Introduction au filtrage de Kalman

Théorie du filtre de Kalman discret & applications

Florent Lafarge

2009

Plan

Plan

Plan

Définition générale du filtrage

Filtrage

Opération qui consiste à estimer **l'état** d'un système dynamique à partir d'observations partielles et bruitées.

Systèmes dynamiques

Systèmes dynamiques

Modèles mathématiques d'évolution utilisés dans de nombreux domaines des sciences et techniques : physique, biologie, écologie, météorologie, économie, ingénierie...

Systèmes dynamiques

Modèles mathématiques d'évolution utilisés dans de nombreux domaines des sciences et techniques : physique, biologie, écologie, météorologie, économie, ingénierie...

Systèmes qui évoluent dans le temps de facon à la fois :

Systèmes dynamiques

Modèles mathématiques d'évolution utilisés dans de nombreux domaines des sciences et techniques : physique, biologie, écologie, météorologie, économie, ingénierie...

Systèmes qui évoluent dans le temps de facon à la fois :

$\longrightarrow$ **causale**

leur avenir ne dépend que de phénomènes passés ou présents

Systèmes dynamiques

Modèles mathématiques d'évolution utilisés dans de nombreux domaines des sciences et techniques : physique, biologie, écologie, météorologie, économie, ingénierie...

Systèmes qui évoluent dans le temps de facon à la fois :

$\longrightarrow$ **causale**

leur avenir ne dépend que de phénomènes passés ou présents

$\longrightarrow$ **déterministe**

à une condition initiale donnée à l'instant présent correspond, à chaque instant ultérieur, un et un seul état futur

Systèmes dynamiques : évolution dans le temps

Systèmes dynamiques : évolution dans le temps

- Evolution continue dans le temps $\longrightarrow$ équations différentielles ordinaires

Systèmes dynamiques : évolution dans le temps

- Evolution continue dans le temps $\longrightarrow$ équations différentielles ordinaires
- Evolution discontinue dans le temps $\longrightarrow$ équations récurrentes

Systèmes dynamiques stochastiques

Systèmes dynamiques stochastiques

- Prise en compte de perturbations aléatoires dans les équations du système

Systèmes dynamiques stochastiques

- Prise en compte de perturbations aléatoires dans les équations du système
- Evolution de phénomènes aléatoires décrits par des processus aléatoires continus et/ou discrets

Définition mathématique : cas continu

Notations

Temps :	t	$\in$	$\mathbb{R}$
Vecteur d'état :	$X(t)$	$\in$	$\mathbb{R}^p$
Vecteur des mesures :	$Z(t)$	$\in$	$\mathbb{R}^m$

Définition mathématique : cas continu

Notations

Temps :	t	$\in$	$\mathbb{R}$
Vecteur d'état :	$X(t)$	$\in$	$\mathbb{R}^p$
Vecteur des mesures :	$Z(t)$	$\in$	$\mathbb{R}^m$

o $\{X(t)\}, \{Z(t)\}$ $\equiv$ processus aléatoires continus.

Définition mathématique : cas continu

Notations

Temps :	t	$\in$	$\mathbb{R}$
Vecteur d'état :	$X(t)$	$\in$	$\mathbb{R}^p$
Vecteur des mesures :	$Z(t)$	$\in$	$\mathbb{R}^m$

o $\{X(t)\}, \{Z(t)\}$ $\equiv$ processus aléatoires continus.

Remarque
L'état $X(t)$ du système dynamique n'est pas observé.

Définition mathématique : cas continu

Mesures bruitées disponibles à l'instant t :

$$\{Z(\tau),\, \tau \in [0,t]\}$$

Définition mathématique : cas continu

Mesures bruitées disponibles à l'instant t :

$$\{Z(\tau),\, \tau \in [0, t]\}$$

Lien signal/mesures à l'instant t :

$$Z(t) \quad = \quad h\,(X(t)) \quad + \quad V(t)$$

Définition mathématique : cas continu

Mesures bruitées disponibles à l'instant t :

$$\{Z(\tau),\, \tau \in [0,t]\}$$

Lien signal/mesures à l'instant t :

$$Z(t) \quad = \quad h\,(X(t)) \quad + \quad V(t)$$

o

Définition mathématique : cas continu

Mesures bruitées disponibles à l'instant t :

$$\{Z(\tau),\, \tau \in [0,t]\}$$

Lien signal/mesures à l'instant t :

$$Z(t) \quad = \quad h\,(X(t)) \quad + \quad V(t)$$

o

- - $Z(t) \;\rightarrow$ observations

Définition mathématique : cas continu

Mesures bruitées disponibles à l'instant t :

$$\{Z(\tau),\, \tau \in [0,t]\}$$

Lien signal/mesures à l'instant t :

$$Z(t) \quad = \quad h\,(X(t)) \quad + \quad V(t)$$

o

- - $Z(t) \;\rightarrow$ observations
    $h\,(X(t)) \;\rightarrow$ signal fonction de l'état

