Super-résolution sans-grille en imagerie de fluctuation.

Bastien Laville, Laure Blanc-Féraud, Gilles Aubert

Projet Morpheme : Inria SAM, CNRS, UCA (France)

GRETSI 2022

Sommaire

Introduction

Contexte biomédical

Objectif

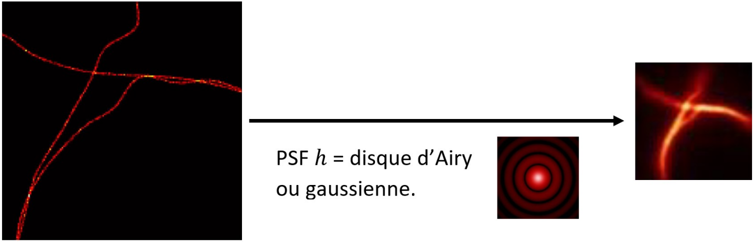
Imager des structures biologiques à de petites échelles

Contexte biomédical

Objectif

Imager des structures biologiques à de petites échelles

Limitation physique à cause de la diffraction pour des corps $< 200\ \mathrm{nm}$: convolution par la *point spread function* (PSF) du microscope

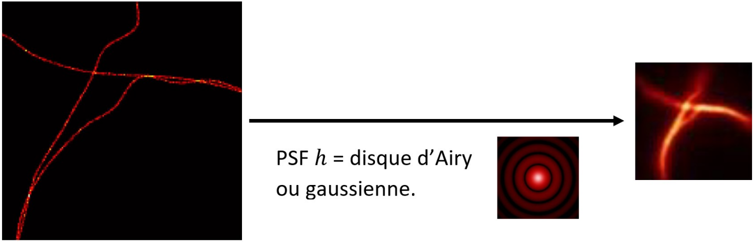


Contexte biomédical

Objectif

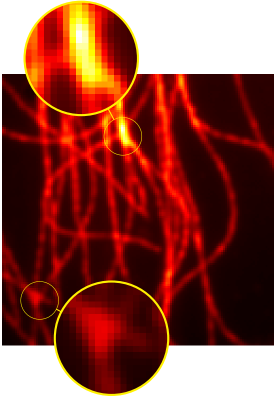
Imager des structures biologiques à de petites échelles

Limitation physique à cause de la diffraction pour des corps < 200 nm : convolution par la *point spread function* (PSF) du microscope



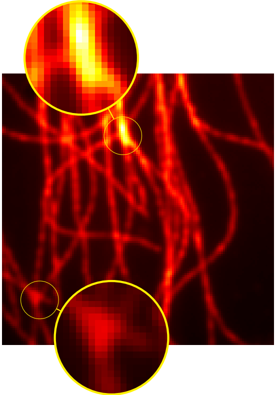
Reconstruction par exemple par microscopie de fluorescence SMLM : pile d'acquisition avec peu de fluorophores allumés par image. Défauts : beaucoup d'images ($\approx 1 \times 10^4$, ne permet pas l'imagerie de cellules vivantes).

Pile EPFL SMLM Challenge (10000 images, haute densité) :

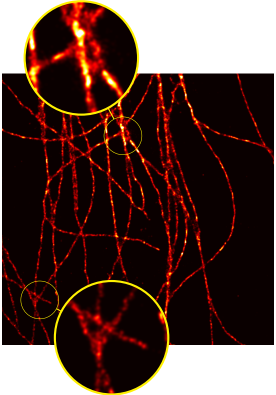


Moyenne de la pile

Pile EPFL SMLM Challenge (10000 images, haute densité) :

