

# Reconstruction sans-grille de courbes : un algorithme pour la super-résolution

Bastien LAVILLE<sup>1</sup>, Laure BLANC-FÉRAUD<sup>1</sup>, Gilles AUBERT<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université Côte d’Azur, CNRS, Inria, I3S, projet Morpheme, France.

<sup>2</sup>Université Côte d’Azur, CNRS, LJAD, France.

bastien.laville@inria.fr, laure.blanc\_feraud@i3s.unice.fr,  
gilles.aubert@univ-cotedazur.fr

**Résumé** – La microscopie de fluorescence super-résolue est une technique d’imagerie permettant de s’affranchir du flou produit par la diffraction de la lumière, ce qui permet la reconstruction de détails fins des structures biologiques. Plusieurs algorithmes ont été développés dans la littérature à ce titre ; ces techniques sont formulées dans un cadre discret c’est-à-dire que l’image super-résolue repose sur une grille plus fine que les images acquises. À l’inverse, l’optimisation sans-grille n’utilise pas de grille fine et consiste plutôt en une optimisation sur l’espace des mesures, et ce en termes de nombre, d’amplitudes et de positions. La formulation en terme de mesures permet d’imposer un *a priori* structurel permettant de reconstruire des points, des surfaces, *etc.* De récents travaux ont introduit la reconstruction sans-grille de courbes, qui serait particulièrement adaptée dans le cadre biomédical (filaments, vaisseaux sanguins). Dans cet article, nous présentons une mise en œuvre numérique à travers un algorithme appelé *Charge Sliding Frank-Wolfe* de la reconstruction sans-grille de courbes, ainsi que des résultats sur données simulées.

**Abstract** – Super-resolution fluorescence microscopy overcomes blurring arising from light diffraction, allowing the reconstruction of fine scale details in biological structures. Several algorithms have been developed in the literature for this purpose; these techniques are formulated in a discrete framework i.e. the super-resolved image is based on a finer grid than the acquired images. Conversely, gridless optimisation does not use a fine grid and instead consists of an optimisation on the space of measures, in terms of number, amplitude and position. The formulation in measures allows to enforce a structural prior for the reconstruction of points, surfaces, etc. Recent work has introduced gridless reconstruction of curves, which would be particularly tailored for biomedical application (filaments, blood vessels). In this paper, we present a numerical implementation through an algorithm called the *Charge Sliding Frank-Wolfe* for off-the-grid curve reconstruction, as well as results on simulated data.

## 1 Introduction

Dans le cadre de la super-résolution en microscopie de fluorescence, on souhaite reconstruire des détails à partir d’acquisitions bruitées et limitées en résolution pour pouvoir mieux étudier les structures biologiques imagées : les corps observés sont généralement plus petits que la limite de Rayleigh à 200 nm, longueur à laquelle le phénomène de diffraction de la lumière entre en jeu. Cette diffraction provoque un flou de l’image, qui peut être modélisé comme une convolution de l’image par la *fonction d’étalement du point* (PSF) du microscope. Nous voudrions ainsi effectuer la reconstruction des détails fins de l’image, c’est-à-dire éliminer le flou de la diffraction et obtenir une image super-résolue.

Afin d’améliorer la résolution spatiale des techniques de microscopie standard, limitées par la diffraction, on dispose de plusieurs techniques de microscopie à fluorescence, comme la localisation de molécules unique ou l’illumination structurelle [1]. Ces techniques sont formulées en termes d’optimisation où l’inconnue est une image définie sur une grille plus fine que les images observées. *A contrario*, cet article se propose de définir une méthode utilisant l’approche variationnelle *sans-grille*, qui

repose sur l’optimisation d’une fonctionnelle convexe définie sur l’espace des mesures de Radon, dont le BLASSO constitue l’exemple le plus célèbre [2, 3, 4]. Il consiste en une reconstruction de sources ponctuelles modélisées par des mesures de Dirac, dont la position dans le support continu de l’image n’est pas contraint sur une grille. Cette reconstruction dispose qui plus est de garanties théoriques, fournissant des bornes quantifiant l’écart entre la source et la reconstruction [5]. L’optimisation variationnelle sans-grille ne se limite cependant pas à la reconstruction de structures ponctuelles, et elle bénéficie des récents progrès sur la reconstruction de source surfaciques [6], sinusoïdales [7], de trajectoires [8], *etc.*

Dans de précédents travaux [9], les auteurs ont établi les fondements théoriques d’une reconstruction sans-grille de source portées par des courbes dans des images 2D, en formulant un régularisateur favorisant cette géométrie, ainsi qu’une fonctionnelle dont le *minimum* est une somme de courbes.