Définition mathématique : cas continu

Mesures bruitées disponibles à l'instant t :

$$\{Z(\tau),\, \tau \in [0,t]\}$$

Lien signal/mesures à l'instant t :

$$Z(t) \quad = \quad h\left(X(t)\right) \quad + \quad V(t)$$

o

- - $Z(t) \;\longrightarrow$ observations
    $h\left(X(t)\right) \;\longrightarrow$ signal fonction de l'état
    $V(t) \;\longrightarrow$ bruit additif supposé connu

Définition mathématique : cas continu

Filtrage

Détermination d'un estimateur optimal $\hat{X}(t)$ du vecteur d'état $X(t)$ à partir de toutes les mesures disponibles

$$\{Z(\tau),\, \tau \in [0, t]\}$$

Formulation mathématique : cas discret

Processus aléatoires discrets

$$\begin{array}{lccc} \text{Temps :} & k & \in & \mathbb{Z} \\ \text{Vecteur d'état :} & X_k & \in & \mathbb{R}^p \\ \text{Vecteur des mesures :} & Z_k & \in & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Formulation mathématique : cas discret

Processus aléatoires discrets

Temps :	k	$\in$	$\mathbb{Z}$
Vecteur d'état :	X_k	$\in$	$\mathbb{R}^p$
Vecteur des mesures :	Z_k	$\in$	$\mathbb{R}^m$

- $\{X_k\}, \{Z_k\} \equiv$ processus aléatoires discrets.

Formulation mathématique : cas discret

Processus aléatoires discrets

$$\begin{array}{lccc} \text{Temps :} & k & \in & \mathbb{Z} \\ \text{Vecteur d'état :} & X_k & \in & \mathbb{R}^p \\ \text{Vecteur des mesures :} & Z_k & \in & \mathbb{R}^m \end{array}$$

o $\{X_k\}, \{Z_k\}$ $\equiv$ processus aléatoires discrets.

Remarque
L'état X_k du système dynamique n'est pas observé.

Définition mathématique : cas discret

Mesures bruitées disponibles à l'instant k :

$$Z_{0:k} = \{Z_l,\, l = 0, 1, 2, \ldots, k\}$$

Définition mathématique : cas discret

Mesures bruitées disponibles à l'instant k :

$$Z_{0:k} = \{Z_l,\, l = 0, 1, 2, \ldots, k\}$$

Lien signal/mesures à l'instant k :

$$Z_k \;=\; h\left(X_k\right) \;+\; V_k$$

Définition mathématique : cas discret

Mesures bruitées disponibles à l'instant k :

$$Z_{0:k} = \{Z_l,\, l = 0, 1, 2, \ldots, k\}$$

Lien signal/mesures à l'instant k :

$$Z_k = h\,(X_k) + V_k$$

o

Définition mathématique : cas discret

Mesures bruitées disponibles à l'instant k :

$$Z_{0:k} = \{Z_l,\, l = 0, 1, 2, \ldots, k\}$$

Lien signal/mesures à l'instant k :

$$Z_k = h(X_k) + V_k$$

o

- - $Z_k \longrightarrow$ observations

Définition mathématique : cas discret

Mesures bruitées disponibles à l'instant k :

$$Z_{0:k} = \{Z_l,\, l = 0, 1, 2, \ldots, k\}$$

Lien signal/mesures à l'instant k :

$$Z_k = h(X_k) + V_k$$

o

- - $Z_k \longrightarrow$ observations
    $h(X_k) \longrightarrow$ signal fonction de l'état

Définition mathématique : cas discret

Mesures bruitées disponibles à l'instant k :

$$Z_{0:k} = \{Z_l,\, l = 0, 1, 2, \ldots, k\}$$

Lien signal/mesures à l'instant k :

$$Z_k = h(X_k) + V_k$$

o

- $Z_k \longrightarrow$ observations
  $h(X_k) \longrightarrow$ signal fonction de l'état
  $V_k \longrightarrow$ bruit additif supposé connu

Définition mathématique : cas discret

Filtrage

Détermination d'un estimateur optimal $\hat{X}_k$ du vecteur d'état X_k à partir de toutes les mesures disponibles

$$Z_{0:k} = \{Z_l,\, l = 0, 1, 2, \ldots, k\}$$

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Exemple en temps continu : mouvement 1D

- Mobile en mouvement le long d'un axe $(0x)$ avec une accélération constante γ

Exemple en temps continu : mouvement 1D

- Mobile en mouvement le long d'un axe $(0x)$ avec une accélération constante γ

- **Filtrage** : estimer la vitesse $v(t)$ et la position $x(t)$ du mobile à l'instant t à partir de mesures de position

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Conditions initiales

$$\begin{array}{lrcl} \text{Vitesse :} & v(t_0) & = & v_0 \\ \text{Position :} & x(t_0) & = & x_0 \end{array}$$

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Modélisation physique

$$\begin{array}{lrcl} \text{Vitesse :} & v(t) & = & v_0 + \gamma\,(t - t_0) \\ \text{Position :} & x(t) & = & x_0 + v_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\gamma\,(t - t_0)^2 \end{array}$$

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Vecteur d'état

$$X(t) = \left[\begin{array}{c} v(t) \\ x(t) \end{array} \right]$$

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Equation dynamique d'évolution de l'état

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{dv}{dt} \\ \\ \dfrac{dx}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Equation dynamique d'évolution de l'état

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ système d'équations différentielles.

