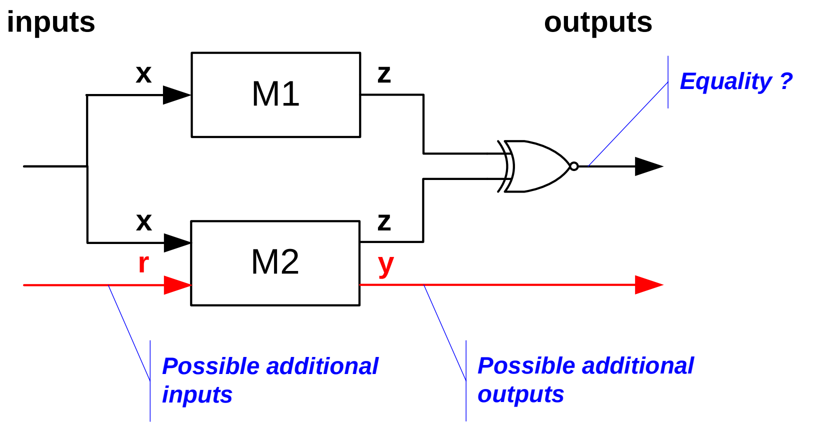
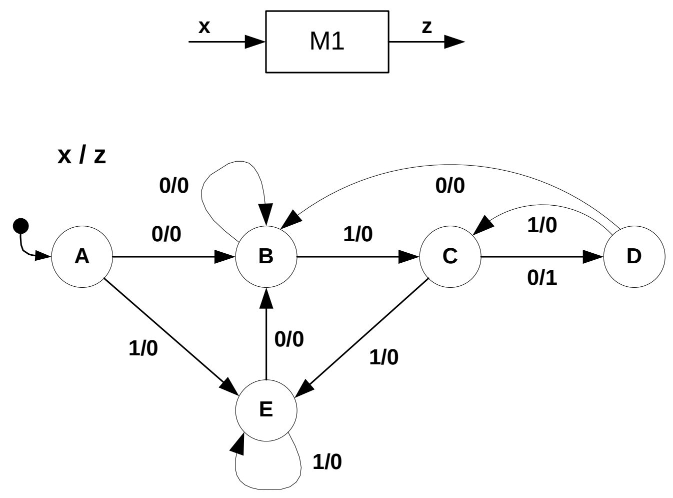
Simulation - Equivalence

