Nouvelles approches en sans-grille : covariance et courbes AMG

Bastien Laville, Laure Blanc-Féraud, Gilles Aubert

Projet Morpheme : Inria SAM, CNRS, UCA

13 juin 2022

Plan

Introduction

Contexte biomédical

Objectif

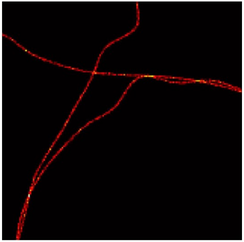
Imager des structures biologiques à de petites échelles

Contexte biomédical

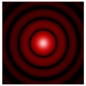
Objectif

Imager des structures biologiques à de petites échelles

Limitation physique à cause de la diffraction pour des corps < 200 nm : convolution par la *point spread function* h du microscope.



PSF h = disque d'Airy
ou gaussienne.

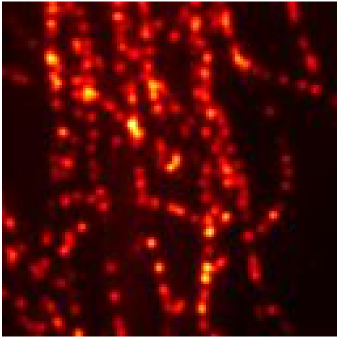


Imagerie SMLM

Reconstruction par microscopie de fluorescence SMLM : pile d'acquisition avec peu de fluorophores allumés par image.

Imagerie SMLM

Reconstruction par microscopie de fluorescence SMLM : pile d'acquisition avec peu de fluorophores allumés par image.



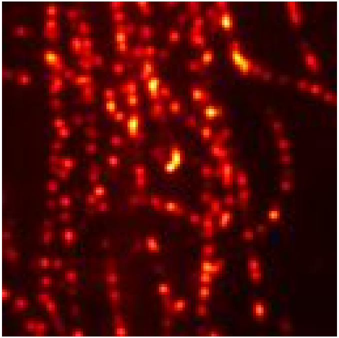
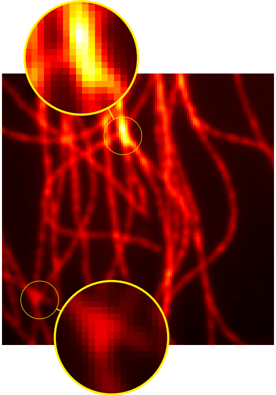


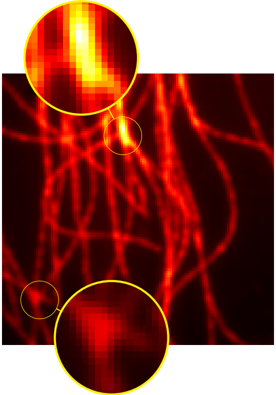
Figure 1: 2 extraits de pile SMLM

Pile EPFL SMLM Challenge (10000 images, haute densité) :

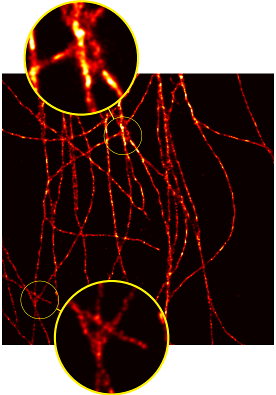


Moyenne de la pile

Pile EPFL SMLM Challenge (10000 images, haute densité) :

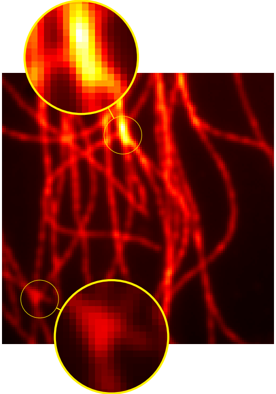


Moyenne de la pile

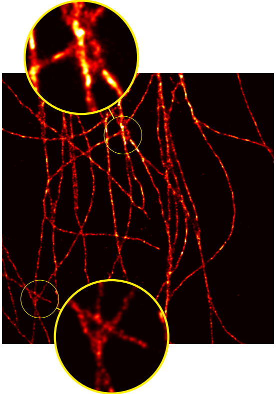


Sans-grille

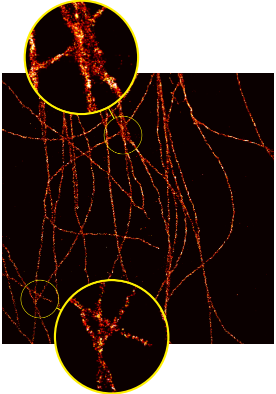
Pile EPFL SMLM Challenge (10000 images, haute densité) :



Moyenne de la pile

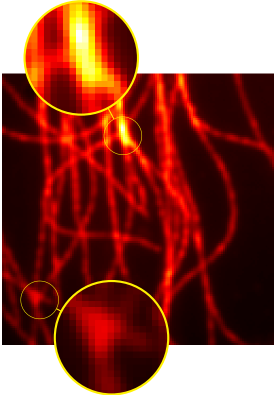


Sans-grille

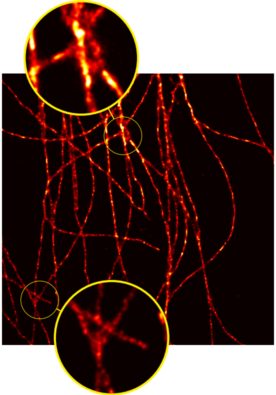


Deep-STORM

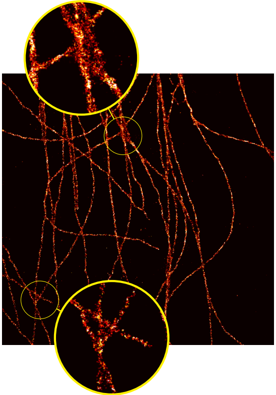
Pile EPFL SMLM Challenge (10000 images, haute densité) :



Moyenne de la pile



Sans-grille



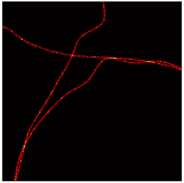
Deep-STORM

Défauts SMLM : beaucoup d'images, pas d'imagerie de cellules vivantes.

