essaierons de traiter les points suivants :

**Analyse des caractéristiques du graphe des banques.** Notre première étape sera d'étudier les modèles de graphes de banques présents dans la littérature [8, 2 et références] pour déterminer les caractéristiques principales de ces graphes : taille, distribution des degrés, connectivité, présence et taille des cycles, etc. Cela nous servira par la suite pour proposer des méthodes d'étude et de résolution adéquate.

**Modélisation du risque et calcul de la propagation dans le graphe des banques.** Nous étudierons ensuite la propagation d'un risque suite à un défaut dans ce type de graphes. En particulier, en s'appuyant sur leurs caractéristiques, nous proposerons des algorithmes efficaces pour estimer le risque d'un défaut majeur du système bancaire.

**Etudes des risques particuliers.** Nous essaierons d'identifier les institutions les plus à risque dans le système bancaire. Nous nous appuyerons sur les nombreux travaux pour identifier des individus particuliers (en raison de leur forte connectivité ou de leur position centrale dans le réseau) dans les réseaux sociaux, que ce soit des individus à risques [9] ou alors les individus les plus influents des réseaux sociaux.

**Intervention sur la propagation du risque.** Cette identification des individus à risque est en fait la première étape pour permettre une action efficace. Ainsi, la recherche des individus les plus influents d'un réseau social peut avoir pour but le lancement à budget fixé d'une campagne de publicité. Dans un autre contexte, cette étude peut être utilisée pour prévenir les risques, et pour stopper ou ralentir la propagation d'une épidémie. [10] étudie comment déployer une campagne de vaccination et étudie son impact sur un réseau petit-monde.

Nous voulons étudier comment un état peut intervenir en cas de chute d'une des institutions bancaires. En particulier, dans le cadre de scénarios dans lesquels un régulateur décide d'investir une somme d'argent (prêt des banques centrales pour la crise 2008) pour éviter une propagation trop importante du risque. Le régulateur doit déterminer comment affecter ce capital aux diverses institutions afin de minimiser l'impact global. Ces questions se rapprochent de celles posées par l'élaboration de stratégies de défense contre la propagation de rumeurs dans les réseaux sociaux, voir par exemple [11].

**Modèles temporels plus complexes. Jeux à deux joueurs sur un graphe.** Des modèles d'intervention plus complexes avec une dimension temporelle ont été introduits pour modéliser une intervention qui se déroule dans le temps en fonction de la propagation de l'épidémie. Par exemple, le combat des pompiers contre un feu de forêt peut être modélisé par un jeu à deux joueurs sur un graphe [12]. Le partenaire I3S a une expérience importante avec ce type de jeux (gendarmes et voleurs...). De façon analogue, nous modéliserons une intervention des états au cours du temps dont l'intensité dépend de l'avancée de la crise (comme par exemple au cours de la crise grecque). Le but sera de déterminer comment, quand et où intervenir.

**Renforcement du réseau bancaire et régulation.** La structure des graphes ayant une influence sur la propagation d'un risque ou d'une information, il est important de chercher à déterminer quelles sont les structures les plus solides pour résister à un défaut. Nous nous demanderons ensuite comment renforcer le graphe des banques existant ou comment éviter qu'il ne s'affaiblisse. Ainsi, considérons le cas d'un régulateur mettant en place de règles pour d'acceptation sur les prêts. Pour l'instant, seul des règles prudentielles individuelles (par exemple réserve de fonds propres) sont mises en place. Serait-il bénéfique d'utiliser des critères qui prennent en compte le risque global (sur le réseau financier) et donc la situation des parties contractantes dans le graphe ? Nous essaierons donc de déterminer si le graphe des banques pourrait être rendu plus solide en supprimant certaines structure dangereuses, et si celles-ci sont suffisamment génériques pour être exclue par de la régulation.