de Machines Séquentielles

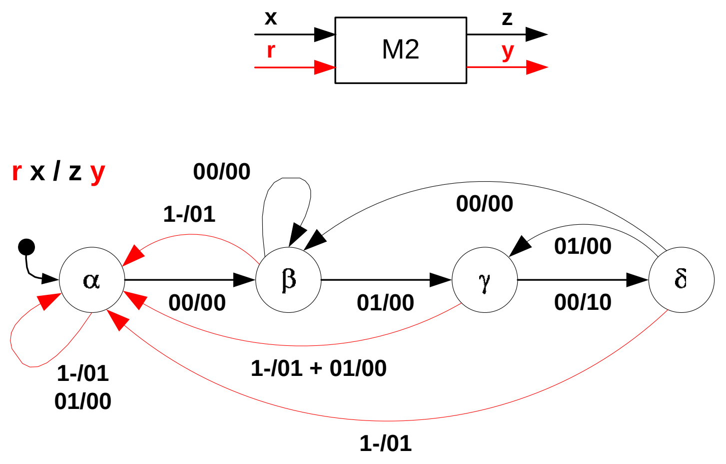
Comparaison de Comportements



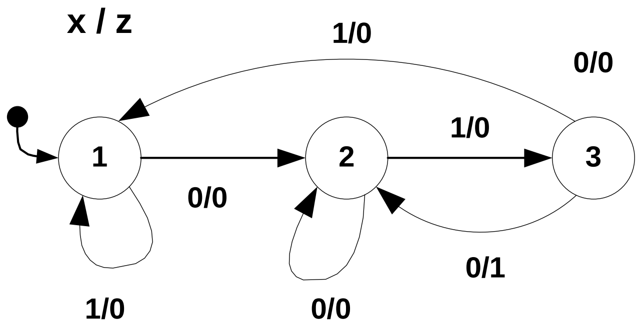
Exemple : M1



Exemple : M2



Exemple : M3



5

Charles André - Université de Nice-Sophia Antipolis

Simulation

Deux machines de MEALY complètement spécifiées

$$M_1 = (\mathcal{X}_1, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Y}_1, s_1^0, \delta_1, \omega_1) \text{ et } M_2 = (\mathcal{X}_2, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Y}_2, s_2^0, \delta_2, \omega_2)$$

$$\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2 \text{ et } \mathcal{Z}_1 \subseteq \mathcal{Z}_2$$

Des entrées et des sorties en commun

$s_1^0 \in \mathcal{Y}_1, s_2^0 \in \mathcal{Y}_2$ États initiaux

$R \subseteq Y_1 \times Y_2$ Une relation entre les ensembles d'états

6

Charles André - Université de Nice-Sophia Antipolis

Simulation (2)

R est une simulation de M_1 vers M_2

(ou M_2 simule M_1 noté $M_1 \prec M_2$)

Les états initiaux sont dans la relation R

1) $(s_1^0, s_2^0) \in R$

2) $(\forall p_1 \in \mathcal{Y}_1, \forall p_2 \in \mathcal{Y}_2)(p_1, p_2) \in R \Rightarrow$

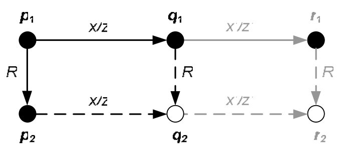
$\forall x \in \mathcal{X}_1, \forall z \in \mathcal{Z}_1, \forall q_1 \in \mathcal{Y}_1$

Tout ce que M_1 peut faire

$\left(p_1 \xrightarrow{x/z}_{M_1} q_1\right) \Rightarrow (\exists q_2 \in \mathcal{Y}_2)$

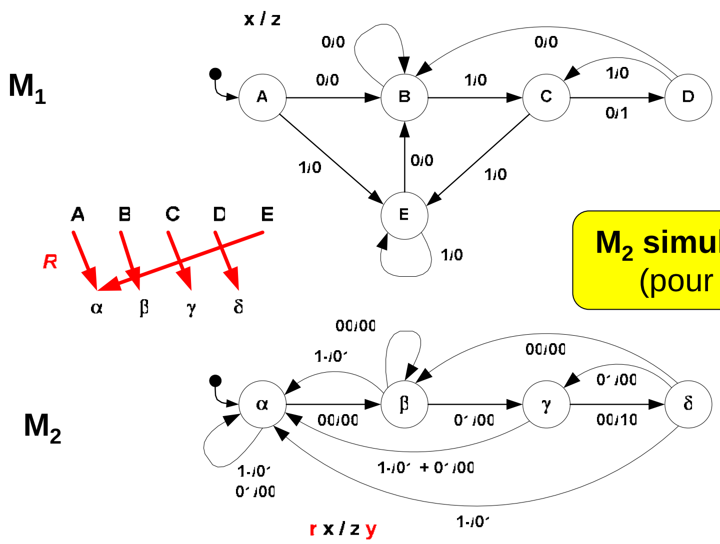
$\left(\left(p_2 \xrightarrow{x/z}_{M_2} q_2\right) \wedge ((q_1, q_2) \in R)\right)$