Problème inverse, à partir d'une acquisition on reconstruit positions et amplitudes de pics.

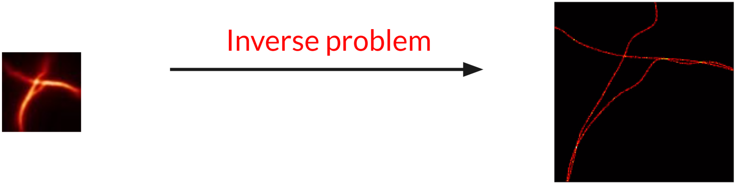
Acquisition

Inverse problem



Reconstruction

Problème inverse, à partir d'une acquisition on reconstruit positions et amplitudes de pics.



Acquisition

Reconstruction

- déconvolution sans-grille peut s'interpréter comme la « limite » d'une grille de plus en plus fine ;
- plus limité par la grille fine.

État de l'art sans-grille

Positionnement :

- $\mathcal{X}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$;

État de l'art sans-grille

Positionnement :

- $\mathcal{X}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$;
- comment modéliser les pics ? Mesures de Dirac δ_x, élément de *l'ensemble des mesures de Radon finies* $\mathcal{M}(\mathcal{X})$;

État de l'art sans-grille

Positionnement :

- $\mathcal{X}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$;
- comment modéliser les pics ? Mesures de Dirac δ_x, élément de *l'ensemble des mesures de Radon finies* $\mathcal{M}(\mathcal{X})$;
- dual topologique de $\mathscr{C}_0(\mathcal{X})$ $(= \mathscr{C}(\mathcal{X})^*$ ici) pour $\langle f, m\rangle = \int_{\mathcal{X}} f \,\mathrm{d}m$. Généralisation de $\mathrm{L}^1(\mathcal{X})$; $\mathrm{L}^1(\mathcal{X}) \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{X})$;

État de l'art sans-grille

Positionnement :

- $\mathcal{X}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$;
- comment modéliser les pics ? Mesures de Dirac δ_x, élément de *l'ensemble des mesures de Radon finies* $\mathcal{M}(\mathcal{X})$;
- dual topologique de $\mathscr{C}_0(\mathcal{X})$ ($= \mathscr{C}(\mathcal{X})^*$ ici) pour $\langle f, m \rangle = \int_{\mathcal{X}} f \, \mathrm{d}m$. Généralisation de $\mathrm{L}^1(\mathcal{X})$; $\mathrm{L}^1(\mathcal{X}) \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{X})$;
- Banach pour la norme TV : $m \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

$$|m|(\mathcal{X}) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left(\int_{\mathcal{X}} f \, \mathrm{d}m \,\middle|\, f \in \mathscr{C}_0(\mathcal{X}), \|f\|_{\infty,\mathcal{X}} \leq 1 \right).$$

Si $m = \sum_{i=1}^N a_i \delta_{x_i}$ est une mesure discrète alors $|m|(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^N |a_i|$.

Soit $m_{a_0,x_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^N a_i \delta_{x_i}$ une mesure discrète, $\Phi : \mathcal{M}(\mathcal{X}) \to \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ opérateur d'acquisition (e.g. $\Phi m_{a_0,x_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^N a_i h(x - x_i)$ le noyau gaussien) et $w \in \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ bruit additif :

$$y \stackrel{\text{def.}}{=} \Phi m_{a_0,x_0} + w.$$

Soit $m_{a_0,x_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{x_i}$ une mesure discrète, $\Phi : \mathcal{M}(\mathcal{X}) \to \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ opérateur d'acquisition (e.g. $\Phi m_{a_0,x_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{N} a_i h(x - x_i)$ le noyau gaussien) et $w \in \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ bruit additif :

$$y \stackrel{\text{def.}}{=} \Phi m_{a_0,x_0} + w.$$

On appelle **BLASSO** le problème d'optimisation [Candes14, Duval15] pour $\lambda > 0$:

$$\underset{m \in \mathcal{M}(\mathcal{X})}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|y - \Phi m\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{X})} + \lambda |m|(\mathcal{X}) \qquad (\mathcal{P}_\lambda(y))$$

Soit $m_{a_0,x_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{x_i}$ une mesure discrète, $\Phi : \mathcal{M}(\mathcal{X}) \to \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ opérateur d'acquisition (e.g. $\Phi m_{a_0,x_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{N} a_i h(x - x_i)$ le noyau gaussien) et $w \in \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ bruit additif :

$$y \stackrel{\text{def.}}{=} \Phi m_{a_0,x_0} + w.$$

On appelle **BLASSO** le problème d'optimisation [Candes14, Duval15] pour $\lambda > 0$:

$$\underset{m \in \mathcal{M}(\mathcal{X})}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|y - \Phi m\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{X})} + \lambda |m|(\mathcal{X}) \qquad (\mathcal{P}_\lambda(y))$$

Résolu par exemple par algorithme glouton (*Frank-Wolfe*, ...)

Reconstruction par covariance

Une autre imagerie : SOFI

Imagerie SOFI (*Super-resolution optical fluctuation imaging*) [Dertinger10].

Une autre imagerie : SOFI

Imagerie SOFI (*Super-resolution optical fluctuation imaging*) [Dertinger10].

- beaucoup de fluorophores allumés en même temps ;

Une autre imagerie : SOFI

Imagerie SOFI (*Super-resolution optical fluctuation imaging*) [Dertinger10].

- beaucoup de fluorophores allumés en même temps ;
- indépendance temporelle des fluorophores.

Une autre imagerie : SOFI

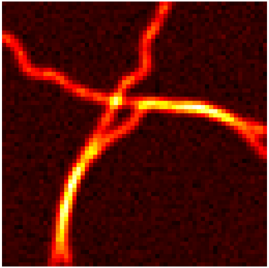
Imagerie SOFI (*Super-resolution optical fluctuation imaging*) [Dertinger10].