Dans cet article, nous proposons, après un bref rappel sur la fonctionnelle (CROC), de mettre en œuvre numériquement ce problème variationnel sans-grille; nous présentons ensuite la super-résolution réalisée par notre méthode sur des données simulées. Cette méthode produit ainsi des résultats convaincants

avec un seul paramètre à régler, et ce, sans recourir à un ensemble de données d'apprentissage.

## 2 Formulation

### 2.1 Cadre théorique

Soit  $\mathcal{X}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ . L'optimisation variationnelle *sans-grille*, ou *par-delà la grille* (pour *off-the-grid* et *gridless*) repose sur l'utilisation d'une fonctionnelle convexe dans un espace de mesures. Ce cadre de travail généralise l'optimisation sur les fonctions intégrables  $L^1(\mathcal{X})$ , et permet de s'affranchir des limites inhérentes à l'introduction d'une grille fine. Le lecteur intéressé pourra se référer à l'état de l'art [10] pour obtenir plus de détails.

On note  $\mathcal{M}(\mathcal{X})$  l'espace des mesures de Radon, défini comme le dual topologique des fonctions continues évanescentes [10]. C'est un espace de Banach pour la norme de la *variation totale* notée  $\|\cdot\|_{TV}$ . La mesure de Dirac  $\delta_x$  en un point  $x \in \mathcal{X}$  est un exemple d'élément de  $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ , et qui a fait l'objet de nombreux travaux dans la communauté [3, 2, 5, 4]. Ces articles se proposent ainsi de reconstruire des mesures ponctuelles (ou 0-rectifiable) à partir d'une image altérée (flou, bruits) et parviennent à des résultats numériques très convaincants [11, 10]. Le cadre des mesures ponctuelles a été récemment élargi aux mesures surfaciques [6], c'est-à-dire dont le support est un objet géométrique 2-rectifiable, et finalement aux mesures linéiques [9] donc les mesures 1-rectifiables, celles dont le support est une courbe. Nous rappelons dans la suite les résultats théoriques de ce dernier article.

Soit  $\mathcal{M}(\mathcal{X})^2$  l'espace des mesures vectorielles 2D, défini comme le dual des fonctions continues vectorielles. On appelle  $\mathcal{V}$  l'espace des *champs de vecteurs à divergence finie*, ou encore *charges* [12], à savoir l'espace des mesures de Radon vectorielles à divergence au sens des distributions finie :

$$\mathcal{V} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \mathbf{m} \in \mathcal{M}(\mathcal{X})^2, \text{div}(\mathbf{m}) \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \right\}.$$

C'est un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}} \stackrel{\text{def.}}{=} \|\cdot\|_{TV^2} + \|\text{div}(\cdot)\|_{TV}$ . La *mesure portée par une courbe*  $\mu_\gamma$  pour  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$  une courbe de Lipschitz paramétrée, est en particulier un élément de  $\mathcal{V}$ . Elle se définit comme :

$$\forall \psi \in \mathcal{C}_0(\mathcal{X})^2, \quad \langle \mu_\gamma, \psi \rangle_{\mathcal{M}(\mathcal{X})^2} \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^1 \psi(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt.$$

En particulier,  $\text{div} \mu_\gamma = \delta_{\gamma(0)} - \delta_{\gamma(1)}$ . La courbe est dite *simple* si  $\gamma$  est une application injective sur  $[0, 1]$ .

