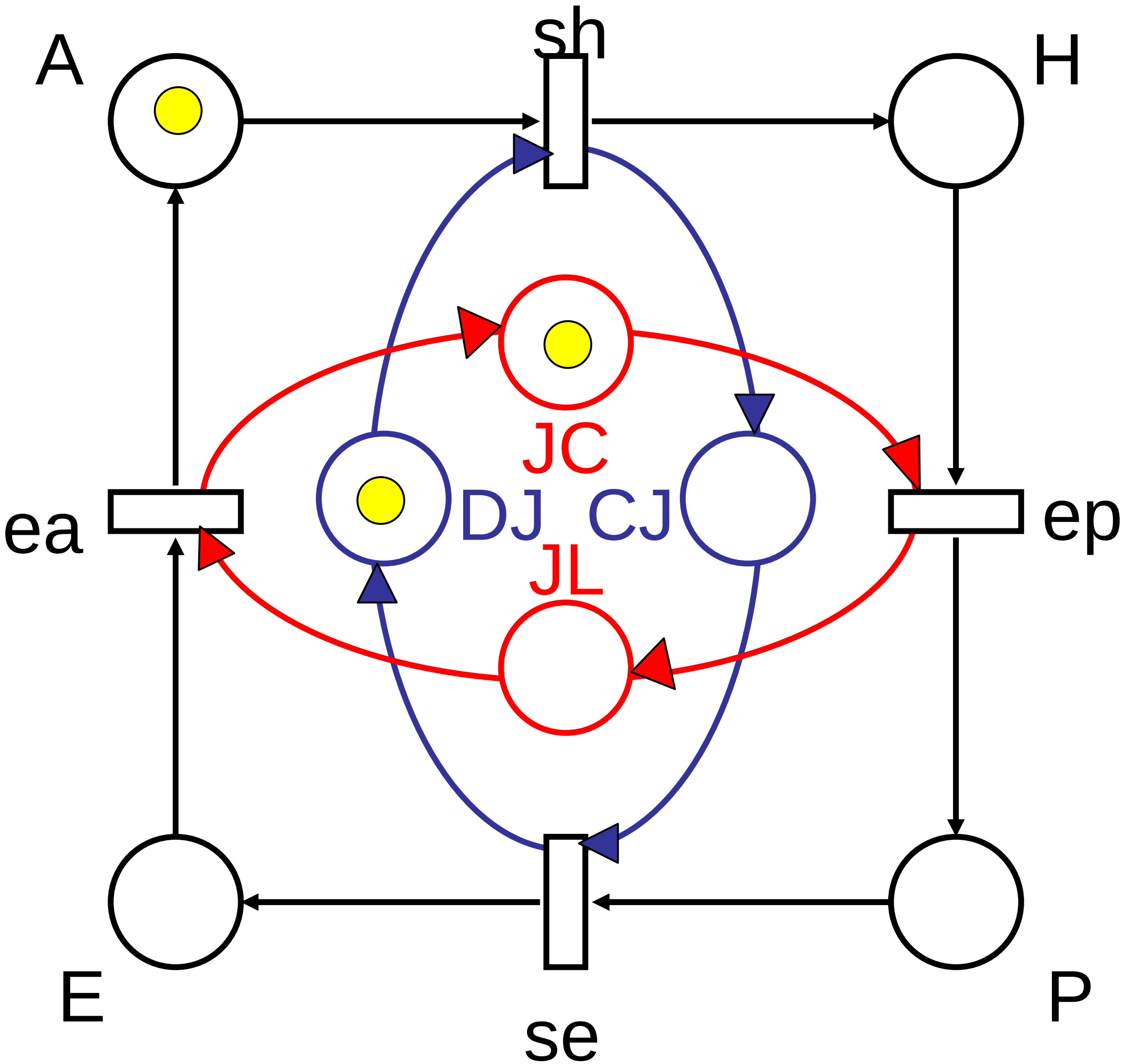