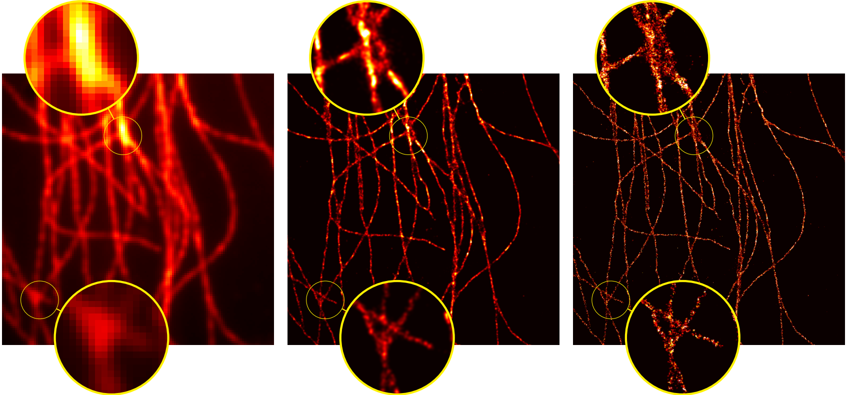


Moyenne de la pile



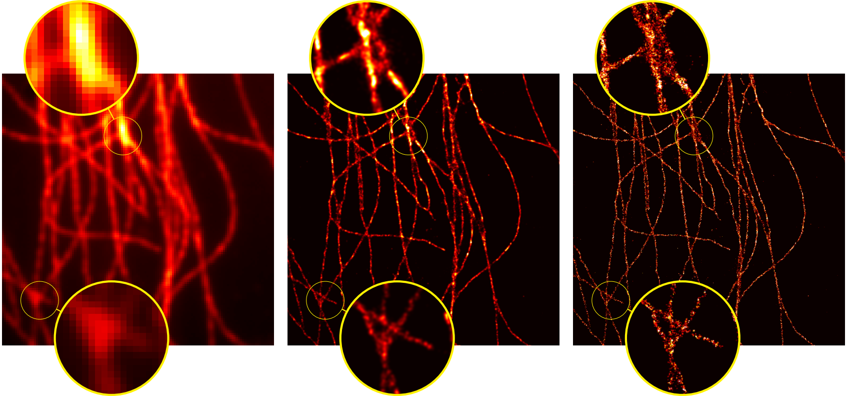
Off-the-grid

Pile EPFL SMLM Challenge (10000 images, haute densité) :



Moyenne de la pile — Off-the-grid — Deep-STORM

Pile EPFL SMLM Challenge (10000 images, haute densité) :

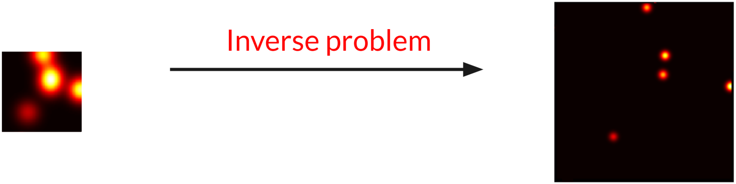


Moyenne de la pile — Off-the-grid — Deep-STORM

Défauts SMLM : beaucoup d'images, pas d'imagerie de cellules vivantes.

État de l'art sans-grille

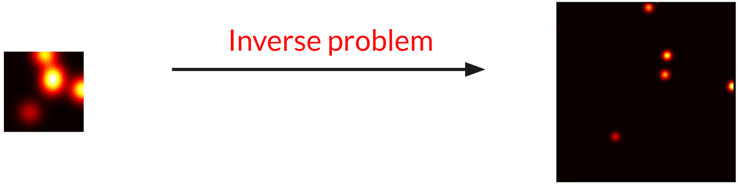
Problème inverse, à partir d'une acquisition on reconstruit positions et amplitudes de pics.



Acquisition

Reconstruction

Problème inverse, à partir d'une acquisition on reconstruit positions et amplitudes de pics.



Acquisition

Reconstruction

- déconvolution sans-grille peut s'interpréter comme la « limite » d'une grille de plus en plus fine ;
- plus limité par la grille fine.

Le cas discret

- les pics reconstruits sont nécessairement sur une grille ;
- optimisation combinatoire (non-)convexe ;
- littérature fournie.

Le cas discret

- les pics reconstruits sont nécessairement sur une grille ;
- optimisation combinatoire (non-)convexe ;
- littérature fournie.

Le cas sans-grille

- pas de limitation par la grille ;
- convexité mais dim infinie ;
- garanties (unicité, *etc*) ;
- information structurelle sur la solution ;
- domaine de recherche récent.

État de l'art sans-grille

Positionnement :

- $\mathcal{X}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$;

État de l'art sans-grille

Positionnement :

- $\mathcal{X}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$;
- comment modéliser les pics ? Par mesures de Dirac δ_x, élément de *l'ensemble des mesures de Radon finies* $\mathcal{M}\left(\mathcal{X}\right)$;

État de l'art sans-grille

Positionnement :

- $\mathcal{X}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$;
- comment modéliser les pics ? Par mesures de Dirac δ_x, élément de *l'ensemble des mesures de Radon finies* $\mathcal{M}\left(\mathcal{X}\right)$;
- dual topologique de $\mathscr{C}_0\left(\mathcal{X}\right)$ pour $\langle f, m\rangle = \int_{\mathcal{X}} f \, \mathrm{d}m$. Généralisation de $\mathrm{L}^1\left(\mathcal{X}\right)$; $\mathrm{L}^1\left(\mathcal{X}\right) \hookrightarrow \mathcal{M}\left(\mathcal{X}\right)$;

État de l'art sans-grille

Positionnement :

- $\mathcal{X}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$;
- comment modéliser les pics ? Par mesures de Dirac δ_x, élément de *l'ensemble des mesures de Radon finies* $\mathcal{M}\left(\mathcal{X}\right)$;
- dual topologique de $\mathscr{C}_0\left(\mathcal{X}\right)$ pour $\langle f, m\rangle = \int_{\mathcal{X}} f \,\mathrm{d}m$. Généralisation de $\mathrm{L}^1\left(\mathcal{X}\right)$; $\mathrm{L}^1\left(\mathcal{X}\right) \hookrightarrow \mathcal{M}\left(\mathcal{X}\right)$;
- Banach pour la norme TV : $m \in \mathcal{M}\left(\mathcal{X}\right)$,

$$|m|(\mathcal{X}) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left(\int_{\mathcal{X}} f \,\mathrm{d}m \,\middle|\, f \in \mathscr{C}_0\left(\mathcal{X}\right), \|f\|_{\infty,\mathcal{X}} \leq 1 \right).$$

Si $m = \sum_{i=1}^N a_i \delta_{x_i}$ est une mesure discrète alors $|m|(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^N |a_i|$.