- beaucoup de fluorophores allumés en même temps ;
- indépendance temporelle des fluorophores.
- moins nocif pour les structures biologiques étudiées ;

Une autre imagerie : SOFI

Imagerie SOFI (*Super-resolution optical fluctuation imaging*) [Dertinger10].

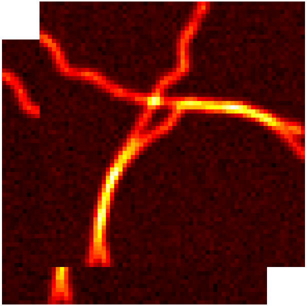
- beaucoup de fluorophores allumés en même temps ;
- indépendance temporelle des fluorophores.
- moins nocif pour les structures biologiques étudiées ;



Une autre imagerie : SOFI

Imagerie SOFI (*Super-resolution optical fluctuation imaging*) [Dertinger10].

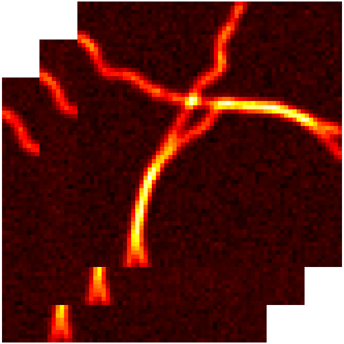
- beaucoup de fluorophores allumés en même temps ;
- indépendance temporelle des fluorophores.
- moins nocif pour les structures biologiques étudiées ;



Une autre imagerie : SOFI

Imagerie SOFI (*Super-resolution optical fluctuation imaging*) [Dertinger10].

- beaucoup de fluorophores allumés en même temps ;
- indépendance temporelle des fluorophores.
- moins nocif pour les structures biologiques étudiées ;



Quantités en jeu

- on effectue des acquisitions (images dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{X})$) sur $[0, T]$;

Quantités en jeu

- on effectue des acquisitions (images dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{X})$) sur $[0, T]$;
- on définit $y : [0, T] \to \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ la pile d'acquisition SOFI ;

Quantités en jeu

- on effectue des acquisitions (images dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{X})$) sur $[0,T]$;
- on définit $y : [0,T] \to \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ la pile d'acquisition SOFI ;
- on cherche à reconstruire une mesure *dynamique* :

$$t \mapsto \mu(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\delta_{x_i} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathcal{M}(\mathcal{X}))$$

qui génère pour presque tout $t \in [0,T]$: $y(t) = \Phi\mu(t)$.

Quantités en jeu

- on effectue des acquisitions (images dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{X})$) sur $[0,T]$;
- on définit $y : [0,T] \to \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ la pile d'acquisition SOFI ;
- on cherche à reconstruire une mesure *dynamique* :

$$t \mapsto \mu(t) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\delta_{x_i} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathcal{M}(\mathcal{X}))$$

qui génère pour presque tout $t \in [0,T]$: $y(t) = \Phi\mu(t)$.

Les cumulants peuvent nous aider à retrouver les positions x_i. Exemple : moyenne temporelle $\bar{y} \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T y(\cdot,t)\,\mathrm{d}t$. On a $\Phi m_{a,x} = \bar{y}$ où $m_{a,x} \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^N \bar{a}_i \delta_{x_i}$.

Construire les problèmes

Si R_y est la covariance temporelle, on a $\forall u, v \in \mathcal{X}$:

Construire les problèmes

Si R_y est la covariance temporelle, on a $\forall u, v \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned}
R_y(u,v) &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \left(y(u,t) - \bar{y}(u)\right)\left(y(v,t) - \bar{y}(v)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \ldots \quad \text{(indépendance des fluctuations [Dertinger10])} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{M_i}_{\text{Variance de } a_i} h(u - x_i)h(v - x_i) \\
&= \int_{\mathcal{X}} h(u-x)h(v-x)\,\mathrm{d}m_{M,x}(x) \\
&= \Lambda m_{M,x}(u,v).
\end{aligned}$$

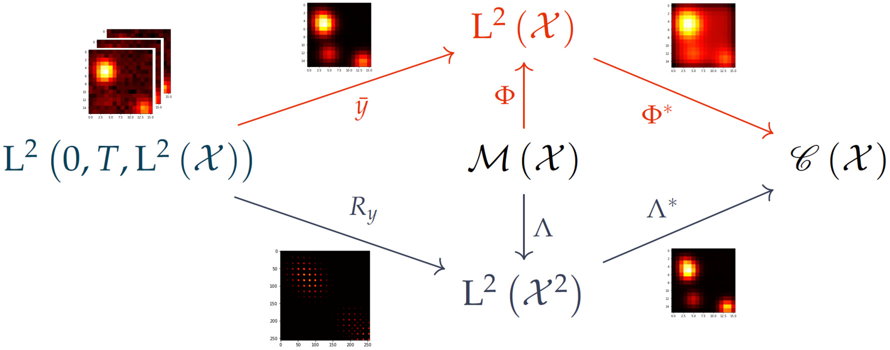
Construire les problèmes

Si R_y est la covariance temporelle, on a $\forall u, v \in \mathcal{X}$:

$$
\begin{aligned}
R_y(u,v) &\overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \left(y(u,t)-\bar{y}(u)\right)\left(y(v,t)-\bar{y}(v)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \dots \quad \text{(indépendance des fluctuations [Dertinger10])} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{M_i}_{\text{Variance de } a_i} h(u-x_i)h(v-x_i) \\
&= \int_{\mathcal{X}} h(u-x)h(v-x)\,\mathrm{d}m_{M,x}(x) \\
&= \Lambda m_{M,x}(u,v).
\end{aligned}
$$

$m_{M,x} \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^N M_i \delta_{x_i}$ partage les mêmes positions que $\mu = \sum_{i=1}^N a_i(t)\delta_{x_i}$, on appelle $\Lambda : \mathcal{M}(\mathcal{X}) \to \mathrm{L}^2(\mathcal{X}^2)$ cet « opérateur de covariance ».

Résumé des quantités



Légende : partie dynamique, partie moyenne temporelle $\bar{y}$ et partie covariance temporelle R_y.