Soit  $\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}$  l'opérateur d'acquisition et  $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$  l'image effectivement acquise dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{R}^m$ , typiquement  $\mathbf{y} = \Phi \mu_\gamma + w$  où  $w$  est la réalisation d'un bruit blanc. On définit maintenant la fonctionnelle suivante dénommée (CROC) pour *Curves Represented On Charges* pour  $\alpha > 0$  :

$$\underset{\mathbf{m} \in \mathcal{V}}{\text{argmin}} T_\alpha(\mathbf{m}) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{m}\|_{\mathcal{H}}^2 + \alpha \|\mathbf{m}\|_{\mathcal{V}}. \quad (\text{CROC})$$

Elle admet un *minimum* qui est une somme de mesures normalisées portées par des courbes, plus précisément des éléments de l'ensemble :

$$\mathfrak{S} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \frac{\mu_\gamma}{\|\mu_\gamma\|_{\mathcal{V}}}, \gamma \text{ est une courbe Lipschitz simple} \right\}.$$

Ce résultat est un corollaire du théorème principal de [9], il permet alors d'entreprendre la mise en œuvre numérique, qui constitue la nouveauté de cet article : les algorithmes sans-grille sont en effet écrits avec des algorithmes gloutons, qui ajoutent itérativement des fonctions pourvues d'une structure définie par le régulariseur, ici typiquement les éléments de  $\mathfrak{S}$ .

### 2.2 Mise en pratique

Dans cette partie, nous illustrerons nos propos avec un exemple synthétique de reconstruction de courbes, à partir d'une image floutée et bruitée. Il convient ceci dit de noter que l'algorithme 1 est formulé dans un cadre général, et que nous proposons ici une illustration avec un problème de super-résolution pour des raisons pédagogiques.

Nous employons dans la suite un algorithme glouton utilisé dans les méthodes sans-grille, l'algorithme du gradient conditionnel, aussi appelé *Frank-Wolfe* [13]. Appliqué à (CROC) il consiste en un ajout itératif de mesures portées par des courbes à la mesure reconstruite. L'algorithme a ainsi l'avantage de n'utiliser que le gradient de la fonction de coût, au contraire d'un algorithme proximal écrit en termes de distance euclidienne, qui n'a pas d'équivalent sur  $\mathcal{M}(\mathcal{X})$  et par extension sur  $\mathcal{V}$ . Un exemple d'une source  $T$  ainsi que l'image bruitée et sous-résolue notée  $g$  correspondantes sont représentés en figure 1.

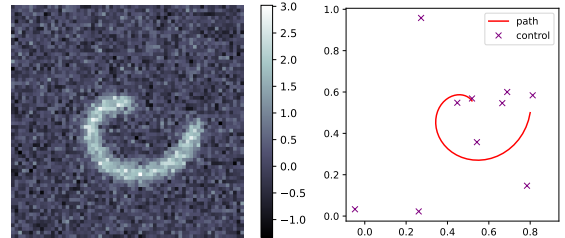


FIGURE 1 – À gauche : Une image  $g$  issue de l'observation de  $T$  composée d'une spirale  $\mu_1$ . À droite : le support que nous souhaitons reconstruire, ici paramétrée par une courbe de Bézier contrôlée par les croix.

Une question centrale dans la mise en œuvre de l'algorithme réside dans le choix de l'opérateur d'acquisition  $\Phi$ , dans le sens où il relie la mesure vectorielle aux données observées  $g$  ou à des données  $\mathbf{y}$  issues de  $g$ . Il dicte en effet sur quelle caractéristique nous souhaitons comparer notre reconstruction et les

données, et dans la mesure où  $\mu_\gamma$  est une quantité vectorielle, on s'attend à ce qu'il en soit de même pour  $y$ . Le choix de  $\Phi$  tel que  $y$  soit le gradient d'une image semble ici assez naturel, car il incorpore la dimension vectorielle de  $\mu_\gamma$ , tout en permettant d'interpréter le certificat  $\eta$  [9] dans ce cas comme le laplacien du support des mesures. Le certificat permet en effet d'estimer au début d'une itération une nouvelle courbe à rajouter à la mesure estimée, et le laplacien est connu pour « exploser » au voisinage du support d'une courbe : il est donc tout à fait adapté pour trouver le support de la courbe à rajouter à la mesure estimée. Nous considérons ainsi l'opérateur  $\Phi$  avec le noyau  $\varphi(x)$ , typiquement la dérivée de la gaussienne, gaussienne qui provient de la modélisation de la PSF du microscope. Ainsi avec l'écart-type  $\sigma > 0$  et pour  $x \in \mathcal{X}$  :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \varphi(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi\sigma} \begin{pmatrix} -x_1 e^{-\frac{(x_1-1)^2}{2\sigma^2}} \\ -x_2 e^{-\frac{(x_2-1)^2}{2\sigma^2}} \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq n}.$$

L'acquisition  $y$  sera donc le gradient de l'image  $g$  évoqué en figure 1, ce gradient est présenté en figure 2. Ici  $\sigma = 3 \times 10^{-2}$  et le bruit additif gaussien est d'écart-type  $\sigma_b = 4 \times 10^{-1}$ .

