Εθνικο & Καποδιστριακο Πανεπιστημιο Αθηνων
Τμημα Πληροφορικης & Τηλεπικοινωνιων, ΠΜΣ Υπολογιστικη Επιστημη
Εργασία για το μάθημα: *«Υπολογιστική Άλγεβρα»*
Διδάσκοντες: *Ιωάννης Εμίρης, Ευάγγελος Ράπτης*
Χειμερινό Εξάμηνο 2006-2007
Άγγελος Μαντζαφλάρης, Μ901, amantzaf@math.uoa.gr

Απομόνωση πραγματικών ριζών με χρήση πινάκων πολλαπλασιασμού

Σε αυτήν την εργασία θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο για την εύρεση ανοικτών χωρίων του $\mathbb{R}^n$, καθένα από τα οποία περιέχει μια ακριβώς ρίζα του καλώς ορισμένου συστήματος πολυωνύμων

$$(\Sigma)\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=0\\ \qquad\vdots\\ f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=0\end{cases}$$

όπου $f_i \in \mathbb{R}[\underline{x}]$.

Η μέθοδος στηρίζεται στους πίνακες πολλαπλασιασμού(multiplication maps). Αυτοί εκφράζουν τον πολλαπλασιασμό στο δακτύλιο-πηλίκο του ιδεώδους που παράγεται από το σύστημα, και μπορούν να προσδιοριστούν με διάφορους τρόπους· βρίσκοντας μια βάση Groebner του συστήματος ή γενικά με οποιονδήποτε αλγόριθμο κανονικής μορφής(normal form algorithm). Αφού βρεθούν οι πίνακες αυτοί έχουμε και πάλι διάφορους τρόπους να τους χρησιμοποιήσουμε ώστε να προσεγγίσουμε τις πραγματικές ρίζες, όπως για παράδειγμα να αναγάγουμε το πρόβλημα σε πρόβλημα μιας διάστασης(μέσω της Ρητής Μονοδιάστατης Αναπαράστασης) και να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Uspensky ή τις ακολουθίες Sturm-Habicht.

Εδώ θα παρουσιάσουμε έναν τρόπο να υπολογιστούν οι πίνακες πολλαπλασιασμού με χρήση του πίνακα Macaulay. Κατόπιν θα καταμετρήσουμε τις πραγματικές ρίζες σε ένα χωρίο με χρήση του θεωρήματος Hermite και του κανόνα Descartes.

Ο δακτύλιος-πηλίκο

Θεωρούμε το ιδεώδες $\mathcal{I}=\langle f_1,f_2,\dots,f_n\rangle$. Στη γενική περίπτωση $\dim\mathcal{I}=0$. Ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας $\equiv$ στο $\mathbb{R}[\underline{x}]$, ως εξής: $g\equiv h \iff g-h\in\mathcal{I}$. Ο δακτύλιος των πολυωνύμων $\mathbb{R}[\underline{x}]$ διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την παραπάνω σχέση (κλάσεις ισοδυναμίας modulo $\mathcal{I}$). Περιγράφουμε κάθε κλάση με έναν *αντιπρόσωπο*.

Ορισμός 1. *Το σύνολο $\mathcal{A}={}^{\mathbb{R}[\underline{x}]}/_{\mathcal{I}}$ των κλάσεων ισοδυναμίας καλείται δακτύλιος-πηλίκο(quotient ring).*

Παράδειγμα 1. Έστω $\mathcal{I}\lhd\mathbb{R}[x]$, $\mathcal{I}=\langle x^2+1\rangle$. Είναι $x^2+3\equiv x^4+x^2+2\equiv 2 \mod \mathcal{I}$, επειδή $x^4+x^2+2-2=x^2(x^2+1)\in\mathcal{I}$, $x^4+x^2+2-(x^2+3)=(x^2-1)(x^2+1)\in\mathcal{I}$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι $\mathcal{A}=\{[\alpha x+\beta]\ :\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$. Άρα η κλάση $[2]\in\mathcal{A}$ περιέχει τα $2,\ x^2+3,\ x^4+x^2+2$(και άπειρα επιπλέον πολυώνυμα).