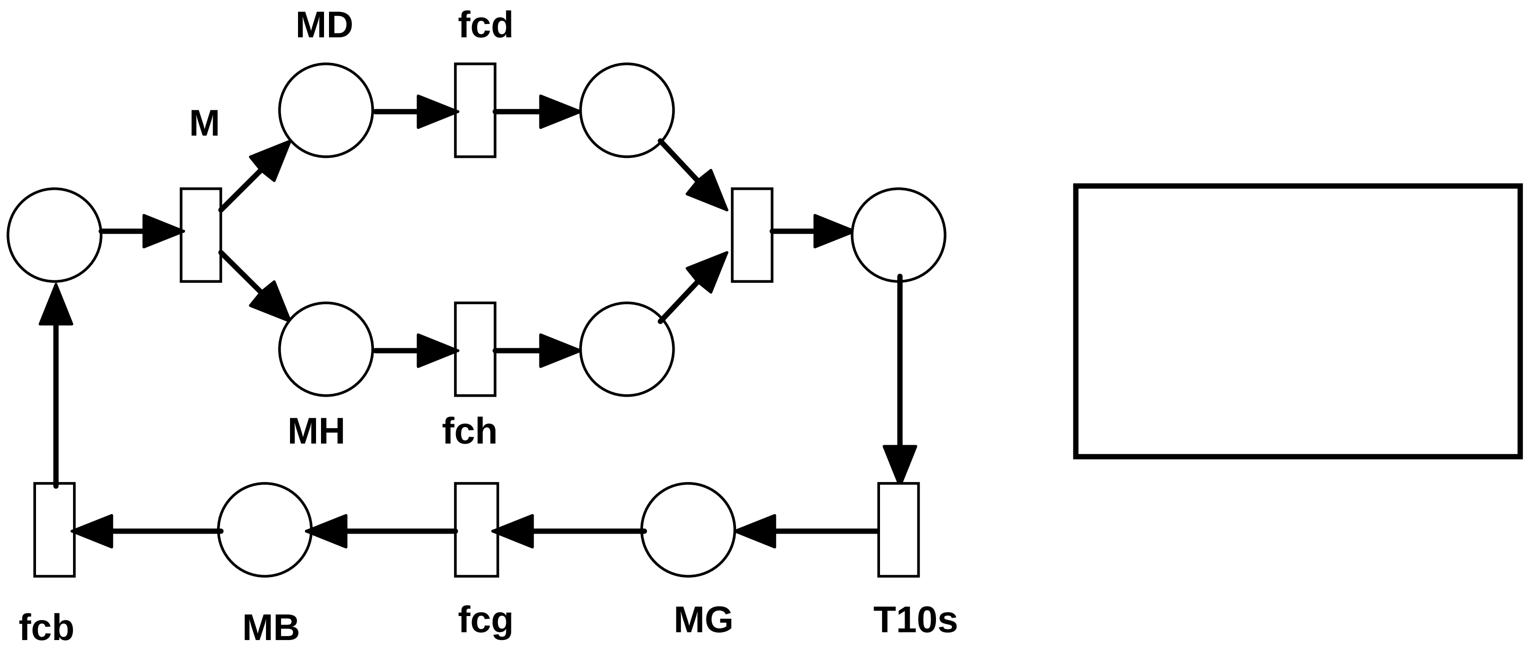
Réseaux de Petri