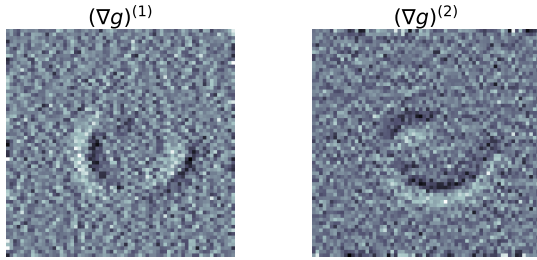


FIGURE 2 – Les deux composantes de  $y = \nabla g$ , qui est la donnée pertinente pour le terme d'attache aux données (CROC). Notons que le bruit affectant l'image a un effet encore plus important sur son gradient, de sorte qu'une stratégie de débruitage du gradient devra être adoptée, en particulier pour les images expérimentales.

Ce choix d'opérateur pourrait encore être affiné (l'on pourrait étudier le tenseur de structure par exemple) et fera l'objet de prochains travaux.

Il convient ensuite de préciser quelques notations. Dans la suite, une mesure normalisée portée par une courbe sera notée  $\nu_\gamma \stackrel{\text{def.}}{=} \mu_\gamma / \|\mu_\gamma\|_\gamma$ . La longueur d'une courbe  $\gamma$  est donnée par  $\ell(\gamma) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{H}_1(\gamma([0, 1]))$  et l'équivalent de sa norme  $\mathcal{V}$  est donnée par  $\ell_{\text{div}}(\gamma)$  :

$$\ell_{\text{div}}(\gamma) = \begin{cases} \ell(\gamma) + 2 & \text{si } \gamma \text{ ouverte.} \\ \ell(\gamma) & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'algorithme général permettant de reconstruire une combinaison linéaire de courbes est détaillé en Algorithme 1.

---

### Algorithme 1 : Charge Sliding Frank-Wolfe (CSFW)

---

**Entrées :** Acquisition  $y \in \mathcal{H}$ , nombre d'itérations  $K$ , paramètre de régularisation  $\alpha > 0$ .

- 1 Initialisation :  $m^{[0]} = 0, N^{[k]} = 0$ .
- 2 **pour**  $k, 0 \leq k \leq K$  **faire**
- 3   Pour  $m^{[k]} = \sum_{i=1}^{N^{[k]}} a_i^{[k]} \nu_{\gamma_i}^{[k]}$  tel que  $a_i^{[k]} \in \mathbb{R}, \nu_{\gamma_i}^{[k]} \in \mathfrak{S}$ , soit le certificat
 
$$\eta^{[k]}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\alpha} \Phi^*(\Phi m^{[k]} - y).$$
- 4   Trouver  $\gamma_*^{[k]} \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$  tel que :
 
$$\gamma_* \in \operatorname{argmax}_{\gamma \in \mathcal{S}(\mathcal{X})} \frac{1}{\ell_{\text{div}}(\gamma)} \int_0^1 \eta^{[k]}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt.$$
- 5   **si**  $\|\eta^{[k]}(\gamma_*)\|_{\infty, \mathcal{X}} \leq 1$  **alors**  
    |  $m^{[k]}$  est la solution de CROC. Stop.
- 6   **sinon**
- 7     Calculer  $m^{[k+1/2]} = \sum_{i=1}^{N^{[k]}} a_i^{[k+1/2]} \nu_{\gamma_i} + a_{N^{[k]}+1}^{[k+1/2]} \nu_{\gamma_*^{[k+1/2]}}$  tel que :
 