Γνωρίζουμε ότι ο δακτύλιος $\mathbb{R}[\underline{x}]$ είναι διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης υπεράνω του $\mathbb{R}$(μια βάση είναι η $\{x_i^k\ :\ 1\le i\le n,\ k\in\mathbb{N}_0\}$). Το πηλίκο κληρονομεί αυτή τη δομή:

Θεώρημα 1. *Το $\mathcal{A}$ είναι $\mathbb{R}-$διανυσματικός χώρος, ενδεχομένως άπειρης διάστασης.*

Ειδικότερα, ισχύει το παρακάτω

Θεώρημα 2. *Το σύστημα (Σ) έχει πεπερασμένο πλήθος ριζών αν και μόνο αν το $\mathcal{A}$ είναι πεπερασμένος διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.*

Παράδειγμα 2. Έστω $\mathcal{I}\lhd\mathbb{R}[x]$, $\mathcal{I}=\langle x^2+1\rangle$. Είναι $\mathcal{A}=\{[\alpha x+\beta]\ :\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$, άρα μια βάση του $\mathcal{A}$ είναι η $\{[1],[x]\}$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, πράγματι το x^2+1 έχει πεπερασμένο πλήθος ριζών, δύο: $\pm i$.

Πίνακες πολλαπλασιασμού

Υποθέτουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων. Τότε το $\mathcal{A}$ είναι πεπερασμένος διανυσματικός χώρος. Έστω $h \in \mathbb{R}[\underset{\sim}{x}]$. Ο πολλαπλασιασμός $[h] \cdot [g] = [h \cdot g] \in \mathcal{A}$ εκφράζεται από μια γραμμική απεικόνιση

$$m_h : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad , \quad g \longmapsto m_h(g) = hg \mod \mathcal{I}$$

Συμβολίζουμε $\hat{m}_h$ τον πίνακα της m_h, ως προς κάποια βάση του πηλίκου.

Είναι εύκολο να επαληθευτούν οι ιδιότητες $m_{f+g} = m_f + m_g$ και $m_{fg} = m_f \circ m_g$. Επίσης, αν $h \in \mathbb{R}[t]$ ισχύει $m_{h(f)} = h(m_f)$.

Παράδειγμα 3. Έστω $\mathcal{I} = \langle x^2 + 1 \rangle$, $\mathcal{A} = \{\alpha x + \beta \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Μια βάση είναι του $\mathcal{A}$ είναι η $\{1, x\}$. Θεωρούμε $f(x) = x$. Είναι $m_x(\alpha x + \beta) = x(\alpha x + \beta) = \alpha x^2 + \alpha - \alpha + \beta x = \beta x - \alpha \mod \mathcal{I}$. Μπορούμε να προσδιορίσουμε τον πίνακα πολλαπλασιασμού: $\hat{m}_x \cdot \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{m}_x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ένας πίνακας πολλαπλασιασμού ορίζει μια συμμετρική διγραμμική μορφή, με χρήση του ίχνους:

Ορισμός 2. *Το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων ενός πίνακα καλείται ίχνος του πίνακα:* $tr(A) = \sum a_{ii}$

Ορισμός 3. *Έστω* $f_0 \in \mathbb{R}[\underset{\sim}{x}]$. *Ορίζουμε την απεικόνιση (συμμετρική διγραμμική μορφή)*

$$S_{f_0}(h,g) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R} \quad , \quad (h,g) \mapsto S_{f_0}(h,g) = tr(m_{f_0} \circ m_{hg})$$

Ο πίνακας της απεικόνισης ως προς μια βάση $B = \{\underset{\sim}{x}^{b_1}, \ldots, \underset{\sim}{x}^{b_n}\}$ *του* $\mathcal{A}$ *είναι* $M_{f_0} = \left(tr(\hat{m}_{f_0} \cdot \hat{m}_{\underset{\sim}{x}^{b_i+b_j}})\right)$.

Παράδειγμα 4. Για το $f_0(x) = 1$ είναι $S_1(h,g) = \mathrm{tr}(m_{hg})$ και $M_1 = \left(\mathrm{tr}(m_{\underset{\sim}{x}^{b_i}} \circ m_{\underset{\sim}{x}^{b_j}})\right) = \left(\mathrm{tr}(m_{\underset{\sim}{x}^{b_i+b_j}})\right)$.

Ο πίνακας M_{f_0} μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για το πλήθος των πραγματικών ριζών του συστήματος (Σ), με περιορισμούς που εξαρτιούνται από το f_0, π.χ. πλήθος ριζών όταν $f_0 > 0$. Πριν φτάσουμε σε αυτό όμως, πρέπει να έχουμε έναν τρόπο να υπολογίσουμε τον πίνακα αυτό. Εδώ θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο που στηρίζεται στον πίνακα Macaulay.