Les 4 Saisons



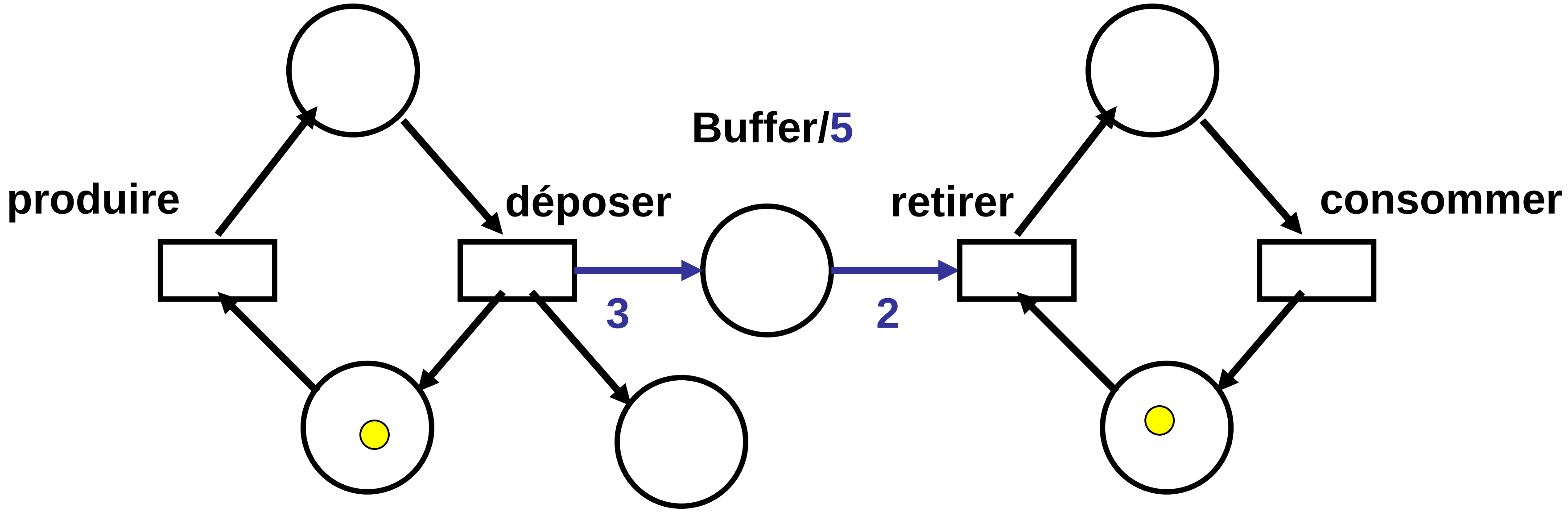
Automatisme 1



Définitions de base

- Un réseau (net) est un triplet $N=<P,T;F>$
  - P ensemble non vide de p-élements
  - T ensemble non vide de t-éléments
  - F relation de flot sur N: $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
- Ensembles utiles
  - Preset $x \in P \cup T : \; {}^{\circ}x = \{y \in P \cup T \mid yFx\}$
  - Postset $x \in P \cup T : \; x^{\circ} = \{y \in P \cup T \mid yFx\}$

Réseaux Place/Transition



P/T nets

- Un réseau de places et transitions est un 4-uplet $N=<P,T;pre,post>$
  - P ensemble non vide de places
  - T ensemble non vide de transitions
  - $pre,post$: $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ poids (*weight*)
    - $pre(p,t) > 0$ pour un arc entrant sur t
    - $post(p,t) > 0$ pour un arc sortant de t
- Marquage
  - Un marquage est une application $M : P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\omega\}$
- Réseau marqué
  - Un réseau marqué $R=<N;M_0>$
  - $M_0:P \rightarrow \mathbb{N}$ est le marquage initial

Règles d'évolutions

- Une transition *t* est validée pour *M* ssi

$$\forall p \in {}^{\circ}t : M(p) \geq pre(p,t)$$

On note $M \xrightarrow{t}$

- Une transition *t* validée pour *M* peut être franchie. Son franchissement (*firing*) conduit au marquage *M'* tel que

$$\forall p : M'(p) = M(p) - pre(p,t) + post(p,t)$$

On note $M \xrightarrow{t} M'$

Marquages accessibles

- Ensemble des marquages accessibles (*accessibility set*) *A(R)=A(N;M)* est le plus petit ensemble tel que :

$$1)\ M \in A(N;M)$$

$$2)\ \text{si } M' \in A(N;M) \wedge \exists t : M' \xrightarrow{t} M'' \text{ alors } M'' \in A(N;M)$$