BLASSO sur la covariance

Soit $\lambda > 0$, nous proposons la reconstruction par covariance :

$$\underset{m \in \mathcal{M}(\mathcal{X})}{\operatorname{argmin}} T_\lambda(m) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} \| R_y - \Lambda(m) \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{X}^2)} + \lambda |m|(\mathcal{X}) \qquad (\mathcal{Q}_\lambda(y))$$

BLASSO sur la covariance

Soit $\lambda > 0$, nous proposons la reconstruction par covariance :

$$\operatorname*{argmin}_{m \in \mathcal{M}(\mathcal{X})} T_\lambda(m) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} \left\| R_y - \Lambda(m) \right\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{X}^2)} + \lambda |m|(\mathcal{X}) \qquad (\mathcal{Q}_\lambda(y))$$

$\Delta \overset{\text{def.}}{=} \min_{i \neq j} \left| x_i - x_j \right|$: distance de séparation minimale

Proposition

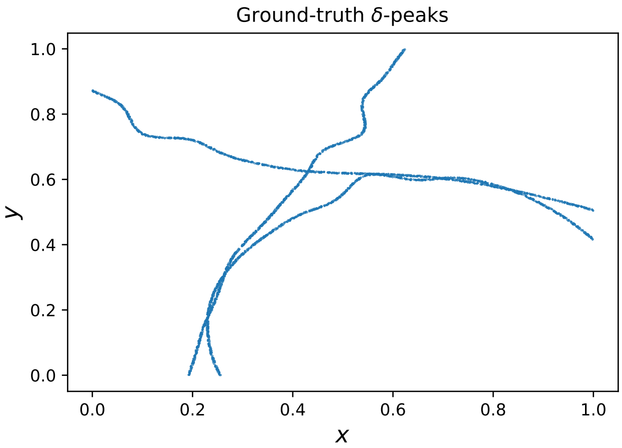
Le support de la mesure est reconstruit :

- *si $\Delta \gtrsim 1{,}1\sigma$ pour BLASSO sur moyenne d'après [Bendory16] ;*
- *si $\Delta \gtrsim 1{,}1\sigma/\sqrt{2}$ pour $(\mathcal{Q}_\lambda(y))$: **mieux !***

Résultats numériques 2D `SOFItool`

Test sur des filaments 2D issus du ISBI challenge 2016 :

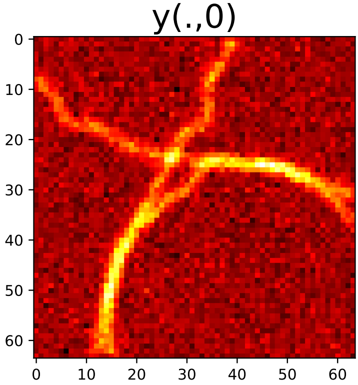
- pile de 1000 acquisitions en 64×64 simulées par `SOFItool` ;
- 8700 émetteurs répartis sur les filaments ; bruit de fond **fort** $+$ bruit de Poisson à 4 $+$ bruit gaussien à 1×10^{-2}. SNR ≈ 10 db.



Résultats numériques 2D `SOFItool`

Test sur des filaments 2D issus du ISBI challenge 2016 :

- pile de 1000 acquisitions en 64×64 simulées par `SOFItool` ;
- 8700 émetteurs répartis sur les filaments ; bruit de fond **fort** $+$ bruit de Poisson à 4 $+$ bruit gaussien à 1×10^{-2}. SNR ≈ 10 db.



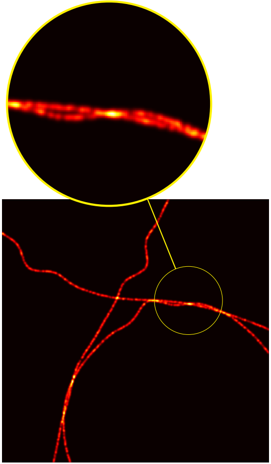


Figure 2: Vérité-terrain

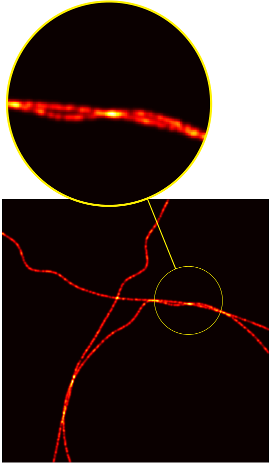


Figure 2: Vérité-terrain

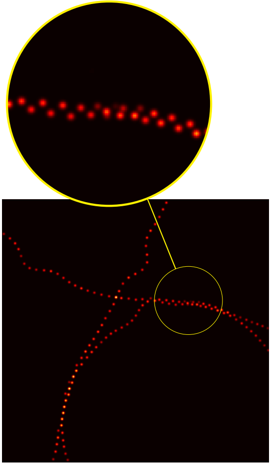


Figure 3: $(\mathcal{Q}_\lambda(y))$

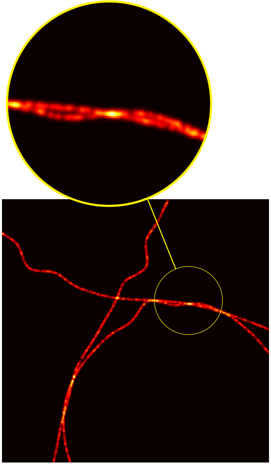


Figure 2: Vérité-terrain

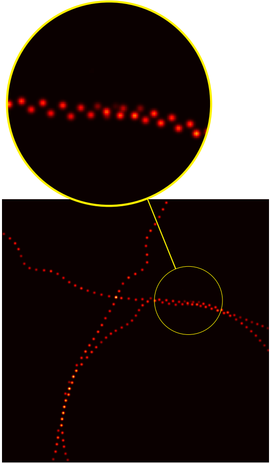


Figure 3: $(\mathcal{Q}_\lambda(y))$

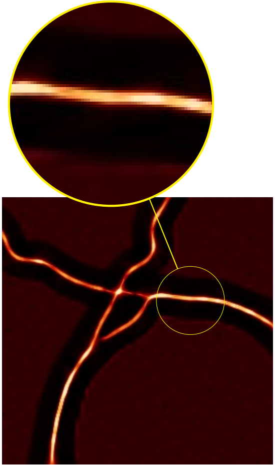
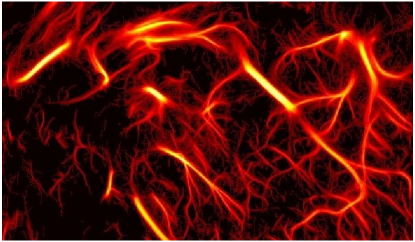