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Système dynamique continu

$$\frac{dX}{dt} = F(t)\, X(t) + f(t)$$

o $X(t) \in \mathbb{R}^2$, $F(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et $f(t) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Système dynamique continu

$$\frac{dX}{dt} = F(t)\,X(t) + f(t)$$

o $X(t) \in \mathbb{R}^2$, $F(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et $f(t) \in \mathbb{R}^2$.

$\longrightarrow$ équation d'évolution de l'état ou **équation d'état**

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Mesure

$$Z(t) = x(t) + V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} + V(t)$$

- $V(t)$ représente le **bruit de mesure**

Exemple en temps continu : mouvement 1D

Equation d'observation

$$Z(t) = H(t)\,X(t) + V(t)$$

o $Z(t) \in \mathbb{R}$, $X(t) \in \mathbb{R}^2$, $H(t) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ et $V(t) \in \mathbb{R}$.

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Discrétisation

$$\forall\, t \in [t_k, t_{k+1}]\,,\ \gamma(t) \,=\, \text{cste} \,=\, \gamma_k,\ k \in \mathbb{N}$$

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Conditions initiales

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{Vitesse :} & v(t_k) & = & v_k \\ \text{Position :} & x(t_k) & = & x_k \end{array}\right., \; k \in \mathbb{N}$$

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Modélisation physique

$$\begin{array}{lrcl} \text{Vitesse :} & v(t) & = & v_k + \gamma\,(t - t_k) \\ \text{Position :} & x(t) & = & x_k + v_k\,(t - t_k) + \frac{1}{2}\gamma\,(t - t_k)^2 \end{array} ,$$

$$t \in [t_k, t_{k+1}]\,,\; k \in \mathbb{N}$$

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Vecteur d'état

$$X_k = X(t_k) = \begin{bmatrix} v(t_k) \\ x(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_k \\ x_k \end{bmatrix}$$

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Equation dynamique d'évolution de l'état

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} v(t_{k+1}) \\ x(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k \\ x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t \\ \frac{(\Delta t)^2}{2} \end{bmatrix} \gamma_k$$

o

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k$$

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Equation dynamique d'évolution de l'état

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} v(t_{k+1}) \\ x(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k \\ x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t \\ \dfrac{(\Delta t)^2}{2} \end{bmatrix} \gamma_k$$

o

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k$$

$\longrightarrow$ système d'équations récurrentes.

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Système dynamique discret

$$X_{k+1} = F_k \, X_k + f_k$$

o $X_k \in \mathbb{R}^2$, $F_k \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et $f_k \in \mathbb{R}^2$.

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Système dynamique discret

$$X_{k+1} = F_k \, X_k + f_k$$

o $X_k \in \mathbb{R}^2$, $F_k \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et $f_k \in \mathbb{R}^2$.

$\longrightarrow$ équation d'évolution de l'état ou **équation d'état**

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Supposons que l'accélération γ_k subisse des perturbations aléatoires ; alors l'équation d'évolution de l'état X_k peut être complétée par

Système dynamique discret

$$X_{k+1} \;=\; F_k\, X_k \;+\; f_k \;+\; W_k$$

o $W_k \in \mathbb{R}^2$ représente un bruit qui affecte le modèle accélération constante

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Supposons que l'accélération γ_k subisse des perturbations aléatoires ; alors l'équation d'évolution de l'état X_k peut être complétée par

Système dynamique discret

$$X_{k+1} = F_k \, X_k + f_k + W_k$$

o $W_k \in \mathbb{R}^2$ représente un bruit qui affecte le modèle accélération constante

$\rightarrow$ **bruit de modèle**

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Mesure

$$Z_k = x_k + V_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k \\ x_k \end{bmatrix} + V_k$$

o V_k représente le **bruit de mesure**

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Equation d'observation

$$Z_k = H_k X_k + V_k$$

- $Z_k \in \mathbb{R}$, $X_k \in \mathbb{R}^2$, $H_k \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ et $V_k \in \mathbb{R}$