- Graphe des marquages accessibles GMA(R) est un graphe fini

$$GMA(N;M) = \langle \mathcal{V}, \mathcal{A} \rangle$$

$$\mathcal{V} = A(R) \text{ est l'ensemble des sommets}$$

$$\mathcal{A} = \left\{ \langle M, t, M' \rangle \mid M \xrightarrow{t} M' \right\} \text{ est l'ensemble des arcs}$$

Séquences de franchissements

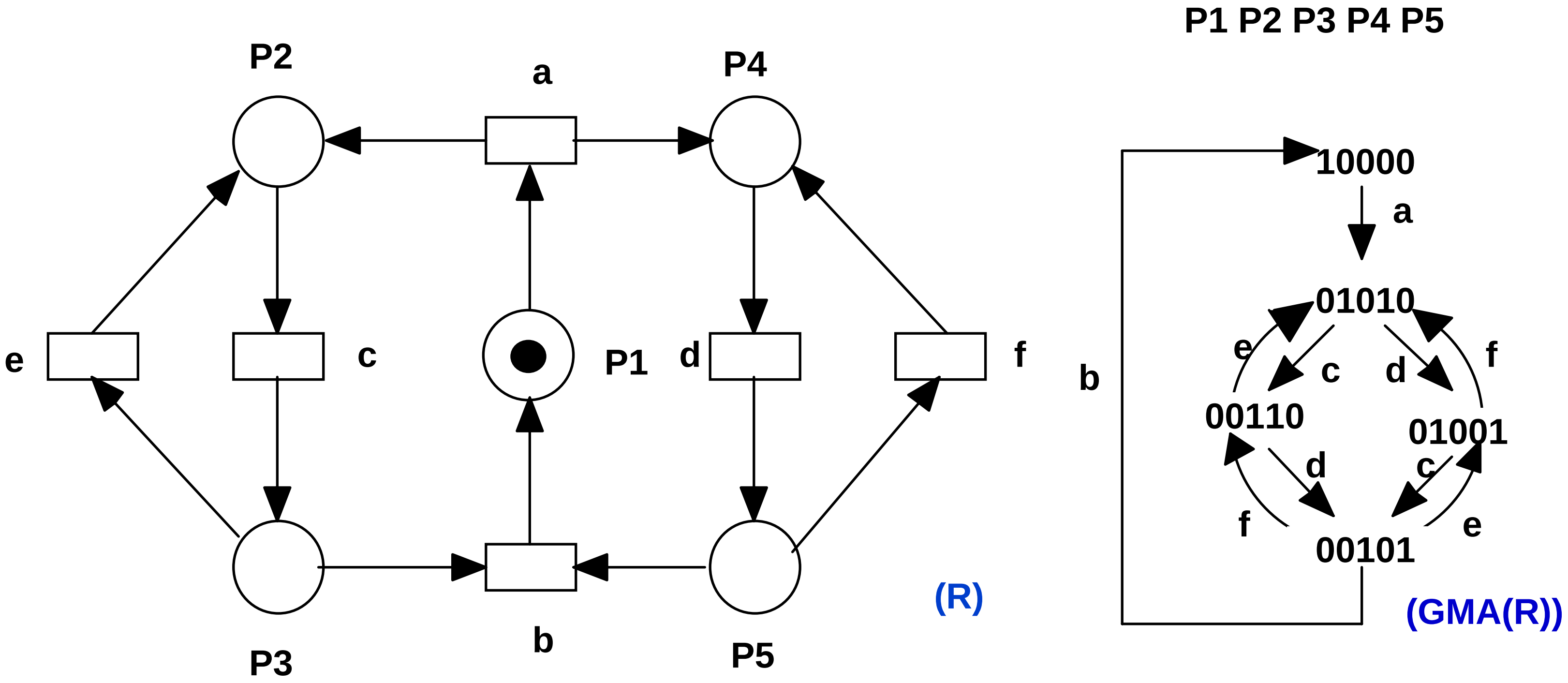
- L'ensemble des séquences de franchissements du réseau marqué *R*, noté *SEQ(R)* est le plus petit sous-ensemble de *T** tel que