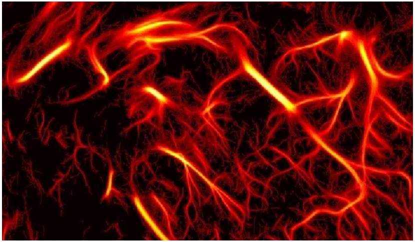
Figure 4: SRRF [Culley18]

AMG : Reconstruction de courbes



Des sources courbes apparaissent naturellement dans les acquisitions

Applications : paléomagnétisme, imagerie biomédicale, *etc.*



Des sources courbes apparaissent naturellement dans les acquisitions

Applications : paléomagnétisme, imagerie biomédicale, *etc.*

Nous voulons retrouver des courbes dans un cadre sans-grille.
Problème : il n'y a pas de littérature sur la question.

Comment construire une fonctionnelle ? Nos objectifs :

- implémenter la notion de courbe dans un cadre sans-grille
- évacuer les Diracs, minimiseur du BLASSO ?

Comment construire une fonctionnelle ? Nos objectifs :

- implémenter la notion de courbe dans un cadre sans-grille
- évacuer les Diracs, minimiseur du BLASSO ?

Observons que l'on sait reconstruire en sans-grille :

- 0D, des Diracs δ_x (mesures portées par un point x) ;
- 2D, des indicatrices χ_E (mesures portées par une surface E) ;

Comment construire une fonctionnelle ? Nos objectifs :

- implémenter la notion de courbe dans un cadre sans-grille
- évacuer les Diracs, minimiseur du BLASSO ?

Observons que l'on sait reconstruire en sans-grille :

- 0D, des Diracs δ_x (mesures portées par un point x) ;
- 2D, des indicatrices χ_E (mesures portées par une surface E) ;

> Comment reconstruire une mesure portée par une courbe ? (1D)

- soit l'espace des mesures de Radon vectorielles $\mathcal{M}(\mathcal{X})^2$;

- soit l'espace des mesures de Radon vectorielles $\boldsymbol{\mathcal{M}}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)^2$;
- On note $\mathscr{V} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)^2, \operatorname{div}(\boldsymbol{m}) \in \mathcal{M}\left(\mathcal{X}\right)\right\}$ l'espace des *charges*, c'est-à-dire les champs de vecteurs à divergence finie. Notons que $\delta \notin \mathscr{V}$!

- soit l'espace des mesures de Radon vectorielles $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\mathcal{X}})^{\mathbf{2}}$;
- On note $\mathscr{V} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\mathcal{X}})^{\mathbf{2}}, \operatorname{div}(\boldsymbol{m}) \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \right\}$ l'espace des *charges*, c'est-à-dire les champs de vecteurs à divergence finie. Notons que $\delta \notin \mathscr{V}$!
- $\mathscr{V}$ est un Banach pour la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{V}} \stackrel{\text{def.}}{=} \|\cdot\|_{\mathrm{TV}^2} + \|\operatorname{div}(\cdot)\|_{\mathrm{TV}}$;

- soit l'espace des mesures de Radon vectorielles $\boldsymbol{\mathcal{M}}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)^2$;
- On note $\mathscr{V} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)^2, \operatorname{div}(\boldsymbol{m}) \in \mathcal{M}\left(\mathcal{X}\right) \right\}$ l'espace des *charges*, c'est-à-dire les champs de vecteurs à divergence finie. Notons que $\delta \notin \mathscr{V}$!
- $\mathscr{V}$ est un Banach pour la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{V}} \stackrel{\text{def.}}{=} \|\cdot\|_{\mathrm{TV}^2} + \|\operatorname{div}(\cdot)\|_{\mathrm{TV}}$;
- Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ une courbe Lipschitz paramétrée 1-rectifiable,

- soit l'espace des mesures de Radon vectorielles $\boldsymbol{\mathcal{M}}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)^{\mathbf{2}}$;
- On note $\mathscr{V} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)^{\mathbf{2}}, \operatorname{div}(\boldsymbol{m}) \in \mathcal{M}\left(\mathcal{X}\right) \right\}$ l'espace des *charges*, c'est-à-dire les champs de vecteurs à divergence finie. Notons que $\delta \notin \mathscr{V}$!
- $\mathscr{V}$ est un Banach pour la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{V}} \stackrel{\text{def.}}{=} \|\cdot\|_{\mathrm{TV}^2} + \|\operatorname{div}(\cdot)\|_{\mathrm{TV}}$;
- Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ une courbe Lipschitz paramétrée 1-rectifiable,on dit que $\boldsymbol{\mu}_\gamma \in \mathscr{V}$ *est une mesure portée par une courbe* γ si :

$$\forall \boldsymbol{g} \in \mathscr{C}_{\mathbf{0}}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)^{\mathbf{2}}, \quad \langle \boldsymbol{\mu}_\gamma, \boldsymbol{g} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^2} \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^1 \boldsymbol{g}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t.$$

- une courbe est fermée si $\gamma(0) = \gamma(1)$, elle est ouverte sinon ; $\operatorname{div} \boldsymbol{\mu}_\gamma = \delta_{\gamma(0)} - \delta_{\gamma(1)}$.