Πίνακας Macaulay

Θεωρούμε $f_0 = u_0 + u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n$. Ο πίνακας Macaulay του υπερπροσδιορισμένου συστήματος κατασκευάζεται έτσι ώστε οι στήλες του να αντιστοιχούν στα μονώνυμα του συνόλου $C = \{\underset{\sim}{x}^\alpha \ : \ \deg \underset{\sim}{x}^\alpha \leq \sum d_i - n\}$. Αν θέσουμε $C_i = \left\{\underset{\sim}{x}^\alpha \in \left(C - \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j\right) \ : \ \alpha_i \geq d_i\right\}$ για $i = 1, \ldots, n$ και κατόπιν $B_i := \left\{\frac{\underset{\sim}{x}^\alpha}{x_i^{d_i}} \ : \ x^\alpha \in C_i\right\}$, $B_0 = \{\underset{\sim}{x}^\alpha \ : \ 0 \leq \alpha_i \leq d_i - 1\}$ οι γραμμές του πίνακα Macaulay είναι τα μονώνυμα του B_i πολλαπλασιασμένα με το f_i.

Χωρίζουμε τον M σε blocks, ώστε οι συντελεστές του f_0 να βρίσκονται στην πρώτη block-γραμμή και πολλαπλασιάσουμε από αριστερά με κατάλληλο πίνακα, ώστε να λάβουμε έναν, όμοιο με τον αρχικό, άνω τριγωνικό πίνακα:

$$\begin{bmatrix} I & -M_{12}M_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M' & \mathbf{0} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας που προκύπτει στην πρώτη θέση λέγεται συμπλήρωμα Schur: $M' = M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}$.

Παράδειγμα 5. Έστω $f_1 = 2x - 2y + 1,\ f_2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$. Θεωρούμε $f_0 = u_0 + u_1 x + u_2 y$. Είναι $C = \{1, y, x, xy, x^2, y^2\}$. Υπολογίζουμε $B_1 = \{1, y, x\},\ B_2 = \{1\},\ B_0 = \{1, y\}$. Τελικά

$$M = \left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cccc} u_0 & u_2 & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & 0 & u_1 & 0 & u_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad , \quad M' = \begin{bmatrix} u_0 - \frac{1}{2} u_1 & u_2 + u_1 \\ -\frac{9}{8} u_1 - \frac{9}{8} u_2 & u_0 + 2 u_1 + \frac{5}{2} u_2 \end{bmatrix}$$

Όλες οι πληροφορίες που χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε τον M_{f_0} δίνονται από τον πίνακα Macaulay. Ακολουθούν τα σχετικά θεωρήματα.

Θεώρημα 3. *Το* $B_0 = \{\underset{\sim}{x}^\alpha \ :\ 0 \le \alpha_i \le d_i - 1\}$ *είναι βάση του* $\mathcal{A} = \mathbb{R}[\underset{\sim}{x}]/\mathcal{I}$.

Θεώρημα 4. *Ο πίνακας της* $m_{f_0} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}\ ,\ g \mapsto m_{f_0}(g) = f_0 g \mod \mathcal{I}$ *είναι ο ανάστροφος του συμπληρώματος Schur:* $\hat{m}_{f_0} = M'^T$.

Αναλύοντας τον M' λαμβάνουμε τους στοιχειώδεις πίνακες πολλαπλασιασμού με κάθε μεταβλητή: $M'^T = u_0 I + u_1 \hat{m}_{x_1} + \cdots + u_n \hat{m}_{x_n}$. Είδαμε ότι ο πίνακας της S_{f_0} είναι $M_{f_0} = \left(\operatorname{tr}(\hat{m}_{f_0} \cdot \hat{m}_{\underset{\sim}{x}^{b_i + b_j}})\right)$. Έχοντας τους $\hat{m}_{x_i}$ μπορούμε να υπολογίσουμε τους $\hat{m}_{\underset{\sim}{x}^{b_i+b_j}}$ και τελικά τον M_{f_0}.