$$1)\ \lambda \in SEQ(R) \wedge M \xrightarrow{\lambda} M$$

$$2)\ t \in SEQ(R) \text{ si } \exists M' : M \xrightarrow{t} M'$$

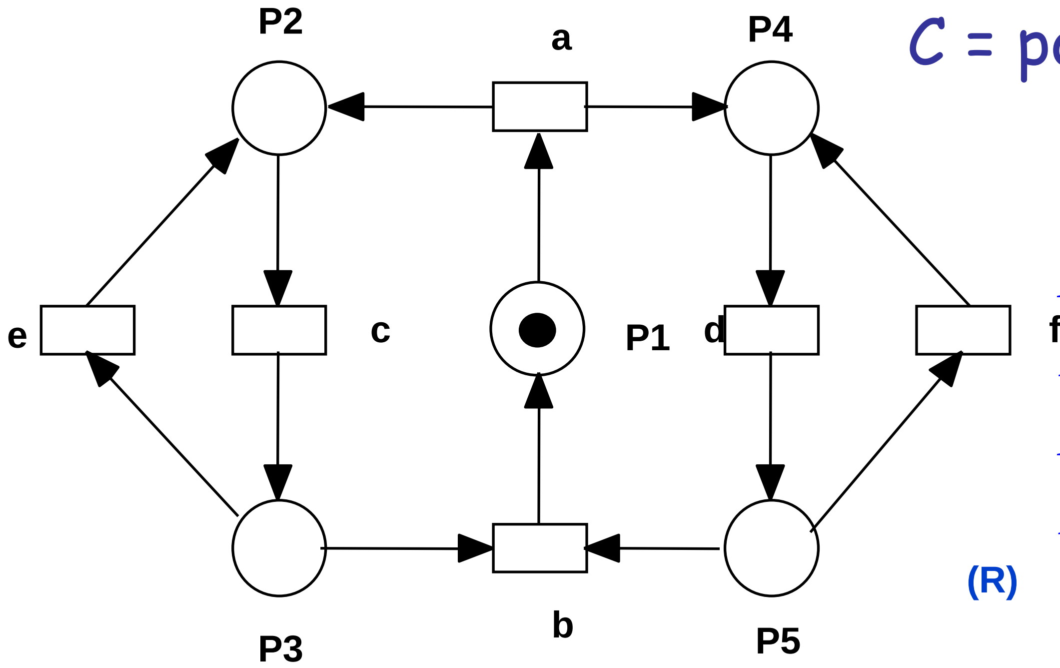
$$3)\ s \bullet t \in SEQ(R) \text{ si } s \in SEQ(R) \wedge \exists M', \exists M'' : M \xrightarrow{s} M' \wedge M' \xrightarrow{t} M''$$

Exemple



P2
a
P4
e
c
P1
d
f
P3
b
P5
(R)
P1 P2 P3 P4 P5
10000
a
01010
e
c
d
f
b
00110
01001
d
c
f
e
00101
(GMA(R))

Représentation matricielle



C = post - pre

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
\hline
P1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
P2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
P3 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
P4 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
P5 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1
\end{array}
$$