Exemple en temps discret : mouvement 1D

Le problème du filtrage se ramène à la résolution d'un système linéaire stochastique récursif de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_{k+1} & = & F_k\, X_k \,+\, f_k \,+\, W_k \\ Z_k & = & H_k\, X_k \,+\, V_k \end{array} \right.$$

o $Z_k \in \mathbb{R}$, $X_k \in \mathbb{R}^2$, $F_k \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $H_k \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, $W_k \in \mathbb{R}^2$ et $V_k \in \mathbb{R}$

Pour le résoudre, il faut préciser la nature des bruits de modèle $\{W_k\}$ et de mesure $\{V_k\}$

Formulation du filtre de Kalman discret

Soit le système linéaire gaussien suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_{k+1} & = & F_k\, X_k \,+\, f_k \,+\, W_k \\ Z_k & = & H_k\, X_k \,+\, h_k \,+\, V_k \end{array} \right.$$

o, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k, f_k, W_k \in \mathbb{R}^p$, $Z_k, h_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, $F_k \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $H_k \in \mathbb{R}^{m\times p}$, et,

Formulation du filtre de Kalman discret

Soit le système linéaire gaussien suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_{k+1} & = & F_k\, X_k \,+\, f_k \,+\, W_k \\ Z_k & = & H_k\, X_k \,+\, h_k \,+\, V_k \end{array} \right.$$

o, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k, f_k, W_k \in \mathbb{R}^p$, $Z_k, h_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, $F_k \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $H_k \in \mathbb{R}^{m \times p}$, et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W

Formulation du filtre de Kalman discret

Soit le système linéaire gaussien suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_{k+1} & = & F_k\, X_k \,+\, f_k \,+\, W_k \\ Z_k & = & H_k\, X_k \,+\, h_k \,+\, V_k \end{array} \right.$$

o, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k, f_k, W_k \in \mathbb{R}^p$, $Z_k, h_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, $F_k \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $H_k \in \mathbb{R}^{m\times p}$, et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- La condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne $\bar{X}_0$, de matrice de covariance Q_0^X

Formulation du filtre de Kalman discret

Soit le système linéaire gaussien suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_{k+1} & = & F_k\, X_k \,+\, f_k \,+\, W_k \\ Z_k & = & H_k\, X_k \,+\, h_k \,+\, V_k \end{array} \right.$$

o, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k, f_k, W_k \in \mathbb{R}^p$, $Z_k, h_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, $F_k \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $H_k \in \mathbb{R}^{m\times p}$, et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- La condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne $\bar{X}_0$, de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V

Formulation du filtre de Kalman discret

Soit le système linéaire gaussien suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_{k+1} & = & F_k\, X_k \, + \, f_k \, + \, W_k \\ Z_k & = & H_k\, X_k \, + \, h_k \, + \, V_k \end{array} \right.$$

o, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k, f_k, W_k \in \mathbb{R}^p$, $Z_k, h_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, $F_k \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $H_k \in \mathbb{R}^{m \times p}$, et,

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- La condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne $\bar{X}_0$, de matrice de covariance Q_0^X
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Formulation du filtre de Kalman discret

A l'instant k, les observations suivantes sont disponibles

$$Z_{0:k} \triangleq (Z_0, Z_1, \ldots, Z_k)$$

Formulation du filtre de Kalman discret

A l'instant k, les observations suivantes sont disponibles

$$Z_{0:k} \triangleq (Z_0, Z_1, \dots, Z_k)$$

Filtrage

Estimation du vecteur aléatoire X_k à partir des observations $Z_{0:k}$ de facon **optimale**, **récursive**

Formulation du filtre de Kalman discret

Formulation du filtre de Kalman discret

- Critère d'optimalité : minimum de variance $\Rightarrow$ loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$ (prop. P3)

Formulation du filtre de Kalman discret

- Critère d'optimalité : minimum de variance $\Rightarrow$ loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$ (prop. P3)
- Cas gaussien $\Rightarrow$ Seules la moyenne $\widehat{X}_k$ et la matrice de covariance P_k sont nécessaires à la définition de cette loi (prop. P7)

d'o

Formulation du filtre de Kalman discret

- Critère d'optimalité : minimum de variance $\Rightarrow$ loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$ (prop. P3)
- Cas gaussien $\Rightarrow$ Seules la moyenne $\widehat{X}_k$ et la matrice de covariance P_k sont nécessaires à la définition de cette loi (prop. P7)

d'o

Espérance et matrice de covariance conditionnelles

$$\widehat{X}_k \triangleq \mathbb{E}\left[X_k | Z_{0:k}\right]$$

$$P_k \triangleq \mathbb{E}\left[\left(X_k - \widehat{X}_k\right)\left(X_k - \widehat{X}_k\right)^T | Z_{0:k}\right]$$

Formulation du filtre de Kalman discret

Espérance et matrice de covariance conditionnelles antérieures

$$\widehat{X}_k^- \triangleq \mathbb{E}\left[X_k | Z_{0:k-1}\right]$$

$$P_k^- \triangleq \mathbb{E}\left[\left(X_k - \widehat{X}_k^-\right)\left(X_k - \widehat{X}_k^-\right)^T \mid Z_{0:k-1}\right]$$