M_2 peut le faire



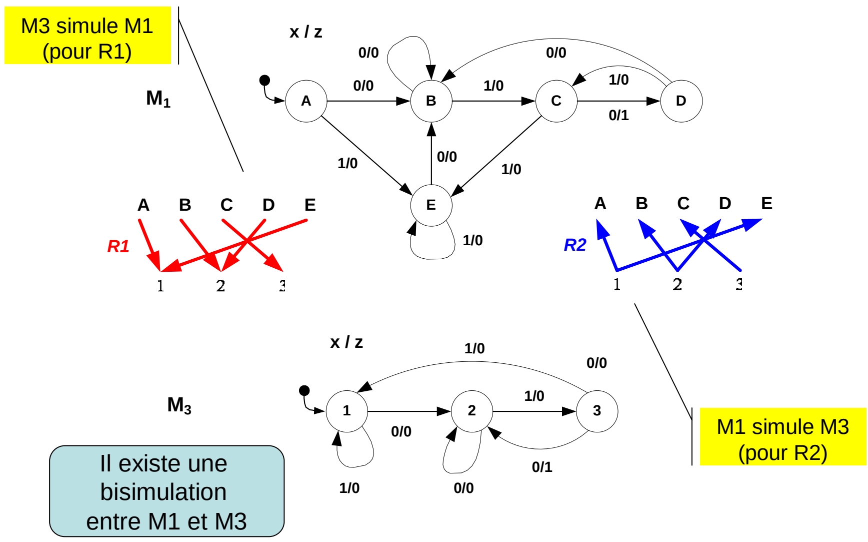
S'étend aux séquences par induction

Simulation (3)

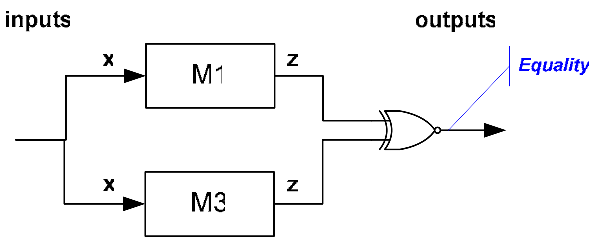


M_2 simule M_1
(pour R)

Bi Simulation



Equivalence



$$(\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2) \wedge (\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2)$$

Equivalence (2)

- Etats indistinguables

$p \in \mathcal{Y}_1, q \in \mathcal{Y}_2$

$p \equiv_I q$ (p et q sont indistiguables) ssi

$\left(\forall x \in \mathcal{X}^+\right) \omega^+(p,x) = \omega^+(q,x)$

Pour toute séquence d'entrée x on a les mêmes séquences de sortie

- Machines équivalents

$M_1 \equiv_I M_2$ (M_1 et M_2 sont équivalentes) ssi

1) $\forall p \in \mathcal{Y}_1, \exists q \in \mathcal{Y}_2 : p \equiv_I q$

2) $\forall q \in \mathcal{Y}_2, \exists p \in \mathcal{Y}_1 : p \equiv_I q$

Extension aux machines

Equivalence (3)

- M_1 et M_3 sont équivalentes
- M_3 a moins d'états (3) que M_1 (5). On dit que M_3 est une réduction de M_1.
- Problème : parmi toutes les machines équivalentes, trouver la machine minimale.
- Pour les machines complètement spécifiées il existe des algorithmes pour trouver la machine minimale équivalente à une machine donnée.

Recherche des états indistinguables

Théorème

Soit $M = (\mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y}, s^0, \delta, \omega)$

$p \equiv_I q$ ssi $(\forall x \in \mathcal{X})$

1) $\omega(p,x) = \omega(q,x)$

2) $\delta(p,x) \equiv_I \delta(q,x)$

Noter que dans la définition il y avait des séquences, ici il y a de simples entrées

Les sorties sont les mêmes

Les états successeurs sont indistinguables

Minimisation à partir de tables

- 1°) Si deux lignes sont identiques (l et m), supprimer la ligne m et substituer l à m dans toutes les autres lignes.
- 2°) Appliquer un algorithme de minimisation

Exemple de M_1

Etats \ Entrées	0	1
A	B/0	E/0
B	B/0	C/0
C	D/1	E/0
D	B/0	C/0
E	B/0	E/0

Minimisation à partir de tables

- 1°) Si deux lignes sont identiques (l et m), supprimer la ligne m et substituer l à m dans toutes les autres lignes.
- 2°) Appliquer un algorithme de minimisation