Fonction de transition

$$M \xrightarrow{t} M'$$

$$\underline{M} \geq pre \times \underline{t} \qquad \text{(validation)}$$

$$\underline{M}' = \underline{M} + C \times \underline{t}$$

Propriété des marquages

- Couverture: *M* couvre *M'* ssi $\forall p \in P : M(p) \geq M'(p)$
  – Si ni *M* couvre *M'* ni *M'* couvre *M* alors *M* et *M'* sont dits incomparables
- Place bornée: *p* est bornée dans *R* ssi

$$\left(\exists k \in \mathbb{N}\right)\left(\forall M' \in A(R)\right) : M'(p) \leq k$$

- Sous ensemble *P'* de places borné ssi

$$\left(\forall p \in P'\right)\ p \text{ est borné dans } R$$

- Le réseau marqué *R* est borné ssi *P* est borné dans *R*.
- Un réseau borné par 1 est dit réseau binaire (*safe net*)

Propriétés des franchissements

- Séquence répétitive: $s \in T^*$ est répétitive dans R ssi $M \xrightarrow{s} \Rightarrow M \xrightarrow{s^*}$
- Quasi-vivacité: t est quasi-vivante pour M dans $<N;M>$ ssi

$$\left(\exists s \in SEQ(< N;M >)\right)\left(\exists M' \in A(R)\right): M \xrightarrow{s} M' \wedge M' \xrightarrow{t}$$

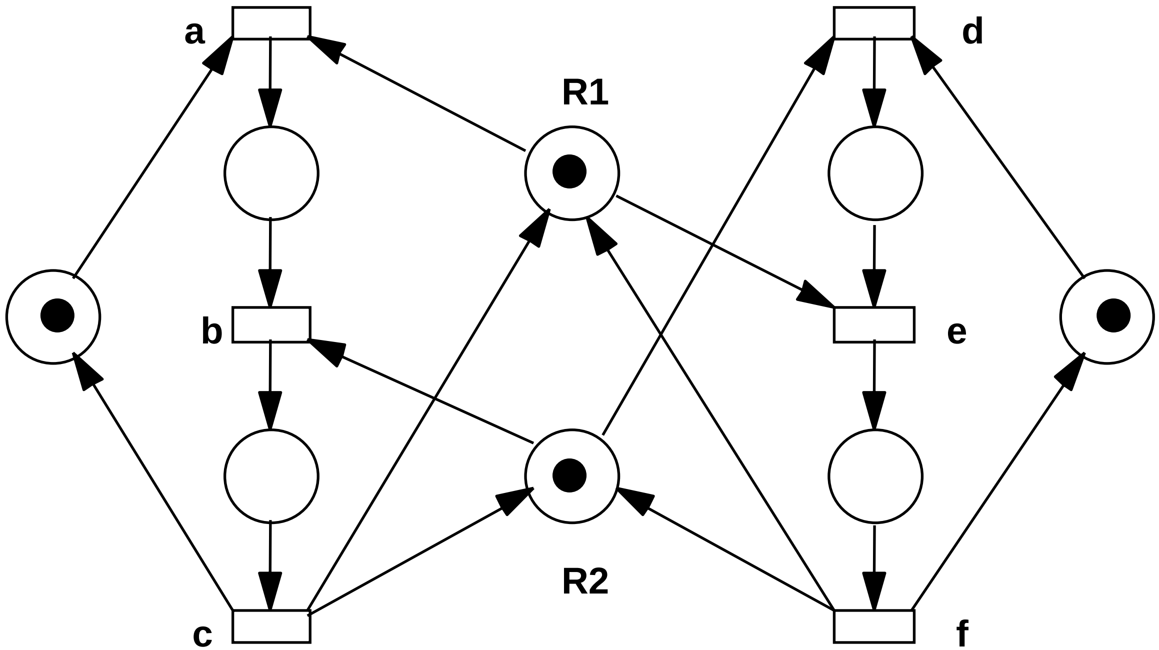
- Vivacité: t est vivante dans R=$<N;M>$ ssi

$$\left(\forall M' \in A(R)\right): \ t \text{ est quasi-vivante pour } M' \text{ dans } < N;M' >$$