Formulation du filtre de Kalman discret

Les matrices de covariances conditionnelles P_k et P_k^- ne dépendent pas des observations (prop. P11)

Conséquence

$$P_k^- = \mathbb{E}\left[\left(X_k - \widehat{X}_k^-\right)\left(X_k - \widehat{X}_k^-\right)^T\right]$$

$$P_k = \mathbb{E}\left[\left(X_k - \widehat{X}_k\right)\left(X_k - \widehat{X}_k\right)^T\right]$$

Processus d'innovation

Supposons connue la loi conditionnelle du vecteur aléatoire X_{k-1} sachant $Z_{0:k-1}$.

Processus d'innovation

Supposons connue la loi conditionnelle du vecteur aléatoire X_{k-1} sachant $Z_{0:k-1}$.

Comment déterminer la loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$?

Processus d'innovation

Supposons connue la loi conditionnelle du vecteur aléatoire X_{k-1} sachant $Z_{0:k-1}$.

Comment déterminer la loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$?

Deux étapes sont nécessaires :

Processus d'innovation

Supposons connue la loi conditionnelle du vecteur aléatoire X_{k-1} sachant $Z_{0:k-1}$.

Comment déterminer la loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$?

Deux étapes sont nécessaires :

1. **La prédiction**

Processus d'innovation

Supposons connue la loi conditionnelle du vecteur aléatoire X_{k-1} sachant $Z_{0:k-1}$.

Comment déterminer la loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$?

Deux étapes sont nécessaires :

1. **La prédiction**

   la loi conditionnelle de X_k est calculée sachant les observations passées $Z_{0:k-1}$

Processus d'innovation

Supposons connue la loi conditionnelle du vecteur aléatoire X_{k-1} sachant $Z_{0:k-1}$.

Comment déterminer la loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$?

Deux étapes sont nécessaires :

1. **La prédiction**

   la loi conditionnelle de X_k est calculée sachant les observations passées $Z_{0:k-1}$

2. **La correction**

Processus d'innovation

Supposons connue la loi conditionnelle du vecteur aléatoire X_{k-1} sachant $Z_{0:k-1}$.

Comment déterminer la loi conditionnelle de X_k sachant $Z_{0:k}$?

Deux étapes sont nécessaires :

1. **La prédiction**

   la loi conditionnelle de X_k est calculée sachant les observations passées $Z_{0:k-1}$

2. **La correction**

   l'observation Z_k est utilisée pour apporter une information nouvelle par rapport aux observations passées $Z_{0:k-1}$

Processus d'innovation

La quantité

$$I_k = Z_k - \mathbb{E}\left[Z_k | Z_{0:k-1}\right] = Z_k - \left(H_k \, \widehat{X}_k^- + h_k\right)$$

est appelée **innovation**

Lemme

Le processus $\{I_k\}$ est un processus gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^m$; en particulier I_k est un vecteur aléatoire gaussien

indépendant de $Z_{0:k-1}$

Processus d'innovation

La quantité

$$I_k = Z_k - \mathbb{E}\left[Z_k | Z_{0:k-1}\right] = Z_k - \left(H_k \, \widehat{X}_k^- + h_k\right)$$

est appelée **innovation**

Lemme

Le processus $\{I_k\}$ est un processus gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^m$; en particulier I_k est un vecteur aléatoire gaussien

- de moyenne nulle

indépendant de $Z_{0:k-1}$

Processus d'innovation

La quantité

$$I_k = Z_k - \mathbb{E}\left[Z_k | Z_{0:k-1}\right] = Z_k - \Big(H_k\, \widehat{X}_k^- + h_k\Big)$$

est appelée **innovation**

Lemme

Le processus $\{I_k\}$ est un processus gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^m$;
en particulier I_k est un vecteur aléatoire gaussien

- de moyenne nulle
- de matrice de covariance $Q_k^I = H_k\, P_k^-\, H_k^T + Q_k^V$

indépendant de $Z_{0:k-1}$

Filtre de Kalman-Bucy

Théorème

Si la matrice de covariance Q_k^V est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors les processus $\{\widehat{X}\}$ et $\{P_k\}$ sont définis par les équations suivantes

Filtre de Kalman-Bucy

Théorème

Si la matrice de covariance Q_k^V est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors les processus $\{\widehat{X}\}$ et $\{P_k\}$ sont définis par les équations suivantes

Prédiction

$$\begin{aligned} \widehat{X}_k^- &= F_k \, \widehat{X}_{k-1} + f_k \\ P_k^- &= F_k \, P_{k-1} \, F_k^T + Q_k^W \end{aligned}$$