Exemple de M_1

Lignes

A=E

B=D

Etats \ Entrées	0	1
A	B/0	E/0
B	B/0	C/0
C	D/1	E/0
D	B/0	C/0
E	B/0	E/0

	0	1
A	B/0	E/0
B	B/0	C/0
C	D/1	E/0
D	B/0	C/0
E	B/0	E/0

Minimisation à partir de tables

- 1°) Si deux lignes sont identiques (l et m), supprimer la ligne m et substituer l à m dans toutes les autres lignes.
- 2°) Appliquer un algorithme de minimisation

Exemple de M_1

Après substitution on obtient une machine à 3 états (qui est M_3)

Etats \ Entrées	0	1
A	B/0	E/0
B	B/0	C/0
C	D/1	E/0
D	B/0	C/0
E	B/0	E/0

	0	1
A	B/0	E/0
B	B/0	C/0
C	D/1	E/0
D	B/0	C/0
E	B/0	E/0

	0	1
A	B/0	A/0
B	B/0	C/0
C	B/1	A/0

Huffman - Mealy

- Objectif : partitionner l'espace d'états de façon à ce que les classes de la partition soient les classes d'équivalence d'indistinguabilité

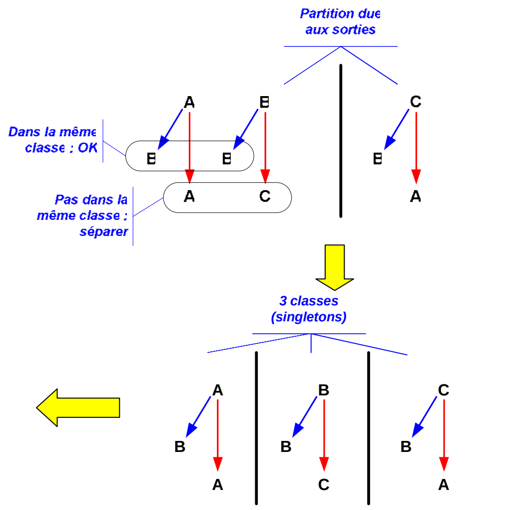
$$(\forall p,q \in \mathcal{Y})(\forall x \in \mathcal{X})\left(p \triangleq q\right) \Rightarrow$$

$$1 \text{ - } \omega(p,x) = \omega(q,x)$$ Mêmes sorties

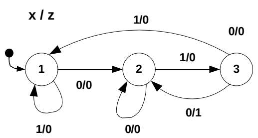
$$2 \text{ - } \delta(p,x) \triangleq \delta(q,x)$$ États suivants dans la même classe

Huffman appliqué à M1

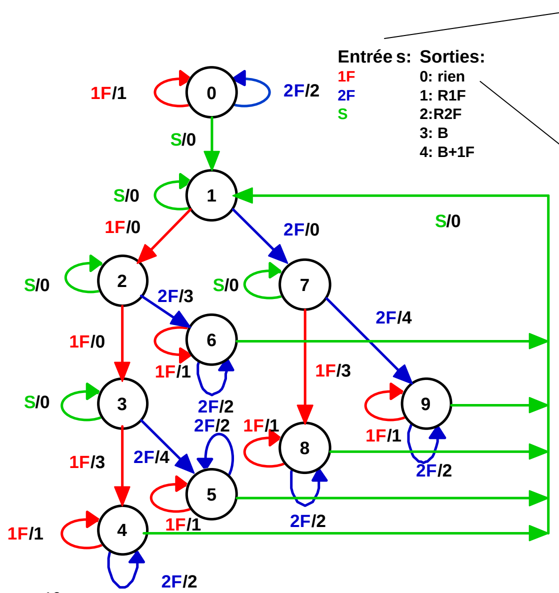
	0	1
A	B/0	A/0
B	B/0	C/0
C	B/1	A/0



Classe	Etats
1	{A}
2	{B}
3	{C}



Exemple : Distributeur de boissons



1F: insérer une pièce de 1
2F: insérer une pièce de 2
S: sélectionner la boisson

1: retourne 1F
2: retourne 2F
3: donne la boisson
4: donne la boisson et retourne 1F