Soit $m_{a_0,x_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^N a_i \delta_{x_i}$ une mesure discrète, $\Phi : \mathcal{M}(\mathcal{X}) \to \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ opérateur d'acquisition (e.g. $\Phi m_{a_0,x_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^N a_i h(x - x_i)$ le noyau gaussien) et $w \in \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ bruit additif :

$$y \stackrel{\text{def.}}{=} \Phi m_{a_0,x_0} + w.$$

Soit $m_{a_0,x_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{x_i}$ une mesure discrète, Φ : $\mathcal{M}(\mathcal{X}) \to \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ opérateur d'acquisition (e.g. $\Phi m_{a_0,x_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{N} a_i h(x - x_i)$ le noyau gaussien) et $w \in \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ bruit additif :

$$y \stackrel{\text{def.}}{=} \Phi m_{a_0,x_0} + w.$$

On appelle **BLASSO** le problème d'optimisation [Candes14, Duval15] pour $\lambda > 0$:

$$\underset{m \in \mathcal{M}(\mathcal{X})}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|y - \Phi m\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{X})} + \lambda |m|(\mathcal{X}) \qquad (\mathcal{P}_\lambda(y))$$

Soit $m_{a_0,x_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^N a_i \delta_{x_i}$ une mesure discrète, $\Phi : \mathcal{M}(\mathcal{X}) \to \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ opérateur d'acquisition (e.g. $\Phi m_{a_0,x_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^N a_i h(x - x_i)$ le noyau gaussien) et $w \in \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ bruit additif :

$$y \stackrel{\text{def.}}{=} \Phi m_{a_0,x_0} + w.$$

On appelle **BLASSO** le problème d'optimisation [Candes14, Duval15] pour $\lambda > 0$:

$$\underset{m \in \mathcal{M}(\mathcal{X})}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|y - \Phi m\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{X})} + \lambda |m|(\mathcal{X}) \qquad (\mathcal{P}_\lambda(y))$$

Problème difficile, résolu par exemple par algorithme glouton (*Frank-Wolfe*, ...)

Implémentation des méthodes sans-grille dans `notre paquet python` [1].

[1] `https://gitlab.inria.fr/blaville/off-the-grid-python`

Implémentation des méthodes sans-grille dans notre paquet python [1].

```python
import offgrid

N_ECH = 500; X_GAUCHE = 0; X_DROIT = 1
domain = offgrid.Domain2D(X_GAUCHE, X_DROIT, N_ECH, dev="cuda")

psf = offgrid.Kernel2D('gaussian', {'sigma_psf': 5e-2})
```

[1] https://gitlab.inria.fr/blaville/off-the-grid-python

Implémentation des méthodes sans-grille dans notre `paquet python` [1].

```python
import offgrid

N_ECH = 500; X_GAUCHE = 0; X_DROIT = 1
domain = offgrid.Domain2D(X_GAUCHE, X_DROIT, N_ECH, dev="cuda")

psf = offgrid.Kernel2D('gaussian', {'sigma_psf': 5e-2})
```

```python
m_ax0 = offgrid.Spikes2D([1e1], [[0.2, 0.7]])
y = m_ax0.kernel(domain, psf)

(m_sfw, nrj_sfw, mes_sfw) = offgrid.SFW(y, domain, psf, regul=1e-2,
                                          nIter=1, dev="cuda")
```

[1] `https://gitlab.inria.fr/blaville/off-the-grid-python`

Implémentation des méthodes sans-grille dans notre `paquet python`[1].

```python
import offgrid

N_ECH = 500; X_GAUCHE = 0; X_DROIT = 1
domain = offgrid.Domain2D(X_GAUCHE, X_DROIT, N_ECH, dev="cuda")

psf = offgrid.Kernel2D('gaussian', {'sigma_psf': 5e-2})
```

```python
m_ax0 = offgrid.Spikes2D([1e1], [[0.2, 0.7]])
y = m_ax0.kernel(domain, psf)

(m_sfw, nrj_sfw, mes_sfw) = offgrid.SFW(y, domain, psf, regul=1e-2,
                                        nIter=1, dev="cuda")
```

Output:

```
Computing SFW on cuda device: 100%|--->| 1/1 [00:01<00:00,  1.03it/s]
```