Nous nous appuyerons sur des outils de conception (design) de réseaux mis en place pour les réseaux de télécommunication [13]. En effet, dans ce contexte, les réseaux ne sont pas créés de façon "naturelle", mais mis en place par des opérateurs. Les chercheurs se sont donc demandés comment construire des réseaux optimaux pour différents critères : tolérances aux pannes, diffusions de données optimale [14].

## Références bibliographiques.

- [1] J.P. Fouque and T. Ichiba, Stability in a model of inter-bank lending, *SIAM Journal on Financial Mathematics*, Vol. 4, 2013, p. 784-803
- [2] Gleeson, J. P., Hurd, T. R., Melnik, S., & Hackett, A. (2013). Systemic risk in banking networks without Monte Carlo simulation. In *Advances in Network Analysis and its Applications* (pp. 27-56). Springer Berlin Heidelberg
- [3] H Amini, R Cont, A Minca, Resilience to contagion in financial networks, *Mathematical Finance*, 2013.
- [4] A. Minca and A. Sulem, Optimal control of interbank contagion under complete information, *Statistics and Risk Modeling* 31(1), March 2014, pp. 23-48
- [5] Sudbury, A. (1985). The proportion of the population never hearing a rumour. *Journal of applied probability*, 443-446.
- [6] Zanette, D. H. (2001). Critical behavior of propagation on small-world networks. *Physical Review E*, 64(5), 050901.
- [7] Zhou, J., Liu, Z., & Li, B. (2007). Influence of network structure on rumor propagation. *Physics Letters A*, 368(6), 458-463.
- [8] Boss, M., Elsinger, H., Thurner, S. & Summer, M. 2004 Network topology of the interbank market. *Quantitative Finance* 4, 677–684.
- [9] Christley, R. M., Pinchbeck, G. L., Bowers, R. G., Clancy, D., French, N. P., Bennett, R., & Turner, J. (2005). Infection in social networks: using network analysis to identify high-risk individuals. *American journal of epidemiology*, 162(10), 1024-1031.
- [10] Zanette, D. H., & Kuperman, M. (2002). Effects of immunization in small-world epidemics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 309(3), 445-452.
- [11] Yu, H., Kaminsky, M., Gibbons, P. B., & Flaxman, A. (2006, September). Sybilguard: defending against sybil attacks via social networks. In *ACM SIGCOMM Computer Communication Review* (Vol. 36, No. 4, pp. 267-278). ACM.
- [12] Finbow, S., & MacGillivray, G. (2009). The firefighter problem: a survey of results, directions and questions. *Australas. J. Combin*, 43, 57-77.
- [13] Bermond, J. C. (laboratoire I3S), Delorme, C., & Quisquater, J. J. (1986). Strategies for interconnection networks: some methods from graph theory. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 3(4), 433-449
- [14] Fraigniaud, P., & Peters, J. G. (1994). Minimum Linear Gossip Graphs and Maximal Linear( $\Delta, k$ )-Gossip Graphs

## Consortium

Le consortium rassemble des chercheurs avec des expertises complémentaires en mathématique, économie et informatique, et plus précisément en gestion des risques, régulation économique, théorie des graphes et algorithmique. C'est une tendance de fond de la théorie économique d'introduire des outils de théorie des graphes ou théorie des réseaux pour modéliser des phénomènes complexes d'interaction. Notre consortium réunit donc des expertises nécessaires pour avancer dans cette voie.

### **I3S (Laboratoire d'informatique, Signaux et Système de Sophia Antipolis) - projet COATI.**

*Participant* : Frédéric Giroire (Porteur), chargé de recherche CNRS. 4 HM

*Expertise* : théorie des graphes, algorithmique et optimisation, réseaux de télécommunication.

### **LAMA (Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées).**

*Participant* : Romuald Elie, professeur Université Paris-Est. 3 HM

*Expertise* : Modélisation et contrôle des risques financiers. Membre du projet INRIA MathRisk, dont l'une des thématiques est la modélisation du risque systémique. Porteur du projet ANR LIQUIRISK : Contrôle des risques et modélisation du risque de liquidité.