Trouver la machine minimale équivalente

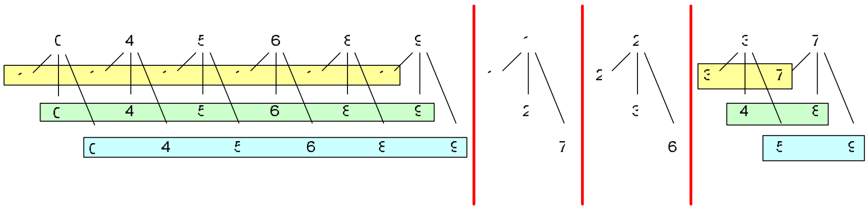
Table états suivants/sorties

Première partition due aux sorties :

{0,4,5,6,8,9}
{1}
{2}
{3,7}

Y \ X	S	1F	2F
0	1/0	0/1	0/2
1	1/0	2/0	7/0
2	2/0	3/0	6/3
3	3/0	4/3	5/4
4	1/0	4/1	4/2
5	1/0	5/1	5/2
6	1/0	6/1	6/2
7	7/0	8/3	9/4
8	1/0	8/1	8/2
9	1/0	9/1	9/2

Etude des successeurs



OK : donc 4 classes

Machine minimale

classes

Table de la machine minimale

Graphe de la machine minimale

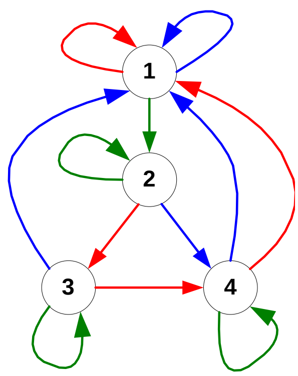
{0,4,5,6,8,9}

{1}

{2}

{3,7}

	S	1F	2F
1	2/0	1/1	1/2
2	2/0	3/0	4/0
3	3/0	4/0	1/3
4	4/0	1/3	1/4



Algorithme des Paires Compatibles

1. Éliminer les lignes identiques et substituer les noms de celles supprimées par celui de celles conservées.
2. Construire la table d'implications :

   si $(\exists a \in \mathcal{X})\, \omega(p,a) \neq \omega(q,a)$

   alors barrer la case (p,q)

   sinon mettre dans la case (p,q) les paires impliquées :

   $$(r,s) \in \mathcal{Y}^2 : (r \neq s) \wedge (\exists a \in \mathcal{X} \colon \delta(p,a) = r \wedge \delta(q,a) = s)$$
3. Itérations :

   Fini := vrai

   pour toutes les cases (p,q) non vides faire

   si (r,s) est dans la case (p,q) et si la case (r,s) est barrée

   alors barrer la case (p,q); Fini := faux

   fait

   si Fini alors aller à 4 sinon aller à 3
4. Résultat : Les cases non barrées correspondent aux paires indistinguables.

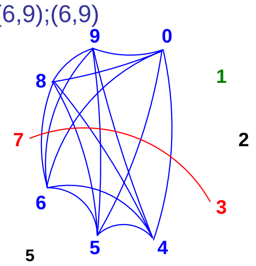
Table d'implication

Paires indistinguables :

(0,4);(0,5);(0,6);(0,8);(0,9);(3,7);(4,5);(4,6);

(4,8);(4,9);(5,6);(5,8);(5,9);(6,8);(6,9);(6,9)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	✗								
2	✗	✗							
3	✗	✗	✗						
4		✗	✗	✗					
5		✗	✗	✗					
6		✗	✗	✗					
7	✗	✗	✗	(4,8),(5,9)	✗	✗	✗		
8		✗	✗	✗				✗	
9		✗	✗	✗				✗	