Filtre de Kalman-Bucy

Théorème

Si la matrice de covariance Q_k^V est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors les processus $\{\widehat{X}\}$ et $\{P_k\}$ sont définis par les équations suivantes

Prédiction

$$\begin{aligned} \widehat{X}_k^- &= F_k\,\widehat{X}_{k-1} + f_k \\ P_k^- &= F_k\,P_{k-1}\,F_k^T + Q_k^W \end{aligned}$$

Correction

$$\begin{aligned} \widehat{X}_k &= \widehat{X}_k^- + K_k\,[Z_k - (H_k\,\widehat{X}_k^- + h_k)] \\ P_k &= [I - K_k\,H_k]\;P_k^- \end{aligned}$$

o la matrice $K_k = P_k^-\,H_k^T\,[H_k P_k^- H_k^T + Q_k^V]^{-1}$ est le **gain de Kalman**,

Filtre de Kalman-Bucy

Théorème

Si la matrice de covariance Q^V_k est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors les processus $\{\widehat{X}\}$ et $\{P_k\}$ sont définis par les équations suivantes

Prédiction

$$\begin{array}{rcl} \widehat{X}^-_k & = & F_k\, \widehat{X}_{k-1} \,+\, f_k \\ P^-_k & = & F_k\, P_{k-1}\, F^T_k \,+\, Q^W_k \end{array}$$

Correction

$$\begin{array}{rcl} \widehat{X}_k & = & \widehat{X}^-_k \,+\, K_k\, [Z_k \,-\, (H_k\, \widehat{X}^-_k \,+\, h_k)] \\ P_k & = & [I \,-\, K_k\, H_k]\; P^-_k \end{array}$$

o la matrice $K_k \,=\, P^-_k\, H^T_k\, [H_k P^-_k H^T_k \,+\, Q^V_k]^{-1}$ est le **gain de Kalman**, et avec les initialisations

$$\widehat{X}^-_0 \,=\, \bar{X}_0 \,=\, \mathbb{E}\,[X_0]\;, \quad P^-_0 \,=\, Q^X_0$$

Filtre de Kalman-Bucy : remarques

Filtre de Kalman-Bucy : remarques

- La suite $\{P_k\}$ ne dépend pas ni des observations $\{Z_k\}$, ni des coefficients $\{f_k\}$ et $\{h_k\}$

Filtre de Kalman-Bucy : remarques

- La suite $\{P_k\}$ ne dépend pas ni des observations $\{Z_k\}$, ni des coefficients $\{f_k\}$ et $\{h_k\}$

- Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F_k = F$, $G_k = G$, $H_k = H$, $Q_k^W = Q^W$, et $Q_k^V = Q^V$ alors la suite $\{P_k\}$ peut être pré-calculée

Filtre de Kalman linéarisé

Soit le système non linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_k & = & f_k(X_{k-1}) + g_k(X_{k-1})W_k \\ Z_k & = & h_k(X_k) + V_k \end{array} \right.$$

o, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in \mathbb{R}^p$, $W_k \in \mathbb{R}^d$, $Z_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, et o les fonctions f_k, g_k, h_k définies sur $\mathbb{R}^p$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^{p\times d}$, $\mathbb{R}^m$ respectivement ; de plus

Filtre de Kalman linéarisé

Soit le système non linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_k & = & f_k(X_{k-1}) + g_k(X_{k-1})W_k \\ Z_k & = & h_k(X_k) + V_k \end{array} \right.$$

o, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in \mathbb{R}^p$, $W_k \in \mathbb{R}^d$, $Z_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, et o les fonctions f_k, g_k, h_k définies sur $\mathbb{R}^p$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^{p \times d}$, $\mathbb{R}^m$ respectivement ; de plus

- les fonctions f_k et g_k sont supposées dérivables

Filtre de Kalman linéarisé

Soit le système non linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_k & = & f_k(\, X_{k-1}) \, + \, g_k(X_{k-1})W_k \\ Z_k & = & h_k(X_k) \, + \, V_k \end{array} \right.$$

o, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in \mathbb{R}^p$, $W_k \in \mathbb{R}^d$, $Z_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, et o les fonctions f_k, g_k, h_k définies sur $\mathbb{R}^p$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^{p\times d}$, $\mathbb{R}^m$ respectivement ; de plus

- les fonctions f_k et g_k sont supposées dérivables
- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W

Filtre de Kalman linéarisé

Soit le système non linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_k & = & f_k(\, X_{k-1}) \, + \, g_k(X_{k-1})W_k \\ Z_k & = & h_k(X_k) \, + \, V_k \end{array} \right.$$

o, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in \mathbb{R}^p$, $W_k \in \mathbb{R}^d$, $Z_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, et o les fonctions f_k, g_k, h_k définies sur $\mathbb{R}^p$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^{p \times d}$, $\mathbb{R}^m$ respectivement ; de plus

- les fonctions f_k et g_k sont supposées dérivables
- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V

