



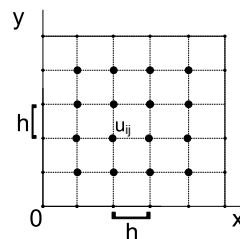
Επίλυση της δισδιάστατης εξίσωσης Συγκέντρωσης-Διάχυσης

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + 2c_2 \frac{\partial u}{\partial y} - c_3 u(x, y) = f(x, y)$$

με χρήση της επαναληπτικής μεθόδου ESOR

1 Διακριτοποίηση

Θεωρούμε ένα ομοιόμορφο τετραγωνικό πλέγμα $(N+1) \times (N+1)$.



Λαμβάνουμε κεντρικές διαφορές:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &\cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\cong \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &\cong \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &\cong \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} \end{aligned}$$

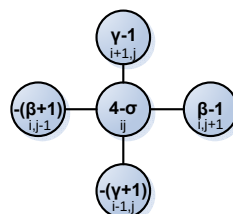
και η αρχική εξίσωση γίνεται

$$-(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}) + c_1 h(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + c_2 h(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) - c_3 h^2 u_{ij} = f_{ij}$$

Αν θέσουμε $\beta = c_2 h$, $\gamma = c_1 h$, $\sigma = c_3 h^2$ λαμβάνουμε τελικά

$$-(\beta + 1)u_{i,j-1} - (\gamma + 1)u_{i-1,j} + (4 - \sigma)u_{ij} + (\gamma - 1)u_{i+1,j} + (\beta - 1)u_{i,j+1} = f_{ij}$$

Το υπολογιστικό μόριο είναι πέντε σημείων.



Θεωρούμε τη φυσική αρίθμηση των κόμβων, δηλαδή το άγνωστο διάνυσμα της αριθμητικής λύσης είναι

$$\underline{u} = [u_{11} \quad \cdots \quad u_{i,j-1} \quad \cdots \quad u_{i-1,j} \quad u_{ij} \quad u_{i+1,j} \quad \cdots \quad u_{i,j+1} \quad \cdots \quad u_{NN}]^t$$

Τα κάτω αριστερά στοιχεία θα μας δώσουν το κάτω τριγωνικό μέρος του πίνακα του συστήματος, ενώ τα πάνω δεξιά το άνω τριγωνικό μέρος. Ο συντελεστής του u_{ij} εμφανίζεται στην κύρια διαγώνιο.

Έστω το σύστημα $A\underline{u} = \underline{b}$. Παρατηρούμε ότι ένα εσωτερικό γινόμενο γραμμής του A επί $\underline{u}$ έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} \cdots & -(\beta+1) & \cdots & -(\gamma+1) & 4-\sigma & \gamma-1 & \cdots & \beta-1 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_{i,j-1} \\ \vdots \\ u_{i-1,j} \\ u_{ij} \\ u_{i+1,j} \\ \vdots \\ u_{i,j+1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία $u_{N+1,j}$ δίνονται από τις συνοριακές συνθήκες και οι αντίστοιχοι όροι αφαιρούνται από το δεξί μέλος, στη θέση iN . Όμοια οι όροι με $u_{0,j}$ αφαιρούνται από τις θέσεις $1 + (j-1)N$ του δεξιού μέλους, $j = 1 \dots N$.

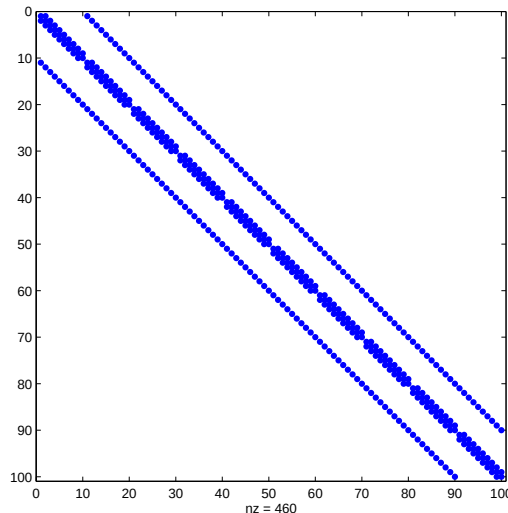
Για $i = 1 \dots N$ αφαιρείται ο όρος που περιέχει u_{i0} από το δεξί μέλος από τη θέση i του $\underline{b}$ και ο όρος $u_{i,N+1}$ από τη θέση $N^2 - N + i$. Τελικά ο πίνακας και το δεξί μέλος του συστήματος είναι

$$A = \begin{bmatrix} T & (\beta-1)I & & & \\ -(\beta+1)I & T & (\beta-1)I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -(\beta+1)I & T & (\beta-1)I \\ & & & -(\beta+1)I & T \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \underline{f} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(\beta+1)u_{10} \\ \vdots \\ -(\beta+1)u_{N0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (\beta-1)u_{1,N+1} \\ \vdots \\ (\beta-1)u_{N,N+1} \end{bmatrix}$$

όπου το διάνυσμα $\underline{f}$ περιέχει τις τιμές $f_{ij} := f(ih, jh)$ και

$$T = \begin{bmatrix} 4-\sigma & \gamma-1 & & & \\ -\gamma-1 & 4-\sigma & \gamma-1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\gamma-1 & 4-\sigma & \gamma-1 \\ & & & -\gamma-1 & 4-\sigma \end{bmatrix}, \quad \underline{b}_i = \begin{bmatrix} -(\gamma+1)u_{0i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (\gamma-1)u_{N+1,i} \end{bmatrix}$$

