Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών, ΠΜΣ Υπολογιστική Επιστήμη
Εργασία για το μάθημα: *«Συνδυαστική Βελτιστοποίηση»*
Διδάσκων: *Βασίλης Ζησιμόπουλος*
Χειμερινό Εξάμηνο 2006-2007
Άγγελος Μαντζαφλάρης, Μ901, amantzaf@math.uoa.gr
Απρίλιος 2007

Ένα FPTAS για μεικτό πολυωνυμικό προγραμματισμό με δεδομένο αριθμό μεταβλητών
(J. A. De Loera, R. Hemmecke, M. Köppe, R. Weismantel)

Περίληψη

Το 1983, ο Lenstra ανακάλυψε έναν αλγόριθμο για τον εντοπισμό των ακέραιων σημείων ενός πολυέδρου(LLL-algorithm) και σαν συνέπεια έδειξε ότι τα προβλήματα γραμμικού ακέραιου προγραμματισμού με σταθερό αριθμό μεταβλητών λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο. Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε ποια είναι η πολυπλοκότητα του μη-γραμμικού μεικτού προβλήματος

$$\begin{array}{rl} \text{μεγιστοποίηση της} & f(x_1,\ldots,x_{d_1},z_1,\ldots,z_{d_2}) \\ \text{υπό τους περιορισμούς} & (x_1,\ldots,x_{d_1},z_1,\ldots,z_{d_2}) \in P \\ & x_i \in \mathbb{R},\ z_j \in \mathbb{Z} \end{array}$$

όπου το P είναι ένα κυρτό πολύεδρο που περιγράφεται από γραμμικούς περιορισμούς($A\underset{\sim}{x} + B\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{b},\ A \in \mathbb{Z}^{m\times d_1}, B \in \mathbb{Z}^{m\times d_2}, \underset{\sim}{b} \in \mathbb{Z}^m$) και η αντικειμενική συνάρτηση f είναι πολυώνυμο πολλών μεταβλητών. Είναι γνωστό ότι για μη σταθερή διάσταση το πρόβλημα είναι NP-hard και μάλιστα δεν υπάρχει FPTAS για αυτό. Ακόμη και για σταθερή διάσταση, το μεικτό πρόβλημα παραμένει NP-hard, και το καλύτερο αποτέλεσμα που μπορούμε να έχουμε είναι ένα FPTAS. Μάλιστα, για τυχόν πολυώνυμο f δεν δεν υπάρχει FPTAS ακόμα και για σταθερή διάσταση, οπότε θα θεωρήσουμε $f \geq 0$ στην εφικτή περιοχή.

Παρουσιάζεται ένα FPTAS για το παραπάνω πρόβλημα, το οποίο βασίζεται στην ύπαρξη FPTAS για τη μεγιστοποίηση ενός μη αρνητικού πολυωνύμου(με ακέραιους συντελεστές) στα ακέραια σημεία ενός κυρτού πολυέδρου. Αυτό το αποτέλεσμα αποδείχθηκε στο [2], και για την πληρέστερη κατανόηση της μεικτής περίπτωσης, θα δώσουμε τα κύρια αποτελέσματα από αυτό. Όμως, τα αποτελέσματα για τη μεικτή περίπτωση ισχύουν ανεξάρτητα του προσεγγιστικού αλγορίθμου που χρησιμοποιείται στην ακέραια περίπτωση. Το FPTAS δεν προέρχεται από κάποιον αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού, όπως συνηθίζεται. Η ιδέα είναι να προσεγγίσουμε τη μεικτή περίπτωση από μια ακολουθία διακριτών-ακέραιων προβλημάτων:

$$\begin{array}{rl} \text{μεγιστοποίηση της} & f(x_1,\ldots,x_d) \\ \text{υπό τους περιορισμούς} & (x_1,\ldots,x_{d_1},z_1,\ldots,z_{d_2}) \in P \\ & x_i \in \frac{1}{m}\mathbb{Z},\ z_j \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Θα δούμε πως το αποτέλεσμα δεν είναι άμεσο και χρειάζεται προσοχή στο πλέγμα που θα χρησιμοποιήσουμε (δηλαδή στην επιλογή του m), ώστε να αποκτήσουμε μια προσέγγιση. Τέλος πρέπει να αποδείξουμε ότι η προσέγγισή μας είναι πράγματι $\epsilon-$κοντά στη βέλτιστη τιμή.