$$a_i^{[k+1/2]} \in \operatorname{argmin}_{a \in \mathbb{R}^{N^{[k]}+1}} T_\alpha \left( \sum_{i=1}^{N^{[k]}} a_i \nu_{\gamma_i}^{[k]} + a_{N^{[k]}+1} \nu_{\gamma_*^{[k+1/2]}} \right)$$
- 8     Calculer  $m^{[k+1]} = \sum_{i=1}^{N^{[k+1]}} a_i^{[k+1]} \nu_{\gamma_i}$ , résultat de l'optimisation initialisée avec  $m^{[k+1/2]}$  :
 
$$(a^{[k+1]}, \nu_{\gamma}^{[k+1]}) \in \operatorname{argmin}_{(a, \gamma) \in \mathbb{R}^{N^{[k]}+1} \times \mathcal{S}(\mathcal{X})^{N^{[k]}+1}} T_\alpha \left( \sum_{i=1}^{N^{[k]}+1} a_i \nu_{\gamma_i}^{[k]} \right).$$
- 9     Prendre  $m^{[k+1]} = \sum_{i=1}^{N^{[k]}+1} a_i^{[k+1]} \nu_{\gamma_i}^{[k+1]}$ . Éliminer les atomes de faible amplitude.
- 12   **fin**
- 13 **fin**

**Résultat :** Charge  $m^{[k]}$  où  $k$  est l'itération d'arrêt.

---

## 3 Résultats numériques

Un choix essentiel dans la mise en œuvre numérique réside dans le choix de la discrétisation des courbes  $\gamma$  et par extension des mesures portées par des courbes  $\nu_\gamma$ . Nous nous proposons ici de réaliser cette paramétrisation à l'aide des courbes de Bézier : elles sont totalement définies par des points de contrôle  $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_p)$  définis par la représentation paramétrique  $\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^p B_i^p(t) \mathbf{P}_i$ , pour tout  $t \in [0, 1]$  et  $B_i^p$  les polynômes de Bernstein. L'intérêt pratique de ce choix réside

en ce que les courbes de Bézier nécessitent beaucoup moins de points que les courbes polygonales pour représenter une courbe lisse, ce qui implique moins de points/variables d'optimisation donc un coût en calcul plus faible. D'autres choix de paramétrisations tels que les *splines* mériteraient d'être étudiés, de même que les garanties de reconstruction selon le nombre de points de contrôle utilisés pour représenter les courbes.

L'algorithme 1 travaille donc avec une courbe de Bézier, paramétrée par 10 points de contrôle seulement. En pratique, l'étape convexe en ligne 7–8 est estimée avec la méthode BFGS, et l'étape non-convexe est résolue avec un algorithme de gradient stochastique tel qu'Adam. Une implémentation CUDA<sup>1</sup> est proposée pour les images plus grandes, garantissant la reconstruction de la source à partir d'une image de  $512 \times 512$  en moins de 4 minutes sur une *Nvidia GeForce GTX 1070 Ti*. La reconstruction réalisée par l'algorithme CSFW permet d'obtenir le résultat en figure 3.

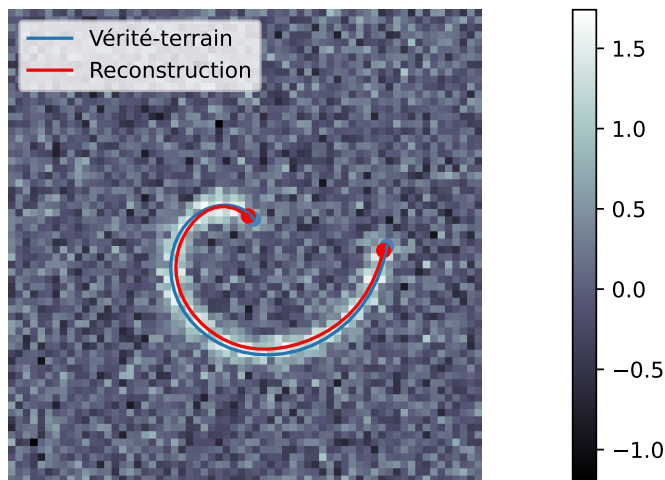


FIGURE 3 – Reconstruction de la source par l'algorithme *Charge Sliding Frank-Wolfe*.