### **CREM (Centre de recherche en économie et management).**

*Participant* : Arthur Charpentier, Maître de Conférence Université Rennes 1. 3HM

*Expertise* : modélisation économique et économie du risque.

### **GREDEG (Groupe de Recherche en Droit, Economie et Gestion),**

*Participant* : Olivier Bruno, professeur Université Nice-Sophia Antipolis. 2,4 HM

*Expertise* : microéconomie bancaire, réglementation prudentielle des banques.

### **Porteur du projet.**

Frédéric Giroire est chargé de recherche au CNRS dans le laboratoire I3S à Sophia Antipolis depuis 2008 au sein du projet Coati. Ses recherches portent sur la théorie des graphes, l'algorithmique et l'optimisation combinatoire appliquées principalement à la conception et la gestion de réseaux de télécommunication. Il maintient une collaboration forte avec des industriels comme Sprint (6 mois de stage 2002 qui ont mené à deux brevets en 2008), Intel (un an de postdoc en 2007 qui a mené à un brevet en 2010), Orange et Alcatel Bell Lucent.

Son expertise sur l'utilisation de la théorie des graphes pour la conception de réseaux (par exemple, conception de réseaux minimaux satellitaires pour Alcatel Space), sur les jeux à deux joueurs dans les graphes (jeux pour le caching dans les réseaux), sur l'algorithmique et l'optimisation de réseaux (problème de routage tolérants aux pannes pour Sprint) devrait permettre d'apporter des méthodes adéquates pour l'étude de risque du système bancaire.

Il a aussi une expérience sur la gestion de projet qui devrait aider à coordonner les différents partenaires. Il a été le porteur de l'ANR-JCJC DIMAGREEN 2009-2012 sur la conception et la gestion de réseaux avec une consommation énergétique faible.

## **Références bibliographiques des participants**

### **Régulation prudentielle et risques systémiques.**

Charpentier Arthur & Le Maux Benoit, 2014, Natural catastrophe insurance: How should the government intervene? *Journal of Public Economics* Volume 115, July 2014, Pages 1–17

O. Bruno, A. Cartapanis, E. Nasica (2014), "Bank leverage, financial fragility and prudential regulation", GREDEG - WP 2014-12

O. Bruno (2009), "Credit availability and capital crunch: on the role of the heterogeneity of the banking system", *Journal of Public Economic Theory*, vol. 11(2), pp. 215-279.

### **Conception de réseaux et jeux sur les graphes.**

Amini, O., Giroire, F., Pérennes, S., & Huc, F. (2010). Minimal selectors and fault tolerant networks. *Networks*, 55(4), 326-340.

Fomin, F. V., Giroire, F., Jean-Marie, A., Mazauric, D., & Nisse, N. (2014). To satisfy impatient web surfers is hard. *Theoretical Computer Science*, 526, 1-17.

### **Contrôle et mesures de risques.**

Charpentier, Arthur, Galichon, Alfred & Henry, Marc (2015) Local Utility and Multivariate Risk Aversion, *to appear in Mathematics of Operations Research*

Optimal selling rules for monetary invariant criteria: tracking the maximum of a portfolio with negative drift, R. Elie et G. Espinosa, *Mathematical Finance*, published online in June 2013.

**5 Mots clés : risque systémique, théorie des graphes, système bancaire, algorithmique, optimisation dynamique**

### **Explicitation de la demande financière par grands postes :**

- **Diverses rencontres entre les participants du projet** basés à Rennes, Paris et Sophia Antipolis: 6 000 Euros.

Dont

- 4 visites d'une semaine dans un laboratoire du projet (4\*1000 euros)

- 2 réunions (1 à 2 jours) avec tous les participants (une à Sophia Antipolis, une à paris) (2\*1000 euros)

- **Participation au workshop « Systemic Risk and Financial Network »**, UCLA, Los Angeles, 23-27 Mars 2015. 2000 Euros.

- **Participation à un workshop ou à une conférence internationale** suite aux travaux communs : 2000 euros.

**Total : 10 000 Euros**