Ακέραια πολυωνυμική βελτιστοποίηση. Το γενικό πρόβλημα είναι:

$$\begin{array}{rl} \text{μεγιστοποίηση της} & f(x_1,\ldots,x_d) \\ \text{υπό τους περιορισμούς} & g_i(x_1,\ldots,x_d) \leq 0 \text{ για } i = 1,\ldots,m \\ & (x_1\ldots,x_d) \in \mathbb{Z}^d \end{array}$$

όπου τα $f,\ g_i$ είναι πολυώνυμα πολλών μεταβλητών, και αναζητούμε ακέραιες λύσεις. Το πρόβλημα είναι NP-hard(περιέχει τον ακέραιο γραμμικό προγραμματισμό ως ειδική περίπτωση). Παρουσιάζεται ένα FPTAS για την περίπτωση που η εφικτή περιοχή είναι τα ακέραια σημεία ενός κυρτού πολύτοπου (δηλαδή τα g_i είναι γραμμικά πολυώνυμα) και η διάσταση d είναι σταθερή[2].

Θεώρημα 1. *Έστω ότι η διάσταση d είναι σταθερή. Υπάρχει αλγόριθμος με είσοδο ένα πολύτοπο $P \subset \mathbb{R}^d$, το οποίο δίνεται από ένα σύνολο γραμμικών περιορισμών και ένα πολυώνυμο $f \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_d]$ με ακέραιους συντελεστές και συνολικό βαθμό D, το οποίο δεν παίρνει αρνητικές τιμές στο $P \cap \mathbb{Z}^d$ τέτοιος ώστε* *i. Για δοθέν k υπολογίζει σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το k, το μέγεθος του P και της f, και το D, κάτω και άνω φράγματα $U_k,\ L_k$ τα οποία ικανοποιούν $U_k - L_k \leq f(\underset{\sim}{x}^{\max}) \cdot \left(\sqrt[k]{|P \cap \mathbb{Z}^d|} - 1\right)$.*

ii. Για $k > (1 + \frac{1}{\epsilon}) \log(|P \cap \mathbb{Z}^d|)$, τα όρια ικανοποιούν $L_k \geq (1-\epsilon) f(\underset{\sim}{x}^{\max})$ και $U_k \leq (1+\epsilon) f(\underset{\sim}{x}^{\max})$. Τα φράγματα αυτά υπολογίζονται σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το μέγεθος της εισόδου, το συνολικό βαθμό D και το $\frac{1}{\epsilon}$.

iii. Διχοτομώντας το $P \cap \mathbb{Z}^d$, κατασκευάζει μια εφικτή λύση $\underset{\sim}{x}_\epsilon \in P \cap \mathbb{Z}^d$ με $|f(\underset{\sim}{x}_\epsilon) - f(\underset{\sim}{x}^{\max})| \leq \epsilon f(\underset{\sim}{x}^{\max})$

Θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη. Έστω $S = P \cap \mathbb{Z}^d$ το σύνολο των εφικτών λύσεων του ακέραιου προβλήματος. Ξεκινάμε με τη στοιχειώδη σχέση που προκύπτει από τον αριθμητικό μέσο ενός συνόλου θετικών αριθμών:

$$L_k = \left(\frac{1}{|S|} \sum_{\underset{\sim}{x} \in S} f^k(\underset{\sim}{x}) \right)^{1/k} \leq \max_{\underset{\sim}{x} \in S} f(x) \leq \left(\sum_{\underset{\sim}{x} \in S} f^k(\underset{\sim}{x}) \right)^{1/k} = U_k$$

Τα L_k αποτελούν μια αύξουσα ακολουθία κάτω φραγμάτων και τα U_k μια φθίνουσα ακολουθία άνω φραγμάτων. Ειδικότερα

$$U_k - L_k = \left(\sqrt[k]{|S|} - 1\right) L_k \leq \left(\sqrt[k]{|S|} - 1\right) f(\underset{\sim}{x}^{\max}) \leq \epsilon f(\underset{\sim}{x}^{\max}) \quad , \quad \text{για } k \geq (1 + 1/\epsilon) \log |S|$$

Το $\log |S|$ είναι πολυωνυμικά φραγμένο(επειδή d σταθερή) άρα και το k είναι φραγμένο από το μέγεθος της εισόδου και το $\frac{1}{\epsilon}$. Τελικά το μήκος κωδικοποίησης και ο βαθμός της f^k φράσσονται από το μέγεθος της εισόδου και το $\frac{1}{\epsilon}$.