[1] `https://gitlab.inria.fr/blaville/off-the-grid-python`

Illustration de la reconstruction par Sliding Frank-Wolfe [Denoyelle19] :

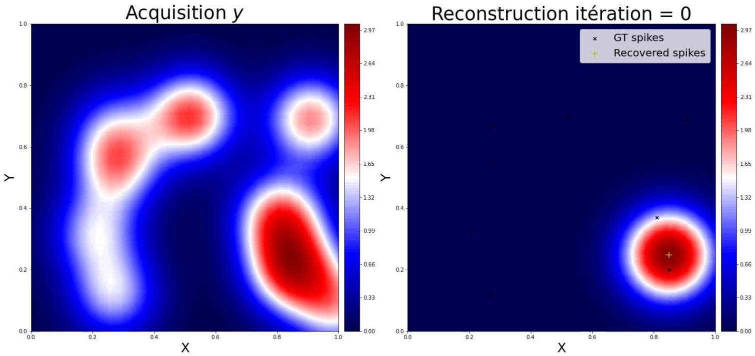
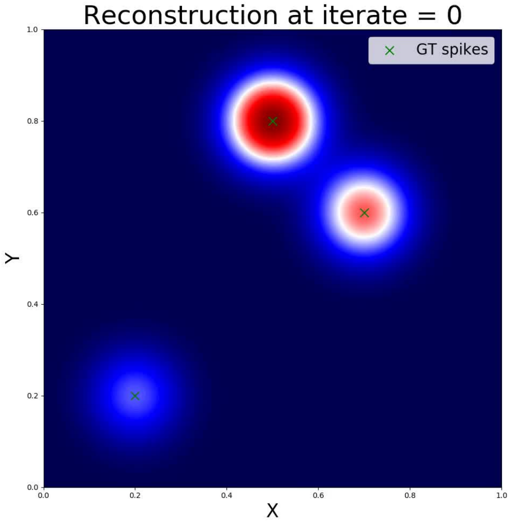


Illustration de la reconstruction par Conic Particle Gradient Flow reconstruction [Chizat20] :



Reconstruction par covariance

Une autre imagerie : SOFI

Imagerie SOFI (*Super-resolution optical fluctuation imaging*) [Dertinger10].

Une autre imagerie : SOFI

Imagerie SOFI (*Super-resolution optical fluctuation imaging*) [Dertinger10].

- beaucoup de fluorophores allumés en même temps ;

Une autre imagerie : SOFI

Imagerie SOFI (*Super-resolution optical fluctuation imaging*) [Dertinger10].

- beaucoup de fluorophores allumés en même temps ;
- indépendance temporelle des fluorophores.

Une autre imagerie : SOFI

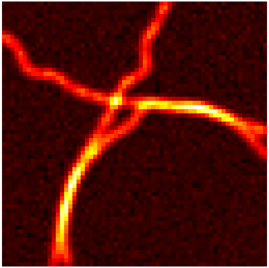
Imagerie SOFI (*Super-resolution optical fluctuation imaging*) [Dertinger10].

- beaucoup de fluorophores allumés en même temps ;
- indépendance temporelle des fluorophores.
- moins nocif pour les structures biologiques étudiées ;

Une autre imagerie : SOFI

Imagerie SOFI (*Super-resolution optical fluctuation imaging*) [Dertinger10].

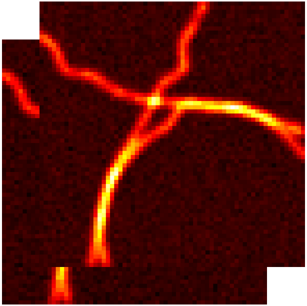
- beaucoup de fluorophores allumés en même temps ;
- indépendance temporelle des fluorophores.
- moins nocif pour les structures biologiques étudiées ;



Une autre imagerie : SOFI

Imagerie SOFI (*Super-resolution optical fluctuation imaging*) [Dertinger10].

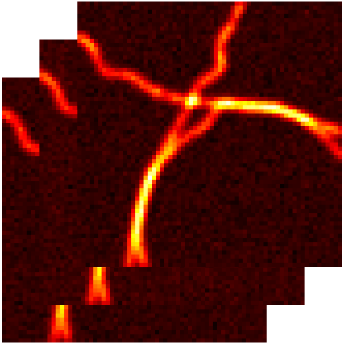
- beaucoup de fluorophores allumés en même temps ;
- indépendance temporelle des fluorophores.
- moins nocif pour les structures biologiques étudiées ;



Une autre imagerie : SOFI

Imagerie SOFI (*Super-resolution optical fluctuation imaging*) [Dertinger10].