Παράδειγμα 6. (συνέχεια) Από τον M' εύκολα βλέπουμε ότι

$$\hat{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{m}_y = \begin{bmatrix} 0 & -9/8 \\ 1 & 5/2 \end{bmatrix}, \quad \hat{m}_{f_0} = \begin{bmatrix} u_0 - \frac{1}{2} u_1 & -\frac{9}{8} u_1 - \frac{9}{8} u_2 \\ u_2 + u_1 & u_0 + 2 u_1 + \frac{5}{2} u_2 \end{bmatrix}$$

Έτσι υπολογίζουμε τον πίνακα της S_{f_0}

$$M_{f_0} = \begin{bmatrix} \operatorname{tr}(\hat{m}_{f_0} \hat{m}_1) & \operatorname{tr}(\hat{m}_{f_0} \hat{m}_y) \\ \operatorname{tr}(\hat{m}_{f_0} \hat{m}_y) & \operatorname{tr}(\hat{m}_{f_0} \hat{m}_y^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_0 + \frac{3}{2} u_1 + \frac{5}{2} u_2 & \frac{5}{2} u_0 - \frac{11}{4} u_1 + 4u_2 \\ \frac{5}{2} u_0 - \frac{11}{4} u_1 + 4u_2 & 4u_0 + \frac{83}{16} u_1 + \frac{115}{16} u_2 \end{bmatrix}$$

Πλήθος ριζών σε ανοικτό ορθογώνιο

Το σύνολο $V_{\mathbb{R}}(f_0) \subset \mathbb{R}^n$ των πραγματικών ριζών ενός πολυωνύμου $f_0 \in \mathbb{R}[\underset{\sim}{x}]$ έχει (στη γενική περίπτωση) διάσταση $n - 1$. Για παράδειγμα, όταν $n = 1$ το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας μας πληροφορεί ότι η διάσταση είναι μηδέν, ενώ όταν $n = 2$ το σύνολο των πραγματικών ριζών είναι μια καμπύλη (διάστασης ένα). Ο $\mathbb{R}^n$ διαμερίζεται ως

$$\mathbb{R}^n = F_0^+ \ \cup\ V_{\mathbb{R}}(f_0)\ \cup\ F_0^-$$

όπου $F_0^+ = \{\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n \ :\ f_0(\underset{\sim}{x}) > 0\}$ και $F_0^- = \{\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n \ :\ f_0(\underset{\sim}{x}) < 0\}$.

Ορισμός 4. *Έστω* S_{f_0} *η διγραμμική μορφή που ορίζει το* f_0. *Τάξη(rank) της* S_{f_0} *είναι η τάξη του πινακά της:* $\rho(S_{f_0}) = \operatorname{rank} M_{f_0}$. *Πρόσημο(signature)* $\sigma(S_{f_0})$ *είναι το πλήθος των θετικών ιδιοτιμών του* M_{f_0} *πλην το πλήθος των αρνητικών ιδιοτιμών του.*

Θεώρημα 5. *(Hermite) Αν* $\dim \mathcal{I} = 0$ *και* $f_0 \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, *τότε ισχύουν*

$$\begin{aligned} \sigma(S_{f_0}) &= \#V_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}) \cap F_0^+ - \#V_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}) \cap F_0^- \\ \rho(S_{f_0}) &= \#\big(V_{\mathbb{C}}(\mathcal{I}) - V_{\mathbb{C}}(f_0)\big) \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση αυτού του θεωρήματος μπορούμε να υπολογίσουμε τα το πλήθος των πραγματικών ριζών του (Σ) όταν $f_0 > 0$ και όταν $f_0 < 0$ ως εξής: Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\sigma(S_{f_0^2}) = \#V_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}) \cap F_0^+ + \#V_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}) \cap F_0^- \quad , \quad \sigma(S_1) = \#V_{\mathbb{R}}(\mathcal{I})$$

και λύνοντας ως προς $\#V_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}) \cap F_0^+, \#V_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}) \cap F_0^-$ έχουμε

$$\#V_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}) \cap F_0^+ = \frac{1}{2}\Big(\sigma(S_{f_0^2}) + \sigma(S_{f_0})\Big) \quad , \quad \#V_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}) \cap F_0^- = \frac{1}{2}\Big(\sigma(S_{f_0^2}) - \sigma(S_{f_0})\Big)$$

Για να υπολογιστεί το $\sigma(S_{f_0})$ δε χρειάζεται να προβούμε σε υπολογισμό των ιδιοτιμών του M_{f_0}. Αρκεί να γίνει χρήση του κανόνα Descartes:

Θεώρημα 6. *(Κανόνας Descartes) Έστω M_{f_0} ο πίνακας της S_{f_0} και $\varphi_{f_0}(\lambda) = \det(M_{f_0} - \lambda I)$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Το πλήθος των θετικών πραγματικών ριζών του $\varphi_{f_0}(\lambda)$(ιδιοτιμών του M_{f_0}) ισούται με τον αριθμό των αλλαγών προσήμου στο διάνυσμα των συντελεστών του φ_{f_0}.*

Το πλήθος των αρνητικών ριζών (ιδιοτιμών) είναι ο αριθμός των αλλαγών προσήμου στο $\varphi_{f_0}(-\lambda)$. Σημειώστε πως, επειδή ο πίνακας είναι συμμετρικός, οι ρίζες του $\varphi_{f_0}(\lambda)$ είναι πραγματικές.