Για να υπολογίσουμε αυτά τα όρια χρειαζόμαστε μια μικρού μήκους κωδικοποίηση των τιμών της f^k στα σημεία του S καθώς και τον πληθάριθμο $|S|$. Θεωρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου S:

$$g_S(z_1, \ldots, z_d) = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in S} z_1^{\alpha_1} \cdots z_d^{\alpha_d} = \sum_{\underset{\sim}{\alpha} \in S} \underset{\sim}{z}^{\underset{\sim}{\alpha}}$$

Επειδή το σύνολο είναι πεπερασμένο, η γεννήτρια συνάρτηση g_S είναι ένα πολυώνυμο Laurent. Ο πληθάριθμος του S είναι:$|S| = |P \cap \mathbb{Z}^d| = g_{P \cap \mathbb{Z}^d}(1, 1, \ldots, 1)$. Η κωδικοποίηση των αντικειμενικών τιμών θα γίνει επίσης με μια γεννήτρια συνάρτηση $g_{S,f}(z_1, \ldots, z_d) = \sum_{\underset{\sim}{\alpha} \in S} f(\underset{\sim}{\alpha}) \underset{\sim}{z}^{\underset{\sim}{\alpha}}$. Το άθροισμα όλων των αντικειμενικών τιμών είναι $g_{S,f}(1, 1, \ldots, 1) = \sum_{\underset{\sim}{\alpha} \in S} f(\underset{\sim}{\alpha})$. Έτσι τα φράγματα για τη βέλτιστη τιμή δίνονται από τους τύπους:

$$L_k = \left(\frac{g_{S,f^k}(\underset{\sim}{1})}{g_S(\underset{\sim}{1})} \right)^{1/k} \quad , \quad U_k = \left(g_{S,f^k}(\underset{\sim}{1}) \right)^{1/k}$$

Οι γεννήτριες συναρτήσεις(πολυώνυμα Laurent) $g_S(\underset{\sim}{z})$ και $g_{S,f^k}(\underset{\sim}{z})$ είναι γενικά εκθετικού μήκους (ακόμα και σε σταθερή διάσταση). Για να κωδικοποιήσουμε αυτές τις συναρτήσεις χρησιμοποιούμε το παρακάτω θεώρημα[3].

Θεώρημα 2. *(Alexander Barvinok, 1994) Έστω d σταθερή διάσταση. Υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό μιας έκφρασης της γεννήτριας $g_S(\underset{\sim}{z})$ των ακέραιων σημείων S ενός πολυέδρου $P \subset \mathbb{R}^d$, το οποίο δίνεται με ρητές ανισότητες, ως μια ρητή συνάρτηση*

$$g_S(\underset{\sim}{z}) = \sum_{i \in I} E_i \frac{\underset{\sim}{z}^{\underset{\sim}{u_i}}}{\prod_{j=1}^{d} (1 - \underset{\sim}{z}^{\underset{\sim}{v_{ij}}})}$$

όπου I ένα (πολυωνυμικού μεγέθους) σύνολο δεικτών, $E_i = \pm 1$ και $\underset{\sim}{u_i}, \underset{\sim}{v_{ij}} \in \mathbb{Z}^d$ για κάθε i, j.