- beaucoup de fluorophores allumés en même temps ;
- indépendance temporelle des fluorophores.
- moins nocif pour les structures biologiques étudiées ;



Quantités en jeu

- on effectue des acquisitions (images dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{X})$) sur $[0, T]$;

Quantités en jeu

- on effectue des acquisitions (images dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{X})$) sur $[0, T]$;
- on définit $y : [0, T] \to \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ la pile d'acquisition SOFI ;

Quantités en jeu

- on effectue des acquisitions (images dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{X})$) sur $[0, T]$;
- on définit $y : [0, T] \to \mathrm{L}^2(\mathcal{X})$ la pile d'acquisition SOFI ;
- on cherche à reconstruire une mesure *dynamique* :

$$t \mapsto \mu(t) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\delta_{x_i} \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathcal{M}(\mathcal{X}))$$

qui génère pour presque tout $t \in [0, T]$: $y(t) = \Phi\mu(t)$.

Quantités en jeu

- on effectue des acquisitions (images dans $\mathrm{L}^2\left(\mathcal{X}\right)$) sur $[0,T]$;
- on définit $y : [0,T] \to \mathrm{L}^2\left(\mathcal{X}\right)$ la pile d'acquisition SOFI ;
- on cherche à reconstruire une mesure *dynamique* :

$$t \mapsto \mu(t) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\delta_{x_i} \in \mathrm{L}^2\left(0,T;\mathcal{M}\left(\mathcal{X}\right)\right)$$

qui génère pour presque tout $t \in [0,T]$: $y(t) = \Phi\mu(t)$.

Les cumulants peuvent nous aider à retrouver les positions x_i. Exemple : moyenne temporelle $\bar{y} \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T y(\cdot,t)\,\mathrm{d}t$. On a $\Phi m_{a,x} = \bar{y}$ où $m_{a,x} \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^N \bar{a}_i\delta_{x_i}$.

Construire les problèmes

Si R_y est la covariance temporelle, on a $\forall u, v \in \mathcal{X}$:

Construire les problèmes

Si R_y est la covariance temporelle, on a $\forall u, v \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} R_y(u,v) &\overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \left(y(u,t) - \bar{y}(u)\right)\left(y(v,t) - \bar{y}(v)\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \dots \quad \text{(indépendance des fluctuations [Dertinger10])} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{M_i}_{\text{Variance de } a_i} h(u - x_i)h(v - x_i) \\ &= \int_{\mathcal{X}} h(u-x)h(v-x)\,\mathrm{d}m_{M,x}(x) \\ &= \Lambda m_{M,x}(u,v). \end{aligned}$$

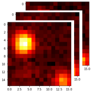
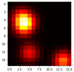
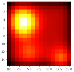
Construire les problèmes

Si R_y est la covariance temporelle, on a $\forall u, v \in \mathcal{X}$:

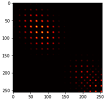
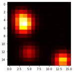
$$\begin{aligned} R_y(u,v) &\overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \left(y(u,t) - \bar{y}(u)\right)\left(y(v,t) - \bar{y}(v)\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \dots \quad \text{(indépendance des fluctuations [Dertinger10])} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{M_i}_{\text{Variance de } a_i} h(u - x_i)h(v - x_i) \\ &= \int_{\mathcal{X}} h(u-x)h(v-x)\,\mathrm{d}m_{M,x}(x) \\ &= \Lambda m_{M,x}(u,v). \end{aligned}$$

$m_{M,x} \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^N M_i \delta_{x_i}$ partage les mêmes positions que $\mu = \sum_{i=1}^N a_i(t)\delta_{x_i}$, on appelle $\Lambda : \mathcal{M}(\mathcal{X}) \to \mathrm{L}^2(\mathcal{X}^2)$ cet « opérateur de covariance ».

Résumé des quantités

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{L}^2(\mathcal{X}) \arrow[dr, "\Phi^*"] & \\
\mathrm{L}^2(0,T,\mathrm{L}^2(\mathcal{X})) \arrow[ur, "\bar{y}"] \arrow[dr, "R_y"'] & \mathcal{M}(\mathcal{X}) \arrow[u, "\Phi"] \arrow[d, "\Lambda"] & \mathscr{C}(\mathcal{X}) \\
 & \mathrm{L}^2(\mathcal{X}^2) \arrow[ur, "\Lambda^*"'] &
\end{tikzcd}
$$

Légende : partie dynamique, partie moyenne temporelle $\bar{y}$ et partie covariance temporelle R_y.

BLASSO on cumulants

Soit $\lambda > 0$,
La reconstruction par covariance s'écrit :

$$\underset{m \in \mathcal{M}(\mathcal{X})}{\operatorname{argmin}} T_\lambda(m) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} \|R_y - \Lambda(m)\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{X}^2)} + \lambda |m|(\mathcal{X}) \qquad (\mathcal{Q}_\lambda(y))$$