Y \ X	S	1F	2F
0	1/0	0/1	0/2
1	1/0	2/0	7/0
2	2/0	3/0	6/3
3	3/0	4/3	5/4
4	1/0	4/1	4/2
5	1/0	5/1	5/2
6	1/0	6/1	6/2
7	7/0	8/3	9/4
8	1/0	8/1	8/2
9	1/0	9/1	9/2

Machines incomplètement spécifiées

- Partant d'un état *p* la machine peut avoir deux états successeurs différents *q* et *q'* pour la même entrée *x* :

$$\delta(p, x) = \{q, q'\} \subseteq \mathcal{Y}$$

Ensemble d'états au lieu d'un état

- Plus généralement depuis *p* pour *x* donné on peut aller vers n'importe quel état (on note – le successeur (indifférent)

$$\delta(p, x) = \mathcal{Y} \quad \text{(noté -)}$$

- Dans tous les cas la machine devient non-déterministe.

Machines incomplètement spécifiées

- Les sorties peuvent également être indifférentes (noté -).
- Le modèle est donc modifié :

$$\delta : \mathcal{Y} \times \mathcal{X} \to 2^{\mathcal{Y}}$$

$$\omega : \mathcal{Y} \times \mathcal{X} \to 2^{\mathcal{Z}}$$

- Séquences applicables :

C'est donc une séquence sans – comme état suivant

$$x \in \mathcal{X}^{+} \text{ est applicable à } p \in \mathcal{Y} \text{ (noté } p \xrightarrow{x} \text{) ssi}$$

$$\forall k = 1 \cdots n-1 : \left|\delta^{+}(p, x(1 \cdots k))\right| = 1$$

Machines incomplètement spécifiées

- Pour comparer les sorties il faut considérer – comme un « joker ». On introduit la notion de compatibilité des sorties :

$$\forall u,v \in \mathcal{Z} : u \approx v \text{ (} u \text{ compatible avec } v\text{) ssi}$$
$$(u = v) \vee (u = -) \vee (v = -)$$

- Deux séquences de sortie *z* et *z'* sont dites compatibles si

$$\left(|z| = |z'| = n\right) \wedge (\forall k = 1..n : z(k) \approx z'(k))$$

Machines incomplètement spécifiées

- Compatibilité d'états :

$$\forall p \in \mathcal{Y}_1, \forall q \in \mathcal{Y}_2 : p \text{ et } q \text{ sont compatibles (noté } p \sim q\text{) ssi}$$
$$\forall x \in \mathcal{X}^+ : (p \xrightarrow{x/z_1} {}_1) \wedge (q \xrightarrow{x/z_2} {}_2) \Rightarrow z_1 \approx z_2$$

- Théorème

$$(\forall p,q \in \mathcal{Y}) : p \sim q \text{ ssi } (\forall a \in \mathcal{X})$$
$$1)\ \omega(p,a) \approx \omega(q,a)$$
$$2)\ \delta(p,a) \sim \delta(q,a) \text{ quand tous les deux sont définis}$$

- Détermination des paires compatibles : appliquer l'algorithme des paires compatibles en remplaçant l'égalité des sorties par leur compatibilité.

Ya\X	α	β	γ
1	2/-	1/-	5/1
2	4/-	2/0	-/-
3	1/0	3/1	-/1
4	4/0	4/0	3/-
5	6/1	-/1	4/-
6	5/-	1/-	2/-
7	5/-	7/0	1/0

	1	2	3	4	5	6
2						
3						
4						
5						
6						
7						

Fin deuxième passe.

Troisième passe.

stabilité

Paires compatibles:
(1,2) (1,3) (2,4) (5,6)

	1	2	3	4	5	6
2	(2,4)					
3	(1,2)	X				
4	(2,4)~~(3,5)~~		X			
5	(2,6)~~(4,5)~~	X	X	X		
6	~~(2,5)~~	(1,2)~~(4,5)~~	(1,3)~~(1,5)~~	~~(1,4)~~(2,3) (4,5)	(2,4)	
7	X	~~(4,5)~~	X	(1,3)~~(4,5)~~	X	(1,2)~~(1,7)~~