Παράδειγμα 7. (συνέχεια) Το πλήθος των μιγαδικών ριζών του συστήματος είναι $\#V_{\mathbb{C}}(\mathcal{I}) = \rho(S_1) = \operatorname{rank} M_1 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{bmatrix} = 2$. Έστω $f_0 = -1 + x - y$. Υπολογίζουμε

$$M_{f_0} = \begin{bmatrix} -3 & -15/4 \\ -15/4 & -6 \end{bmatrix} \quad , \quad M_{f_0^2} = \begin{bmatrix} \operatorname{tr}(\hat{m}_{f_0}^2 \hat{m}_1) & \operatorname{tr}(\hat{m}_{f_0}^2 \hat{m}_y) \\ \operatorname{tr}(\hat{m}_{f_0}^2 \hat{m}_y) & \operatorname{tr}(\hat{m}_{f_0}^2 \hat{m}_y^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/2 & 45/8 \\ 45/8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{f_0^2}(\lambda) = \lambda^2 - \tfrac{27}{2}\lambda + \tfrac{567}{64} \quad \Rightarrow \sigma(S_{f_0^2}) = 2 - 0 = 2$$
$$\varphi_{f_0}(\lambda) = \lambda^2 + 9\lambda + \tfrac{63}{16} \quad \Rightarrow \sigma(S_{f_0}) = 0 - 2 = -2$$

Τελικά $\#V_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}) \cap F_0^+ = \dfrac{1}{2}(2-2) = 0$ και $\#V_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}) \cap F_0^- = \dfrac{1}{2}(2-(-2)) = 2$.

Γενικεύοντας την παραπάνω λογική, μπορούμε να εκφράσουμε ένα ανοικτό ορθογώνιο $R = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ του $\mathbb{R}^n$ σαν ένα σύνολο ημιαλγεβρικών περιορισμών: Αν θεωρήσουμε τα πολυώνυμα $h_i = (x_i - a_i)(x_i - b_i)$, $i = 1, \ldots, n$ το R γράφεται

$$R = H_1^- \cap H_2^- \cap \cdots \cap H_n^- = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \ : \ h_i(x, y) < 0\Big\}$$

Αλγόριθμος απομόνωσης πραγματικών ριζών

Ολοκληρώνουμε με μια σύνοψη της μεθόδου που παρουσιάστηκε:

Είσοδος: $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbb{R}[\underset{\sim}{x}]$, με $\dim \mathcal{I} = 0$

Έξοδος: Ένα ορθογώνιο απομόνωσης $R \subset \mathbb{R}^n$ για κάθε πραγματική ρίζα του συστήματος.

1. Για $f_0 = u_0 + u_1 x + \cdots + u_n x_n$ υπολόγισε τον πίνακα Macaulay των $f_0, f_1, \ldots, f_n$ και το $B_0 = \{\underset{\sim}{x}^{b_i}\}$.
2. Υπολόγισε το συμπλήρωμα Schur M′, και κατόπιν τους $\hat{m}_{f_0}, \hat{m}_{x_1}, \ldots, \hat{m}_{x_n}$
3. Υπολόγισε τον $M_{f_0} = \Big(\operatorname{tr}(m_f \cdot m_{\underset{\sim}{x}^{b_i}} \cdot m_{\underset{\sim}{x}^{b_j}})\Big)$ και $M_{f_0^2} = \Big(\operatorname{tr}(m_f^2 \cdot m_{\underset{\sim}{x}^{b_i}} \cdot m_{\underset{\sim}{x}^{b_j}})\Big)$ και τα χαρακτηριστικά τους πολυώνυμα.
4. Θέσε $f_0 = x_1 - a$, $f_0' = x_1 - b$ για διάφορες τιμές των a, b και βρες «φέτες» του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν 1 ρίζα, με χρήση του κανόνα Descartes.
5. Επανέλαβε για $f_0 = x_i - a$, $f_0' = x_i - b$, $i = 2 \ldots n$
6. Εντόπισε τα ανοικτά ορθογώνια $R = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ στα οποία βρίσκονται ρίζες.