BLASSO on cumulants

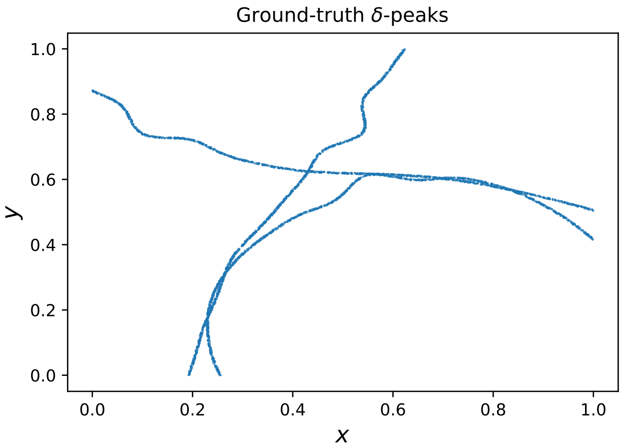
Soit $\lambda > 0$,
La reconstruction par covariance s'écrit :

$$\underset{m \in \mathcal{M}(\mathcal{X})}{\operatorname{argmin}} T_\lambda(m) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} \|R_y - \Lambda(m)\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{X}^2)} + \lambda |m|(\mathcal{X}) \qquad (\mathcal{Q}_\lambda(y))$$

Résultats numériques 2D `SOFItool`

Test sur des filaments 2D issus du ISBI challenge 2016 :

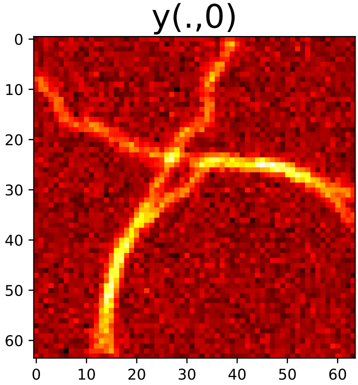
- pile de 1000 acquisitions en 64×64 simulées par `SOFItool` ;
- 8700 émetteurs répartis sur les filaments ; bruit de fond **fort** $+$ bruit de Poisson à $4 +$ bruit gaussien à 1×10^{-2}. SNR $\approx$ 10 db.



Résultats numériques 2D SOFItool

Test sur des filaments 2D issus du ISBI challenge 2016 :

- pile de 1000 acquisitions en 64×64 simulées par `SOFItool` ;
- 8700 émetteurs répartis sur les filaments ; bruit de fond **fort** $+$ bruit de Poisson à 4 $+$ bruit gaussien à 1×10^{-2}. SNR ≈ 10 db.



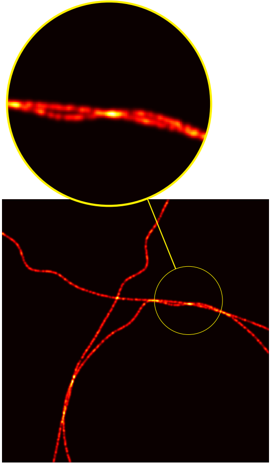


Figure 1: Vérité-terrain

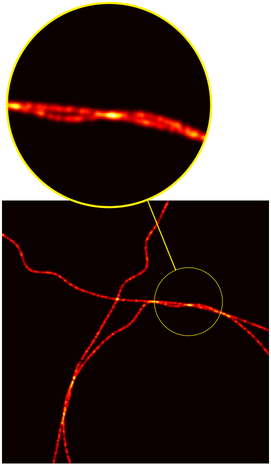


Figure 1: Vérité-terrain

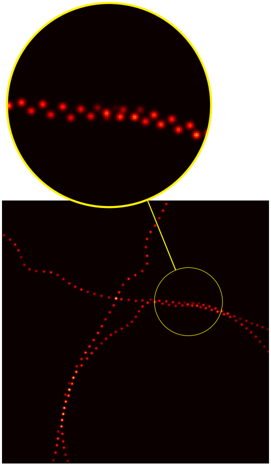


Figure 2: $(\mathcal{Q}_\lambda(y))$

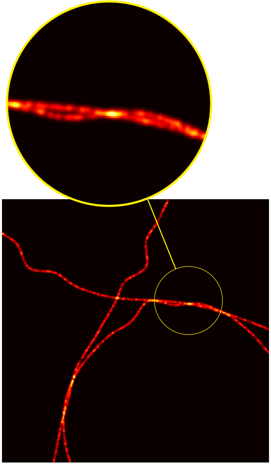


Figure 1: Vérité-terrain

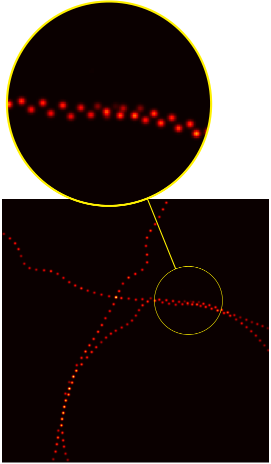


Figure 2: $(\mathcal{Q}_\lambda(y))$

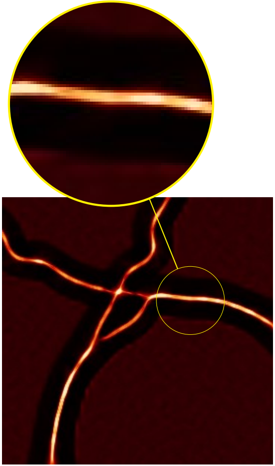
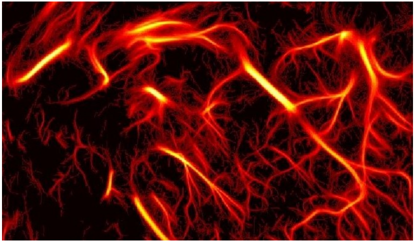