Το επόμενο λήμμα μας επιτρέπει να βρούμε και τη γεννήτρια της f^k, με χρήση ενός διαφορικού τελεστή

Λήμμα 1. *Ένα πολυώνυμο* $f(x_1,\dots,x_d)=\sum_{\underset{\sim}{\beta}} c_{\underset{\sim}{\beta}} x^{\underset{\sim}{\beta}} \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_d]$ *μπορεί να μετατραπεί σε έναν διαφορικό τελεστή*

$$D_f = f\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,z_d\frac{\partial}{\partial z_d}\right)=\sum_{\underset{\sim}{\beta}} c_{\underset{\sim}{\beta}}\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\beta_1}\cdots\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\beta_d}$$

ο οποίος όταν δράσει σε μια γεννήτρια συνάρτηση $g(\underset{\sim}{z})=\sum_{\underset{\sim}{\alpha}\in S}\underset{\sim}{z}^{\underset{\sim}{\alpha}}$ *δίνει τη γεννήτρια* $(D_f g)(\underset{\sim}{z})=\sum_{\underset{\sim}{\alpha}\in S} f(\underset{\sim}{\alpha})\underset{\sim}{z}^{\underset{\sim}{\alpha}}$.

Έχει αποδειχθεί (De Loera,Hemmecke,Köppe,Weismantel / Barvinok 2004) ότι η παραπάνω γεννήτρια είναι υπολογίσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο. Τελικά τα $L_k=\sqrt[k]{\dfrac{g_{S,f^k}(\underset{\sim}{1})}{g_S(\underset{\sim}{1})}}$, $U_k=\sqrt[k]{g_{S,f^k}(\underset{\sim}{1})}$ υπολογίζονται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Πως εκτιμούμε τις $g_S(\underset{\sim}{z})$ και $g_{S,f^k}(\underset{\sim}{z})$ στο σημείο $\underset{\sim}{z}=\underset{\sim}{1}$; Μια απλή λύση είναι να λάβουμε $\lim_{\underset{\sim}{z}\to\underset{\sim}{1}} g_S(\underset{\sim}{z})$ και εφαρμόζουμε τον κανόνα L'Hopital. Γενικότερα χρησιμοποιούνται αναλυτικές τεχνικές[3].

Μεικτή πολυωνυμική βελτιστοποίηση. Το βασικό αποτέλεσμα είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 3. *Έστω ότι η διάσταση* d_1+d_2 *είναι σταθερή. Υπάρχει πλήρως πολυωνυμικό σχήμα προσέγγισης(FPTAS) για το πρόβλημα*

$$\begin{array}{rl} \textit{μεγιστοποίηση της} & f(x_1,\dots,x_{d_1},z_1,\dots,z_{d_2}) \\ \textit{υπό τους περιορισμούς} & (x_1,\dots,x_{d_1},z_1,\dots,z_{d_2})\in P \\ & (x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^{d_1} \\ & (z_1,\dots,z_d)\in\mathbb{Z}^{d_2} \end{array}$$

εφόσον η αντικειμενική συνάρτηση $f\in\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_{d_1},z_1,\dots,z_{d_2}]$ *είναι μη αρνητική στην εφικτή* P *περιοχή του προβλήματος.*

Η πορεία για να φτάσουμε σε αυτόν τον αλγόριθμο είναι να αντικαταστήσουμε το συνεχές μέρος από ένα διακριτό πλέγμα(grid approximation), να χρησιμοποιήσουμε έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο ακέραιου προγραμματισμού για την επίλυση του διακριτού-ακέραιου προβλήματος και τέλος να αποδείξουμε ότι η λύση που βρήκαμε είναι πράγματι προσέγγιση της βέλτιστης λύσης του μεικτού προβλήματος.

Προσέγγιση με πλέγμα. Προσεγγίζουμε το μεικτό πρόβλημα βελτιστοποίησης με ένα πρόβλημα πλέγματος(grid problem)

$$\max f(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{z}) \;:\; (\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{z})\in P\cap(\frac{1}{m}\mathbb{Z}^{d_1}\times\mathbb{Z}^{d_2})$$

Για να προσεγγίσουμε το παραπάνω διακριτό-ακέραιο πρόβλημα, αρκεί να το μετατρέψουμε σε ένα ακέραιο πρόβλημα: $\max\hat{f}(\hat{\underset{\sim}{x}},z)=m^D f(\frac{1}{m}\hat{\underset{\sim}{x}},\underset{\sim}{z})$ με περιορισμούς $A\hat{\underset{\sim}{x}}+mB\underset{\sim}{z}\le m\underset{\sim}{b}$, $\hat{\underset{\sim}{x}}\in\mathbb{Z}^{d_1},\underset{\sim}{z}\in\mathbb{Z}^{d_2}$. Έτσι φτάνουμε στο παρακάτω