La courbe reconstruite bénéficie d'une bonne régularité, tout en suivant assez fidèlement le support de la courbe source. La reconstruction est légèrement plus recroquevillée vers l'intérieur de la courbe que la source, à cause de la régularisation de la longueur, à savoir le terme  $\|\cdot\|_{TV^2}$ .

## 4 Conclusion

Cet article s'est proposé, à partir des derniers raffinements de la littérature sans-grille, d'introduire un nouvel algorithme appelé *Charge Sliding Frank-Wolfe* pour effectuer une reconstruction sans-grille de courbes, en le mettant concrètement en œuvre et en obtenant les premiers résultats sur un problème synthétique de super-résolution. Dans de prochains travaux, nous essaierons d'appliquer la reconstruction de structures courbes avec des données simulées plus compliquées (croisement, contraste

faible) en perspective d'une utilisation sur des données réelles, tout en étudiant plus en détail les propriétés numériques de notre algorithme.

## 5 Remerciements

Les travaux de BL ont été financés par l'État français au titre du fonds UCA DS4H Investissement d'Avenir, piloté par l'Agence Nationale pour la Recherche (ANR) avec la référence ANR-17-EURE-0004. Les travaux de LBF ont bénéficié d'une aide de l'État français au titre du fonds 3IA Côte d'Azur Investissement d'Avenir, piloté par l'ANR avec la référence ANR-19-P3IA-0002. Ces travaux ont été en partie financés par l'ANR Micro-Blind avec la référence ANR-21-CE48-0008.

## Références

- [1] D. SAGE, H. KIRSHNER, T. PENGO, N. STURMAN, J. MIN, S. MANLEY et M. UNSER, « Quantitative evaluation of software packages for single-molecule localization microscopy », *Nature Methods*, vol. 12, p. 717–724, jun 2015.
- [2] K. BREDIES et H. K. PIKKARAINEN, « Inverse problems in spaces of measures », *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 19, p. 190–218, mar 2012.
- [3] E. J. CANDÈS et C. FERNANDEZ-GRANDA, « Towards a mathematical theory of super-resolution », *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 67, p. 906–956, apr 2013.
- [4] Y. de CASTRO et F. GAMBOA, « Exact reconstruction using beurling minimal extrapolation », *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 395, p. 336–354, nov 2012.
- [5] V. DUVAL et G. PEYRÉ, « Exact support recovery for sparse spikes deconvolution », *Foundations of Computational Mathematics*, vol. 15, p. 1315–1355, oct 2014.
- [6] Y. de CASTRO, V. DUVAL et R. PETIT, « Towards off-the-grid algorithms for total variation regularized inverse problems », in *Lecture Notes in Computer Science*, p. 553–564, Springer International Publishing, 2021.
- [7] R. PARHI et R. D. NOWAK, « On continuous-domain inverse problems with sparse superpositions of decaying sinusoids as solutions », in *ICASSP 2022 - 2022 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, IEEE, may 2022.
- [8] K. BREDIES, M. CARIONI, S. FANZON et F. ROMERO, « On the extremal points of the ball of the benamou–brenier energy », *Bulletin of the London Mathematical Society*, jun 2021.
- [9] B. LAVILLE, L. BLANC-FÉRAUD et G. AUBERT, « Off-the-grid curve reconstruction through divergence regularisation : an extreme point result. ». To be published in SIIMS (SIAM), 2023.
- [10] B. LAVILLE, L. BLANC-FÉRAUD et G. AUBERT, « Off-The-Grid Variational Sparse Spike Recovery : Methods and Algorithms », *Journal of Imaging*, vol. 7, p. 266, déc. 2021.
- [11] Q. DENOYELLE, V. DUVAL et G. PEYRÉ, « Support Recovery for Sparse Super-Resolution of Positive Measures », *Journal of Fourier Analysis and Applications*, Sep 2016.
- [12] S. K. SMIRNOV, « Decomposition of solenoidal vector charges into elementary solenoids, and the structure of normal one-dimensional flows », *St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences*, vol. 5, no. 4, p. 206–238, 1993.
- [13] M. FRANK et P. WOLFE, « An algorithm for quadratic programming », *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 3, p. 95–110, mar 1956.

1. voir <https://gitlab.inria.fr/blaville/amg>