Figure 3: SRRF [Culley18]



Application : paléomagnétisme, imagerie biomédicale, *etc.*

Corollaire (AM$\mathfrak{S}$)

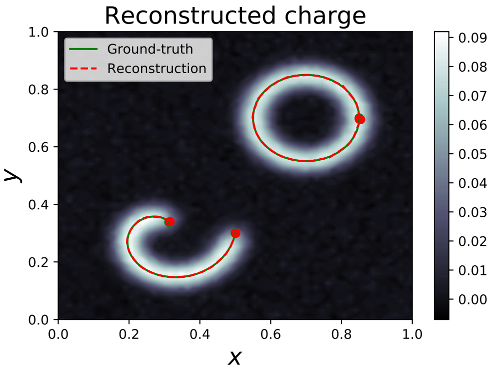
Soit $\mathscr{V} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)^{\mathbf{2}}, \operatorname{div}(\boldsymbol{m}) \in \mathcal{M}\left(\mathcal{X}\right) \right\}$*, le problème CROC admet comme minimiseur une combinaison linéaire finie de courbes :*

$$\underset{\boldsymbol{m}\in\mathscr{V}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|y - \Phi\, \boldsymbol{m}\|_{\mathcal{H}}^2 + \alpha \left(\|\boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}^2} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}} \right). \qquad \text{(CROC)}$$

Corollaire (AM$\mathfrak{S}$)

Soit $\mathscr{V} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\mathcal{X}})^{\boldsymbol{2}}, \operatorname{div}(\boldsymbol{m}) \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \right\}$, *le problème CROC admet comme minimiseur une combinaison linéaire finie de courbes :*

$$\underset{\boldsymbol{m} \in \mathscr{V}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|y - \Phi\, \boldsymbol{m}\|^2_{\mathcal{H}} + \alpha \left(\|\boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}^2} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{m}\|_{\mathrm{TV}} \right). \tag{CROC}$$



Conclusion

Les nouvelles approches

1. approche sans-grille en imagerie SOFI de microscopie fluorescente, reconstruction par covariance ;
2. reconstruction sans-grille de courbes AM$\mathfrak{S}$

Les nouvelles approches

1. approche sans-grille en imagerie SOFI de microscopie fluorescente, reconstruction par covariance ;
2. reconstruction sans-grille de courbes AM$\mathfrak{S}$

Dans le futur :

- étoffer le paquet *python* sans-grille à destination des biologistes (accélération *PyKeOps* ?) ;

Les nouvelles approches

1. approche sans-grille en imagerie SOFI de microscopie fluorescente, reconstruction par covariance ;
2. reconstruction sans-grille de courbes AM$\mathfrak{G}$

Dans le futur :

- étoffer le paquet *python* sans-grille à destination des biologistes (accélération *PyKeOps* ?) ;
- implémentation numérique de CROC/AMG avec une version de *(Sliding) Frank-Wolfe* ;

Les nouvelles approches

1. approche sans-grille en imagerie SOFI de microscopie fluorescente, reconstruction par covariance ;
2. reconstruction sans-grille de courbes AM$\mathfrak{S}$

Dans le futur :

- étoffer le paquet *python* sans-grille à destination des biologistes (accélération *PyKeOps* ?) ;
- implémentation numérique de CROC/AMG avec une version de *(Sliding) Frank-Wolfe* ;
- reconstruction de Diracs dynamiques à partir d'acquisitions vidéos réelles (*tracking*).

Publications pour approfondir :

- *'Off-the-grid curve reconstruction through divergence regularisation: an extreme point result'*. Bastien Laville, Laure Blanc-Féraud, Gilles Aubert. Prépublication avril 2022.
- *'Off-the-grid covariance-based super-resolution microscopy'*. Bastien Laville, Laure Blanc-Féraud, Gilles Aubert. IEEE ICASSP 2022. `DOI : 10.1109/ICASSP43922.2022.9746845`

Disponibles également sur : `https://www-sop.inria.fr/members/Bastien.Laville/` ou `https://cv.archives-ouvertes.fr/bastien-laville`.

Bibliographie I

Yohann de Castro and Fabrice Gamboa. *Exact reconstruction using Beurling minimal extrapolation.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, Elsevier BV, 2012, 395, 336-354

Quentin Denoyelle, Vincent Duval, Gabriel Peyré, Emmanuel Soubies. *The Sliding Frank-Wolfe Algorithm and its Application to Super-Resolution Microscopy*. Inverse Problems, IOP Publishing, In press.