Θεώρημα 4. *(FPTAS για το πρόβλημα πλέγματος) Έστω σταθερό* $d=d_1+d_2$ *και* f *μη αρνητική στην εφικτή περιοχή. Υπάρχει αλγόριθμος, πολυωνυμικός ως προς το* $\log m$*, το μήκος κωδικοποίησης της* f *και του* P*, το συνολικό βαθμό* D *της* f *καθώς επίσης και του* $\frac{1}{\epsilon}$*, ο οποίος υπολογίζει μια εφικτή λύση* $(\underset{\sim}{x}^m_\epsilon,\underset{\sim}{z}^m_\epsilon)\in P\cap(\frac{1}{m}\mathbb{Z}^{d_1}\times\mathbb{Z}^{d_2})$ *του παραπάνω προβλήματος πλέγματος, τέτοια ώστε*

$$f(\underset{\sim}{x}^m_\epsilon,\underset{\sim}{z}^m_\epsilon)\ge(1-\epsilon)f(\underset{\sim}{x}^m,\underset{\sim}{z}^m)$$

όπου $(\underset{\sim}{x}^m,\underset{\sim}{z}^m)\in P\cap(\frac{1}{m}\mathbb{Z}^{d_1}\times\mathbb{Z}^{d_2})$ *μια βέλτιστη λύση του προβλήματος.*

Η ακολουθία των βέλτιστων λύσεων $\{\underset{\sim}{x}^m\}_m$ του προβλήματος πλέγματος δε συγκλίνει στη βέλτιστη λύση του μεικτού προβλήματος. Η ακολουθία αυτή έχει πολλά όρια και υπάρχει υπακολουθία της με την επιθυμητή ιδιότητα. Το παρακάτω θεώρημα μας λέει ότι μπορούμε να την εντοπίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο:

Θεώρημα 5. *(Προσέγγιση με grid) Έστω* $d=d_1+d_2$ *σταθερό, και* $P=\{(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{z})\in\mathbb{R}^d \;:\; A\underset{\sim}{x}+B\underset{\sim}{z}\le\underset{\sim}{b}\}$*, όπου* $A\in\mathbb{Z}^{p\times d_1},\ B\in\mathbb{Z}^{p\times d_2}$*. Θεωρούμε* $M\in\mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε* $|x_i|\le M$ *για όλα τα* $(x_1,\dots,x_{d_1},\underset{\sim}{z})\in P$*.*

Υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος ο οποίος υπολογίζει ακέραιο Δ *τέτοιο ώστε για κάθε* $(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{z})\in P\cap(\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{Z}^{d_2})$ *και* $\delta>0$ *ισχύει το εξής:*

Κάθε πλέγμα $\frac{1}{m}\mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2}$ για $m = k\Delta$ και $k \geq \frac{1}{\delta}(d_1+1)M$ περιέχει ένα σημείο του πλέγματος $(\lfloor \underset{\sim}{x} \rceil, \underset{\sim}{z}) \in P \cap (\frac{1}{m}\mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2})$ με $\| \lfloor \underset{\sim}{x} \rceil - \underset{\sim}{x} \| \leq \delta$

Μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να υπολογίσουμε το Δ, ως το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των μη μηδενικών $d_1 \times d_1$ υπο-οριζουσών του πίνακα A.

Φράγμα για τις αντικειμενικές τιμές. Μένει να δειχθεί ότι η προσεγγιστική λύση του προβλήματος πλέγματος είναι πράγματι μια προσέγγιση του μεικτού προβλήματος. Ξεκινάμε με την τοπική συνθήκη Lipschitz

Λήμμα 2. *(Τοπική συνθήκη Lipschitz) Έστω f πολυώνυμο d μεταβλητών με μέγιστο ολικό βαθμό D, C ο μέγιστος κατ' απόλυτη τιμή συντελεστής του f, και $M \in \mathbb{R}$. Υπάρχει σταθερά $L \equiv L(C, D, M)$ τέτοια ώστε*

$$|f(\underset{\sim}{x}) - f(\underset{\sim}{y})| \leq L \| \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y} \|_\infty$$

για κάθε $|x_i|, |y_i| \leq M$. Είναι $L = O(D^{d+1}CM^D)$.