- R est vivant ssi toutes les transitions sont vivantes dans R
- Blocage (*deadlock*):

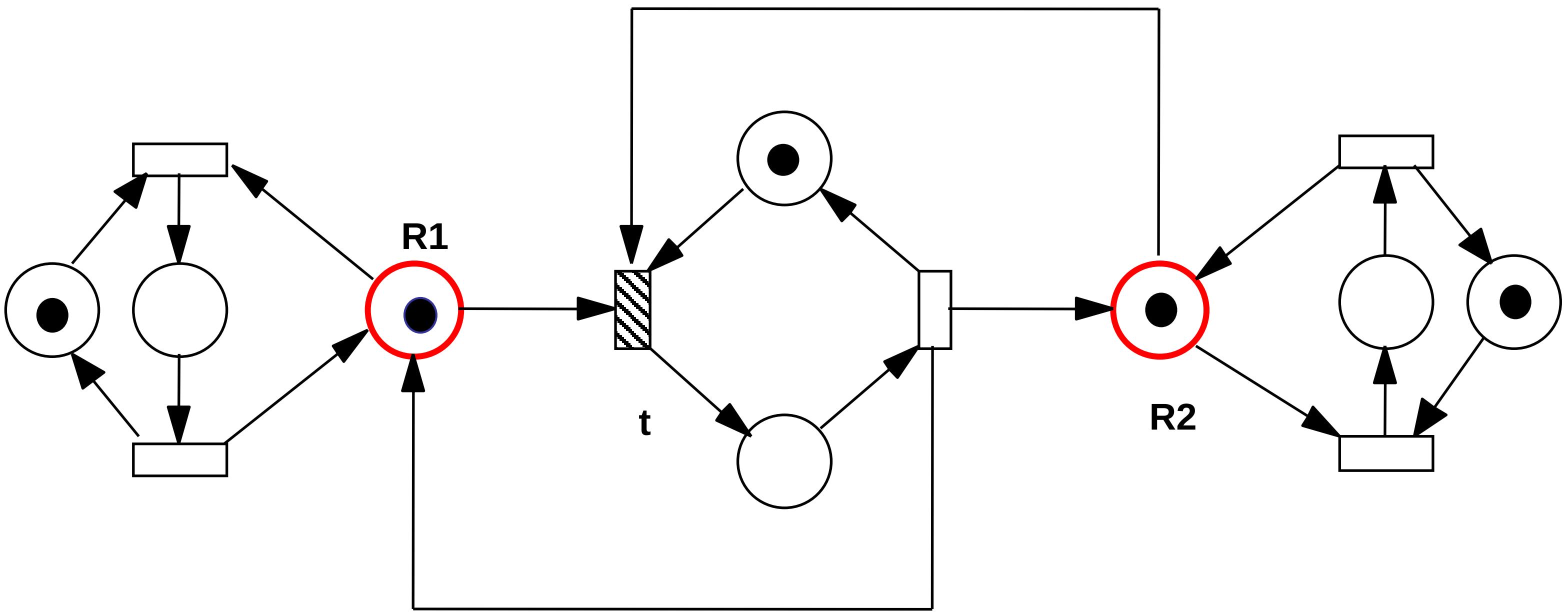
$$M \text{ est un blocage ssi } \left(\forall t \in T\right)\neg\left(M \xrightarrow{t}\right)$$

Blocage (Deadlock)