Soit $\alpha > 0$, nous introduisons la fonctionnelle CROC (***C**urves* ***R**epresented* ***O**n* ***C**harges*) :

$$\underset{m \in \mathscr{V}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\|y - \Phi m\|_{\mathcal{H}}^2 + \alpha \left(\|m\|_{\mathrm{TV}^2} + \|\operatorname{div} m\|_{\mathrm{TV}} \right). \qquad (\mathcal{Q}_\alpha(y))$$

Soit $\alpha > 0$, nous introduisons la fonctionnelle CROC (***C**urves* ***R**epresented* ***O**n* ***C**harges*) :

$$\underset{\boldsymbol{m}\in\mathscr{V}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\|y - \boldsymbol{\Phi m}\|_{\mathcal{H}}^2 + \alpha\left(\|\boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}^2} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}}\right). \qquad (\mathcal{Q}_\alpha(y))$$

- $\frac{1}{2}\|y - \boldsymbol{\Phi m}\|_{\mathcal{H}}^2$ est le terme d'attache aux données ;

Soit $\alpha > 0$, nous introduisons la fonctionnelle CROC (***C**urves **R**epresented **O**n **C**harges*) :

$$\underset{m \in \mathscr{V}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|y - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{m}\|_{\mathcal{H}}^2 + \alpha \left(\|\boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}^2} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}} \right). \qquad (\mathcal{Q}_\alpha(y))$$

- $\frac{1}{2} \|y - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{m}\|_{\mathcal{H}}^2$ est le terme d'attache aux données ;
- $\|\boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}^2}$ pénalise la longueur de la courbe : $\left\|\boldsymbol{\mu}_\gamma\right\|_{\mathrm{TV}^2} = \mathscr{H}_1(\Gamma)$ avec $\Gamma = \gamma([0,1[)$;

Soit $\alpha > 0$, nous introduisons la fonctionnelle CROC (***C**urves* ***R**epresented* ***O**n* ***C**harges*) :

$$\underset{m \in \mathscr{V}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\|y - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{m}\|_{\mathcal{H}}^2 + \alpha \left(\|\boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}^2} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}}\right). \qquad (\mathcal{Q}_\alpha(y))$$

- $\frac{1}{2}\|y - \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{m}\|_{\mathcal{H}}^2$ est le terme d'attache aux données ;
- $\|\boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}^2}$ pénalise la longueur de la courbe : $\left\|\boldsymbol{\mu}_\gamma\right\|_{\mathrm{TV}^2} = \mathscr{H}_1(\Gamma)$ avec $\Gamma = \gamma([0,1[)$;
- $\|\operatorname{div} \boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}}$ est le terme de comptage de courbes.

- CROC admet des minimiseurs $\boldsymbol{m} \in \mathscr{V}$;
- il existe certificats duaux $\boldsymbol{\eta_1} \in \partial \|\boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}^2}$ et $\boldsymbol{\eta_2} \in \partial \|\mu\|_{\mathrm{TV}}\big|_{\mu = \operatorname{div} \boldsymbol{m}}$ avec $\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2} \in \mathscr{C}_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{\mathcal{X}})^{\mathbf{2}}$ tel que :

$$\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\eta_1} + \boldsymbol{\eta_2} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^2} = \|\boldsymbol{m}\|_{\mathscr{V}}.$$

[1] *'Off-the-grid curve reconstruction through divergence regularisation: an extreme point result'*. Bastien Laville, Laure Blanc-Féraud, Gilles Aubert.

- CROC admet des minimiseurs $\boldsymbol{m} \in \mathscr{V}$;
- il existe certificats duaux $\boldsymbol{\eta_1} \in \partial \|\boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}^2}$ et $\boldsymbol{\eta_2} \in \partial \|\mu\|_{\mathrm{TV}}\big|_{\mu = \operatorname{div} \boldsymbol{m}}$ avec $\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2} \in \mathscr{C}_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{\mathcal{X}})^{\mathbf{2}}$ tel que :

$$\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\eta_1} + \boldsymbol{\eta_2} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^2} = \|\boldsymbol{m}\|_{\mathscr{V}}.$$

Comment prouver qu'il existe des mesures portées par des courbes $\boldsymbol{\mu_\gamma}$ *minimum* de CROC / $(\mathcal{Q}_\alpha(y))$?

[1] *'Off-the-grid curve reconstruction through divergence regularisation: an extreme point result'*. Bastien Laville, Laure Blanc-Féraud, Gilles Aubert.

- CROC admet des minimiseurs $\boldsymbol{m} \in \mathscr{V}$;
- il existe certificats duaux $\boldsymbol{\eta_1} \in \partial \|\boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}^2}$ et $\boldsymbol{\eta_2} \in \partial \|\mu\|_{\mathrm{TV}}\big|_{\mu = \operatorname{div} \boldsymbol{m}}$ avec $\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2} \in \mathscr{C}_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{\mathcal{X}})^{\mathbf{2}}$ tel que :

$$\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\eta_1} + \boldsymbol{\eta_2} \rangle_{\boldsymbol{\mathcal{M}}^2} = \|\boldsymbol{m}\|_{\mathscr{V}}.$$

> Comment prouver qu'il existe des mesures portées par des courbes $\boldsymbol{\mu_\gamma}$ *minimum* de CROC / $(\mathcal{Q}_\alpha(y))$? Nous proposons cette approche fondée sur les points extrémaux : ***A**tomic based **M**ethod for **G**ridless* **(AMG)**[1].

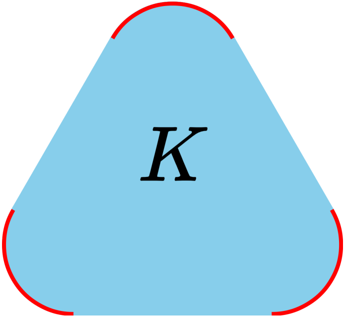
[1] *'Off-the-grid curve reconstruction through divergence regularisation: an extreme point result'*. Bastien Laville, Laure Blanc-Féraud, Gilles Aubert.

Definition

Soit X un espace vectoriel topologique et $K \subset X$. Un *point extrémal* x de K est un point tel que $\forall y, z \in K$:

$$\forall \lambda \in (0,1),\ x = \lambda y + (1-\lambda) z \implies x = y = z$$

$\operatorname{Ext} K$ est l'ensemble des points extrémaux de K.