Δηλαδή $|f(\underset{\sim}{x}^{\max}, \underset{\sim}{z}^{\max}) - f(\lfloor \underset{\sim}{x}^{\max} \rceil, \underset{\sim}{z}^{\max})| \leq L\delta$.

Λήμμα 3. *Αν $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{d_1}, z_1, \ldots, z_{d_2}]$, P ένα πολύεδρο στο οποίο το f είναι μη αρνητικό και Δ το βήμα της ακολουθίας πλεγμάτων που ορίσαμε πριν, τότε ισχύει*

$$f(\underset{\sim}{x}^{\max}, \underset{\sim}{z}^{\max}) \geq (Dd_1\Delta)^{-D}$$

όπου D ο συνολικός βαθμός του f.

Θέτουμε $\delta = \frac{\epsilon}{2L}(Dd_1\Delta)^{-D}$. Από το FPTAS (5) για το πρόβλημα πλέγματος έχουμε

$$f(\underset{\sim}{x}^m_{\epsilon/2}, \underset{\sim}{z}^m_{\epsilon/2}) \geq (1 - \frac{\epsilon}{2}) f(\underset{\sim}{x}^m, \underset{\sim}{z}^m)$$

Επειδή η $f(\lfloor \underset{\sim}{x}^{\max} \rceil, \underset{\sim}{z}^{\max})$ είναι εφικτή λύση και το μεικτό είναι χαλάρωση του διακριτού-ακέραιου έχουμε

$$f(\lfloor \underset{\sim}{x}^{\max} \rceil, \underset{\sim}{z}^{\max}) \leq f(\underset{\sim}{x}^m, \underset{\sim}{z}^m) \leq f(\underset{\sim}{x}^{\max}, \underset{\sim}{z}^{\max})$$

Επίσης προσεγγίζοντας το μεικτό πρόβλημα με κατάλληλο πλέγμα είδαμε ότι $\| \lfloor \underset{\sim}{x} \rceil - \underset{\sim}{x} \| \leq \delta$. Με εφαρμογή της συνθήκης Lipschitz (2) και κατόπιν του Λήμματος (3)

$$|f(\underset{\sim}{x}^{\max}, \underset{\sim}{z}^{\max}) - f(\underset{\sim}{x}^m, \underset{\sim}{z}^m)| \leq |f(\underset{\sim}{x}^{\max}, \underset{\sim}{z}^{\max}) - f(\lfloor \underset{\sim}{x}^{\max} \rceil, \underset{\sim}{z}^{\max})| \leq L\delta = \frac{\epsilon}{2}(Dd_1\Delta)^{-D} \leq \frac{\epsilon}{2} f(\underset{\sim}{x}^{\max}, \underset{\sim}{z}^{\max})$$

Τελικά

$$f(\underset{\sim}{x}^{\max}, \underset{\sim}{z}^{\max}) - f(\underset{\sim}{x}^m_{\epsilon/2}, \underset{\sim}{z}^m_{\epsilon/2}) \leq \frac{\epsilon}{2} f(\underset{\sim}{x}^{\max}, \underset{\sim}{z}^{\max}) + (1 - \frac{\epsilon}{2})(f(\underset{\sim}{x}^{\max}, \underset{\sim}{z}^{\max}) - f(\underset{\sim}{x}^m, \underset{\sim}{z}^m)) \leq \epsilon f(\underset{\sim}{x}^{\max}, \underset{\sim}{z}^{\max})$$

Αναφορές

[1] J. A. De Loera, R. Hemmecke, M. Köppe, and R. Weismantel, *FPTAS for mixed-integer polynomial optimization with a fixed number of variables.* arXiv:math.OC/0505677

[2] J. A. De Loera, R. Hemmecke, M. Köppe, and R. Weismantel, *Integer polynomial optimization in fixed dimension.*, arXiv:math.OC/0410111

[3] A. I. Barvinok, *Polynomial time algorithm for counting integral points in polyhedra when the dimension is fixed.*, Math of Operations Research 19, 1994, 769779.