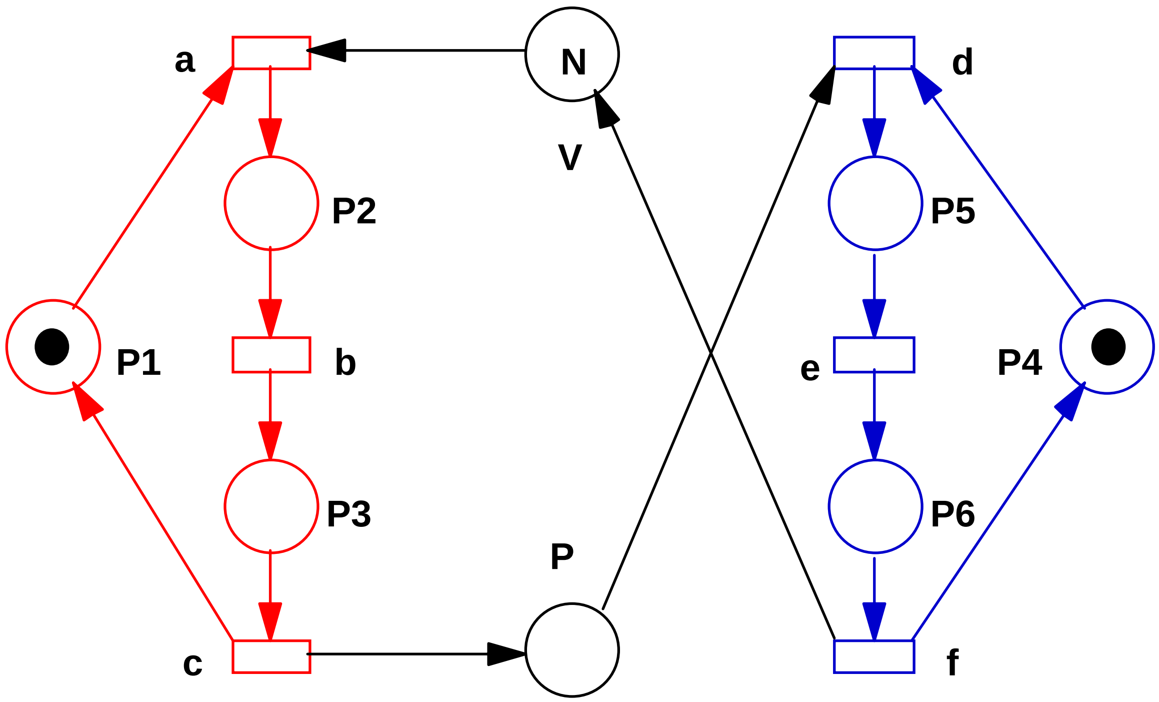
État initial

Famine



État initial

Producteur/Consommateur



Charles André - Université de Nice Sophia Antipolis

Prod/Consom (2)

$$
C = \begin{array}{c|cccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
P1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
P2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
P3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
P4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
P5 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
P6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
P & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
V & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Prod/Consom (2)

$$F^T \times C = \underline{0} \quad \text{avec } F \in \mathbb{Z}^8$$

$$F = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \\ x7 \\ x8 \end{bmatrix}$$

$$-x1 + x2 - x8 = 0$$
$$+x2 - x3 = 0$$
$$+x1 - x3 + x7 = 0$$
$$-x4 + x5 - x7 = 0$$
$$-x5 + x6 = 0$$
$$+x4 - x6 + x8 = 0$$

Prod/Consom (3)

$$-x1 + x2 - x8 = 0$$

$$+x2 - x3 = 0$$

$$+x1 - x3 + x7 = 0$$

$$x7 = x8 = \gamma$$

$$x2 = x3 = \alpha$$

$$-x4 + x5 - x7 = 0$$

$$-x5 + x6 = 0$$

$$+x4 - x6 + x8 = 0$$

$$x7 = x8$$

$$x5 = x6 = \beta$$

Prod/Consom (4)

$$F = \begin{bmatrix} \alpha - \gamma \\ \alpha \\ \alpha \\ \beta - \gamma \\ \beta \\ \beta \\ \gamma \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Prod/Consom (4)

$$F = \begin{bmatrix} \alpha - \gamma \\ \alpha \\ \alpha \\ \beta - \gamma \\ \beta \\ \beta \\ \gamma \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prod/Consom (4)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} f1 & f2 & f3 \end{bmatrix}$$