Les points extrémaux sont en rouge

Lien entre une fonctionnelle et points extrémaux :

Theorem (Théorème de la représentation)

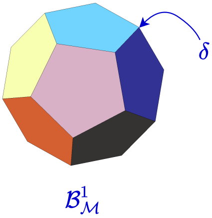
Soit $F = G + \alpha R$ *une fonctionnelle où* G *est le terme d'attache aux données,* R *le régulariseur,* $\alpha > 0$*. Alors, il existe un minimiseur de* F *qui est une combinaison linéaire finie des points extrémaux de la boule unité de* R*.*

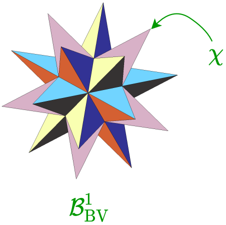
Lien entre une fonctionnelle et points extrémaux :

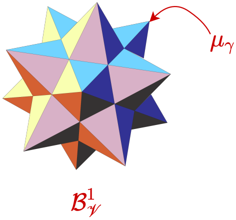
Theorem (Théorème de la représentation)

Soit $F = G + \alpha R$ une fonctionnelle où G est le terme d'attache aux données, R le régulariseur, $\alpha > 0$. Alors, il existe un minimiseur de F qui est une combinaison linéaire finie des points extrémaux de la boule unité de R.

Caractériser la boule unité $\mathcal{B}_E^1 \overset{\text{def.}}{=} \{u \in E \,|\, R(E) \leq 1\}$ du régulariseur $\iff$ caractériser la structure d'un *minimum* de F.







Résultat principal

Soit l'espace de $\mathscr{V}$ muni de la topologie faible-* (non-complet) :

$$\mathfrak{S} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \frac{\mu_\gamma}{\left\|\mu_\gamma\right\|_{\mathscr{V}}}, \gamma \text{ courbe Lipschitz 1-rectifiable simple orientée} \right\}.$$

Résultat principal

Soit l'espace de $\mathscr{V}$ muni de la topologie faible-* (non-complet) :

$$\mathfrak{S} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \frac{\boldsymbol{\mu}_\gamma}{\left\|\boldsymbol{\mu}_\gamma\right\|_{\mathscr{V}}}, \gamma \text{ courbe Lipschitz 1-rectifiable simple orientée} \right\}.$$

Theorem (AMG)

Soit $\mathcal{B}^1_{\mathscr{V}} = \{\boldsymbol{m} \in \mathscr{V}, \|\boldsymbol{m}\|_{\mathscr{V}} \leq 1\}$ *la boule unité de la norme de* $\mathscr{V}$.

Résultat principal

Soit l'espace de $\mathscr{V}$ muni de la topologie faible-* (non-complet) :

$$\mathfrak{S} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \frac{\boldsymbol{\mu}_\gamma}{\left\| \boldsymbol{\mu}_\gamma \right\|_{\mathscr{V}}}, \gamma \text{ courbe Lipschitz 1-rectifiable simple orientée} \right\}.$$

Theorem (AMG)

Soit $\mathcal{B}_{\mathscr{V}}^1 = \{ \boldsymbol{m} \in \mathscr{V}, \|\boldsymbol{m}\|_{\mathscr{V}} \leq 1 \}$ *la boule unité de la norme de* $\mathscr{V}$. *Alors,*

$$\mathrm{Ext}(\mathcal{B}_{\mathscr{V}}^1) = \mathfrak{S}.$$

Résultat principal

Soit l'espace de $\mathscr{V}$ muni de la topologie faible-* (non-complet) :

$$\mathfrak{S} \overset{\text{def.}}{=} \left\{ \frac{\mu_\gamma}{\left\|\mu_\gamma\right\|_{\mathscr{V}}}, \gamma \text{ courbe Lipschitz 1-rectifiable simple orientée} \right\}.$$

Theorem (AMG)

Soit $\mathcal{B}^1_{\mathscr{V}} = \{m \in \mathscr{V}, \|m\|_{\mathscr{V}} \leq 1\}$ la boule unité de la norme de $\mathscr{V}$. Alors,

$$\mathrm{Ext}(\mathcal{B}^1_{\mathscr{V}}) = \mathfrak{S}.$$

Il faut maintenant écrire un algorithme pour reconstruire une solution comme combinaison linéaire de points extrémaux.

Conclusion

Les nouvelles approches

1. approche sans-grille en imagerie SOFI de microscopie fluorescente, reconstruction par covariance ;

Les nouvelles approches

1. approche sans-grille en imagerie SOFI de microscopie fluorescente, reconstruction par covariance ;
2. reconstruction sans-grille de courbes AM$\mathfrak{S}$:
   - caractérisation de l'espace des charges $\mathscr{V}$, définition d'une fonctionnelle CROC sur $\mathscr{V}$ pour reconstruire des courbes ;
   - caractérisation fine des points extrémaux de la boule unité de la norme de $\mathscr{V}$, $\mathrm{Ext}(\mathcal{B}^1_{\mathscr{V}}) = \mathfrak{S}$.

Objectifs futurs

- implémentation numérique de CROC/AMG avec une version de *(Sliding) Frank-Wolfe* ;

Objectifs futurs

- implémentation numérique de CROC/AMG avec une version de *(Sliding) Frank-Wolfe* ;
- étoffer notre paquet *python* appelé OPS à destination des biologistes (accélération *PyKeOps* ?) ;

Objectifs futurs

- implémentation numérique de CROC/AMG avec une version de *(Sliding) Frank-Wolfe* ;
- étoffer notre paquet *python* appelé OPS à destination des biologistes (accélération *PyKeOps* ?) ;
- reconstruire des courbes avec variation de poids ?

Objectifs futurs

- implémentation numérique de CROC/AMG avec une version de *(Sliding) Frank-Wolfe* ;
- étoffer notre paquet *python* appelé OPS à destination des biologistes (accélération *PyKeOps* ?) ;
- reconstruire des courbes avec variation de poids ?
- reconstruction de Diracs dynamiques à partir d'acquisitions vidéos réelles (*tracking*).