Filtre de Kalman linéarisé

Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} X_k &= f_k(X_{k-1}) + g_k(X_{k-1})W_k \\ Z_k &= h_k(X_k) + V_k \end{cases}$$

o, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k \in \mathbb{R}^p$, $W_k \in \mathbb{R}^d$, $Z_k, V_k \in \mathbb{R}^m$, et o les fonctions f_k, g_k, h_k définies sur $\mathbb{R}^p$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^{p\times d}$, $\mathbb{R}^m$ respectivement ; de plus

- les fonctions f_k et g_k sont supposées dérivables
- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^W
- le bruit $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q_k^V
- Les bruits $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants

Filtre de Kalman linéarisé

Soit une suite déterministe $\{\bar{x}_k\}$ dans $\mathbb{R}^p$, solution approchée du système, appelée **trajectoire nominale**.

La linéarisation consiste à

- linéariser f_k et g_k autour de $\bar{x}_{k-1}$ i.e

  $f_k(x) \simeq f_k(\bar{x}_{k-1}) + f'_k(\bar{x}_{k-1})(x - \bar{x}_{k-1})$ et
  $g_k(x) \simeq g_k(\bar{x}_{k-1})$
- linéariser h_k autour de $\bar{x}_k$ i.e

  $h_k(x) \simeq h_k(\bar{x}_{k-1}) + h'_k(\bar{x}_{k-1})(x - \bar{x}_{k-1})$

Filtre de Kalman linéarisé

Le système linéarisé obtenu est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_k & = & F_k(X_{k-1} - \bar{x}_{k-1}) + f_k + G_k W_k \\ Z_k & = & H_k(X_k - \bar{x}_k) + h_k + V_k \end{array} \right.$$

o $F_k \stackrel{\triangle}{=} f'_k(\bar{x}_{k-1})$, $f_k \stackrel{\triangle}{=} f_k(\bar{x}_{k-1})$, $G_k \stackrel{\triangle}{=} g_k(\bar{x}_{k-1})$, $H_k \stackrel{\triangle}{=} h'_k(\bar{x}_k)$ et $h_k \stackrel{\triangle}{=} h_k(\bar{x}_k)$

Filtre de Kalman linéarisé

Théorème

Prédiction

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_k^- &= f_k(\widehat{X}_{k-1}) \\
P_k^- &= F_k\, P_{k-1}\, F_k^T + G_k Q_k^W G_k^T
\end{aligned}$$

Correction

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_k &= \widehat{X}_k^- + K_k\,[Z_k - h_k(\widehat{X}_k^-)] \\
P_k &= [I - K_k\, H_k]\; P_k^-
\end{aligned}$$

o la matrice $K_k = P_k^-\, H_k^T\, [H_k P_k^- H_k^T + Q_k^V]^{-1}$ est le **gain de Kalman**,

Filtre de Kalman linéarisé

Théorème

Prédiction

$$\begin{array}{lcl} \widehat{X}_k^- & = & f_k(\widehat{X}_{k-1}) \\ P_k^- & = & F_k\, P_{k-1}\, F_k^T \,+\, G_k Q_k^W G_k^T \end{array}$$

Correction

$$\begin{array}{lcl} \widehat{X}_k & = & \widehat{X}_k^- \,+\, K_k\, [Z_k \,-\, h_k(\widehat{X}_k^-)] \\ P_k & = & [I \,-\, K_k\, H_k]\, P_k^- \end{array}$$

o la matrice $K_k \,=\, P_k^-\, H_k^T\, [H_k P_k^-\, H_k^T \,+\, Q_k^V]^{-1}$ est le **gain de Kalman**, et avec les initialisations telle que la loi gaussienne de moyenne $\widehat{X}_0^-$ et de matrice de covariance P_0^- soit une bonne approximation de celle de X_0

Filtre de Kalman étendu ("Extended Kalman filter")

La trajectoire nominale est ici remplacée par l'estimateur courant de X_k compte-tenu des observations disponibles à l'instant $k-1$.

La linéarisation consiste à

- linéariser f_k et g_k autour de $\widehat{X}_{k-1}$ i.e
  $f_k(x) \simeq f_k(\widehat{X}_{k-1}) + f_k'(\widehat{X}_{k-1})(x - \widehat{X}_{k-1})$ et
  $g_k(x) \simeq g_k(\widehat{X}_{k-1})$
- linéariser h_k autour de $\widehat{X}_k^-$ i.e
  $h_k(x) \simeq h_k(\widehat{X}_k^-) + h_k'(\widehat{X}_k^-)(x - \widehat{X}_k^-)$