Lenaic Chizat, Francis Bach. *On the Global Convergence of Gradient Descent for Over-parameterized Models using Optimal Transport*. Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS), Dec 2018, Montréal, Canada.

Tamir Bendory, Shai Dekel, Arie Feuer, Robust recovery of stream of pulses using convex optimization, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 442, Issue 2, 2016.

Bibliographie II

- A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems, Amir Beck and Marc Teboulle, SIAM J. IMAGING SCIENCES, 2009.
- Marguerite Frank et Philip Wolfe, « An algorithm for quadratic programming », Naval Research Logistics Quarterly, vol. 3, 1956.
-] J. B. Lasserre, « Moments, positive polynomials and their applications », Imperial College Press Optimization Series, vol. 1, pp. xxii+361, 2010
- K. Bredies and H. K. Pikkarainen, « Inverse problems in spaces of measures », ESAIM Control Optim. Calc. Var., vol. 19, no. 1, pp. 190-218, 2013.
- Lenaic Chizat, Francis Bach. On the Global Convergence of Gradient Descent for Over-parameterized Models using Optimal Transport. Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS), Dec 2018, Montréal, Canada.

Bibliographie III

- Lenaic Chizat. Sparse Optimization on Measures with Over-parameterized Gradient Descent. 2020
- Candès, Emmanuel & Fernandez-Granda, Carlos. (2014). Towards a Mathematical Theory of Super-Resolution. Communications on Pure and Applied Mathematics. 67. 10.1002/cpa.21455.
- Vincent Duval, Gabriel Peyré. Exact Support Recovery for Sparse Spikes Deconvolution. Foundations of Computational Mathematics, Springer Verlag, 2015, 15 (5), pp.1315-1355.
- Thomas Dertinger, Ryan Colyer, Robert Vogel, Jörg Enderlein, and Shimon Weiss, "Achieving increased resolution and more pixels with Superresolution Optical Fluctuation Imaging (SOFI)," Opt. Express 18, 18875-18885 (2010)
- Culley S, Tosheva KL, Matos Pereira P, Henriques R. SRRF: Universal live-cell super-resolution microscopy. Int J Biochem Cell Biol. 2018;101:74-79. doi:10.1016/j.biocel.2018.05.014

Bibliographie IV

Oren Solomon, Maor Mutzafi, Mordechai Segev, and Yonina C. Eldar, "Sparsity-based super-resolution microscopy from correlation information," Opt. Express 26, 18238-18269 (2018)

Sliding Frank-Wolfe

Algorithm 1: *Sliding Frank-Wolfe.*

Entrées: Acquisition $y \in \mathcal{H}$, nombre d'itérations K, $\lambda > 0$

Initialisation : $m^{[0]} = 0$ $N^{[k]} = 0$

for *Récurrence pour l'étape* k, $0 \leq k \leq K$ **do**

Pour $m^{[k]} = \sum_{i=1}^{N^{[k]}} a_i^{[k]} \delta_{x_i^{[k]}}$ telle que $a_i^{[k]} \in \mathbb{R}$, $x_i^{[k]} \in \mathcal{X}$, trouver $x_*^{[k]} \in \mathcal{X}$ tel que :

$$x_*^{[k]} \in \operatorname*{argmax}_{x \in \mathcal{X}} \left|\eta^{[k]}(x)\right| \qquad \text{où} \quad \eta^{[k]}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\lambda}\Phi^*(\Phi m^{[k]} - y),$$

if $\left|\eta^{[k]}(x_*^{[k]})\right| < 1$ **then**

$m^{[k]}$ est la solution du BLASSO. Stop.

else

Calculer $m^{[k+1/2]} = \sum_{i=1}^{N^{[k]}} a_i^{[k+1/2]} \delta_{x_i^{[k+1/2]}} + a_{N^{[k]}+1}^{[k+1/2]} \delta_*^{[k+1/2]}$ telle que :

$$a_i^{[k+1/2]} \in \operatorname*{argmin}_{a \in \mathbb{R}^{N^{[k]}+1}} \frac{1}{2}\|y - \Phi_{x^{[k+1/2]}}(a)\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda\|a\|_1$$

$$\text{pour} \quad x^{[k+1/2]} \stackrel{\text{def.}}{=} \left(x_1^{[k]}, \dots, x_{N^{[k]}}^{[k]}, x_*^{[k]}\right).$$

Calculer $m^{[k+1]} = \sum_{i=1}^{N^{[k+1]}} a_i^{[k+1]} \delta_{x_i^{[k+1]}}$ telle que :

$$(a_i^{[k+1]}, x_i^{[k+1]}) \in \operatorname*{argmax}_{(a,x) \in R} \frac{1}{2}\|y - \Phi_{x^{[k+1/2]}}(a)\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda\|a\|_1$$

end

end

Sortie: Mesure discrète $m^{[k]}$ pour k l'itération d'arrêt.