Objectifs futurs

- implémentation numérique de CROC/AMG avec une version de *(Sliding) Frank-Wolfe* ;
- étoffer notre paquet *python* appelé OPS à destination des biologistes (accélération *PyKeOps* ?) ;
- reconstruire des courbes avec variation de poids ?
- reconstruction de Diracs dynamiques à partir d'acquisitions vidéos réelles (*tracking*).

Publications pour approfondir :

- *'Off-the-grid curve reconstruction through divergence regularisation: an extreme point result'*. Bastien Laville, Laure Blanc-Féraud, Gilles Aubert. Prépublication avril 2022.
- *'Off-the-grid covariance-based super-resolution microscopy.'*. Bastien Laville, Laure Blanc-Féraud, Gilles Aubert. ICASSP 2022.

Bibliographie de l'exposé I

- Yohann de Castro and Fabrice Gamboa. *Exact reconstruction using Beurling minimal extrapolation.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, Elsevier BV, 2012, 395, 336-354

- Quentin Denoyelle, Vincent Duval, Gabriel Peyré, Emmanuel Soubies. *The Sliding Frank-Wolfe Algorithm and its Application to Super-Resolution Microscopy*. Inverse Problems, IOP Publishing, In press.

- Lenaic Chizat, Francis Bach. *On the Global Convergence of Gradient Descent for Over-parameterized Models using Optimal Transport*. Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS), Dec 2018, Montréal, Canada.

- Tamir Bendory, Shai Dekel, Arie Feuer, Robust recovery of stream of pulses using convex optimization, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 442, Issue 2, 2016.

Bibliographie de l'exposé II

- A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems, Amir Beck and Marc Teboulle, SIAM J. IMAGING SCIENCES, 2009.
- Marguerite Frank et Philip Wolfe, « An algorithm for quadratic programming », Naval Research Logistics Quarterly, vol. 3, 1956.
-] J. B. Lasserre, « Moments, positive polynomials and their applications », Imperial College Press Optimization Series, vol. 1, pp. xxii+361, 2010
- K. Bredies and H. K. Pikkarainen, « Inverse problems in spaces of measures », ESAIM Control Optim. Calc. Var., vol. 19, no. 1, pp. 190-218, 2013.
- Lenaic Chizat, Francis Bach. On the Global Convergence of Gradient Descent for Over-parameterized Models using Optimal Transport. Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS), Dec 2018, Montréal, Canada.

Bibliographie de l'exposé III

- Lenaic Chizat. Sparse Optimization on Measures with Over-parameterized Gradient Descent. 2020
- Candès, Emmanuel & Fernandez-Granda, Carlos. (2014). Towards a Mathematical Theory of Super-Resolution. Communications on Pure and Applied Mathematics. 67. 10.1002/cpa.21455.
- Vincent Duval, Gabriel Peyré. Exact Support Recovery for Sparse Spikes Deconvolution. Foundations of Computational Mathematics, Springer Verlag, 2015, 15 (5), pp.1315-1355.
- Thomas Dertinger, Ryan Colyer, Robert Vogel, Jörg Enderlein, and Shimon Weiss, "Achieving increased resolution and more pixels with Superresolution Optical Fluctuation Imaging (SOFI)," Opt. Express 18, 18875-18885 (2010)
- Culley S, Tosheva KL, Matos Pereira P, Henriques R. SRRF: Universal live-cell super-resolution microscopy. Int J Biochem Cell Biol. 2018;101:74-79. doi:10.1016/j.biocel.2018.05.014

Bibliographie de l'exposé IV

Oren Solomon, Maor Mutzafi, Mordechai Segev, and Yonina C. Eldar, "Sparsity-based super-resolution microscopy from correlation information," Opt. Express 26, 18238-18269 (2018)

Sliding Frank-Wolfe

Algorithm 1: *Sliding Frank-Wolfe.*

Entrées: Acquisition $y \in \mathcal{H}$, nombre d'itérations K, $\lambda > 0$

Initialisation : $m^{[0]} = 0$ $N^{[k]} = 0$

for *Récurrence pour l'étape k,* $0 \leq k \leq K$ **do**

Pour $m^{[k]} = \sum_{i=1}^{N^{[k]}} a_i^{[k]} \delta_{x_i^{[k]}}$ telle que $a_i^{[k]} \in \mathbb{R}$, $x_i^{[k]} \in \mathcal{X}$, trouver $x_*^{[k]} \in \mathcal{X}$ tel que :

$$x_*^{[k]} \in \underset{x \in \mathcal{X}}{\operatorname{argmax}} \left| \eta^{[k]}(x) \right| \qquad \text{où} \quad \eta^{[k]}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\lambda} \Phi^*(\Phi m^{[k]} - y),$$

if $\left| \eta^{[k]}(x_*^{[k]}) \right| < 1$ **then**

$m^{[k]}$ est la solution du BLASSO. Stop.

else

Calculer $m^{[k+1/2]} = \sum_{i=1}^{N^{[k]}} a_i^{[k+1/2]} \delta_{x_i^{[k+1/2]}} + a_{N^{[k]}+1}^{[k+1/2]} \delta_*^{[k+1/2]}$ telle que :

$$a_i^{[k+1/2]} \in \underset{a \in \mathbb{R}^{N^{[k]}+1}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \| y - \Phi_{x^{[k+1/2]}}(a) \|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda \|a\|_1$$

$$\text{pour} \quad x^{[k+1/2]} \stackrel{\text{def.}}{=} \left(x_1^{[k]}, \dots, x_{N^{[k]}}^{[k]}, x_*^{[k]} \right).$$

Calculer $m^{[k+1]} = \sum_{i=1}^{N^{[k+1]}} a_i^{[k+1]} \delta_{x_i^{[k+1]}}$ telle que :

$$(a_i^{[k+1]}, x_i^{[k+1]}) \in \underset{(a,x) \in R}{\operatorname{argmax}} \frac{1}{2} \| y - \Phi_{x^{[k+1/2]}}(a) \|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda \|a\|_1$$

end

end

Sortie: Mesure discrète $m^{[k]}$ pour k l'itération d'arrêt.