Filtre de Kalman étendu

Le système linéarisé obtenu est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_k & = & F_k(X_{k-1} - \widehat{X}_{k-1}) + f_k + G_k W_k \\ Z_k & = & H_k(X_k - \widehat{X}_{k-1}) + h_k + V_k \end{array} \right.$$

o $F_k \stackrel{\triangle}{=} f'_k(\widehat{X}_{k-1})$, $f_k \stackrel{\triangle}{=} f_k(\widehat{X}_{k-1})$, $G_k \stackrel{\triangle}{=} g_k(\widehat{X}_{k-1})$, $H_k \stackrel{\triangle}{=} h'_k(\widehat{X}_k^-)$
et $h_k \stackrel{\triangle}{=} h_k(\widehat{X}_k^-)$

Filtre de Kalman étendu

Théorème

Prédiction

$$\begin{array}{rcl} \widehat{X}_k^- & = & f_k(\widehat{X}_{k-1}) \\ P_k^- & = & F_k\, P_{k-1}\, F_k^T \; + \; G_k Q_k^W G_k^T \end{array}$$

Correction

$$\begin{array}{rcl} \widehat{X}_k & = & \widehat{X}_k^- \; + \; K_k \, [Z_k \; - \; h_k(\widehat{X}_k^-)] \\ P_k & = & [I \; - \; K_k \, H_k] \; P_k^- \end{array}$$

o la matrice $K_k \; = \; P_k^- \; H_k^T \, [H_k P_k^- H_k^T \; + \; Q_k^V]^{-1}$ et avec $F_k \triangleq f'_k(\widehat{X}_{k-1})$, $G_k \triangleq g_k(\widehat{X}_{k-1})$, et $H_k \triangleq h'_k(\widehat{X}_k^-)$

Présentation

Cette présentation a été réalisée à l'aide de la classe beamer complétée par le laboratoire de mathématiques appliqués de l'université de technologie de Compiègne

http://www.lmac.utc.fr/outils

Bibliographie

J.-Y. Ouvrard
Probabilités.
(2 tomes) Cassini, 2004

Bibliographie

J.-Y. Ouvrard
Probabilités.
(2 tomes) Cassini, 2004

G. Blanchet and M. Charbit
Signaux et images sous MatLab.
2nd édition, Hermès, 2001

Bibliographie

- J.-Y. Ouvrard
  Probabilités.
  (2 tomes) Cassini, 2004
- G. Blanchet and M. Charbit
  Signaux et images sous MatLab.
  2nd édition, Hermès, 2001
- M. Labarrère and J.-P. Krief and B. Gimonet
  Le filtrage et ses applications.
  3e édition, Cépaduès éditions, 1995

Bibliographie

J.-Y. Ouvrard
Probabilités.
(2 tomes) Cassini, 2004

G. Blanchet and M. Charbit
Signaux et images sous MatLab.
2nd édition, Hermès, 2001

M. Labarrère and J.-P. Krief and B. Gimonet
Le filtrage et ses applications.
3e édition, Cépaduès éditions, 1995

Bibliographie (suite)

A. Papoulis and S. Unnikrishna Pillai
Probability, Random Variables and Stochastic Processes.
4th edition, Mac Graw Hill, 2002

Bibliographie (suite)

A. Papoulis and S. Unnikrishna Pillai
Probability, Random Variables and Stochastic Processes.
4th edition, Mac Graw Hill, 2002

P. S. Maybeck
Stochastic Models, Estimation and Control.
Volume 141-1, Mathematics in Science and Engineering, reprint

Bibliographie (suite)

A. Papoulis and S. Unnikrishna Pillai
Probability, Random Variables and Stochastic Processes.
4th edition, Mac Graw Hill, 2002

P. S. Maybeck
Stochastic Models, Estimation and Control.
Volume 141-1, Mathematics in Science and Engineering, reprint

Articles et sites sur le filtre de Kalman

F. LeGland
Introduction au Filtrage en Temps Discret.
Polycopié de cours ; Master recherche Signal, Télecommunication, Images
Université de Rennes I ; 2005-06.
http://www.irisa.fr/aspi/legland/ens.hml

Articles et sites sur le filtre de Kalman

F. LeGland
Introduction au Filtrage en Temps Discret.
Polycopié de cours ; Master recherche Signal, Télecommunication, Images
Université de Rennes I ; 2005-06.
http://www.irisa.fr/aspi/legland/ens.hml

Articles et sites sur le filtre de Kalman

D. Alazard
Introduction au Filtrage de Kalman.
Polycopié de cours ; Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace ; 2005.
http://personnel.supaero.fr/alazard-daniel/

Articles et sites sur le filtre de Kalman

D. Alazard
Introduction au Filtrage de Kalman.
Polycopié de cours ; Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace ; 2005.
http://personnel.supaero.fr/alazard-daniel/

Articles et sites sur le filtre de Kalman

G Welch and G. Bishop
The Kalman Filter.
http://www.cs.unc.edu/∽welch/kalman

Articles et sites sur le filtre de Kalman

G Welch and G. Bishop
The Kalman Filter.
http://www.cs.unc.edu/∼welch/kalman