Δίνουμε μια οπτικοποίηση του πίνακα του συστήματος, για $N = 10$:



2 Επαναληπτική μέθοδος ESOR

Θα επιλύσουμε τη διαφορική εξίσωση με την επαναληπτική μέθοδο ESOR. Έστω η βασική διάσπαση του A :

$$A = D - C_L - C_U$$

και το επαναληπτικό σχήμα της ESOR

$$\underline{u}^{n+1} = G_{\tau,\omega} \underline{u}^{(n)} + \underline{k}_{\tau,\omega}$$

όπου

$$G_{\tau,\omega} = I - \tau R^{-1} A, \quad \underline{k}_{\tau,\omega} = \tau R^{-1} \underline{b}, \quad R = D - \omega C_L$$

Αντικαθιστώντας

$$\underline{u}^{(n+1)} = \underline{u}^{(n)} + \tau(I - \omega L)^{-1} D^{-1} (\underline{b} - A \underline{u}^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

και μετά από πράξεις

$$\underline{u}^{(n+1)} = (1 - \tau) \underline{u}^{(n)} + \omega L \underline{u}^{(n+1)} (\tau - \omega) L \underline{u}^{(n)} + \tau U \underline{u}^{(n)} + \tau D^{-1} \underline{b}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τη μορφή του πίνακα A μετατρέπουμε τα γινόμενα που εμφανίζονται σε μορφή συντεταγμένων:

$$\begin{aligned} L \underline{u} &= D^{-1} C_L \rightarrow \frac{1}{4 - \sigma} ((\gamma + 1) u_{i-1,j} + (\beta + 1) u_{i,j-1}) \\ U \underline{u} &= D^{-1} C_U \rightarrow \frac{1}{4 - \sigma} (-(\beta - 1) u_{i,j+1} - (\gamma - 1) u_{i+1,j}) \\ D^{-1} \underline{b} &\rightarrow \frac{b_{ij}}{4 - \sigma} \end{aligned}$$

Τελικά

$$\begin{aligned} u_{ij}^{(n+1)} &= (1 - \tau) u_{ij}^{(n)} + \frac{1}{4 - \sigma} ((\gamma + 1) u_{i-1,j}^{(n+1)} + (\beta + 1) u_{i,j-1}^{(n+1)}) - \frac{1}{4 - \sigma} ((\beta - 1) u_{i,j+1}^{(n)} + \\ &+ (\gamma - 1) u_{i+1,j}^{(n)}) + \frac{1}{4 - \sigma} ((\gamma + 1) u_{i-1,j}^{(n)} + (\beta + 1) u_{i,j-1}^{(n)}) + \frac{\tau}{4 - \sigma} b_{ij} \end{aligned}$$

Όταν οι δείκτες μικρότεροι του 1 ή υπερβαίνουν το N , οι αντίστοιχοι όροι περνάνε στο δεξί μέλος (κατά την υλοποίηση διακρίνουμε αυτές τις περιπτώσεις). Επίσης το γινόμενο $L \underline{u}^{(n+1)}$ πρέπει να κρατείται στη μνήμη για να χρησιμοποιηθεί στην επόμενη επανάληψη, διότι το $\underline{u}^{(n+2)}$ χρειάζεται τα $L \underline{u}^{(n+2)}$ και $L \underline{u}^{(n+1)}$.

Έγινε υλοποίηση σε Matlab: Το άγνωστο διάνυσμα $\underline{u}$ παριστάνεται με έναν $N \times N$ πίνακα, και οι αρχικές συνθήκες με έναν $N \times 4$ πίνακα, κάθε στήλη του οποίου περιέχει τις συνοριακές συνθήκες σε μια πλευρά του συνόρου. Όμοια το δεξί μέλος είναι ένας $N \times N$ πίνακας. Έτσι διατηρείται η αρίθμηση της παραπάνω σχέσης. Το μειονέκτημα είναι ότι πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις για τις γραμμές στις οποίες υπεισέρχονται συνοριακές συνθήκες, διότι αυτές έχουν ενσωματωθεί στο διάνυσμα $\underline{b}$ και οι αντίστοιχοι όροι στην επαναληπτική σχέση πρέπει να μηδενιστούν. Η μέθοδος υλοποιείται στη ρουτίνα `condiff.m`. Δίνουμε τον κώδικα :

```
function u=condiff(N,c1,c2,c3,t,w)

tol      = 0.5e-8;
n_iter   = 10000;
h        = 1/(N+1);

u  = zeros(N);
b  = zeros(N);
du = zeros(N,4);
b2 = (c2*h+1); g2 = (c1*h+1); d = 4-c3*h^2;
g1 = -(c1*h-1) ; b1 = -(c2*h-1) ;
Lu=zeros(N);

%Arxikes Sin8ikes Dirichlet
du(:,3)=1;

%Deji Melos
b(:,1)=b2*du(:,1);
b(:,N)=b1*du(:,3);

b(1,:)= b(1,:)+g2*du(:,4)';
b(N,:)= b(N,:)+g1*du(:,2)';
%for i=1:N^2 b(i)=b(i)+f(i*h,i*h); end
```

```

%Epilish me ESOR
iter=0;

while iter<=n_iter
%disp(iter)
u_prev=u;
%j=1, i=1
u(1,1) = (1-t)*u(1,1)+(t/d)*(b1*u(1,2)+g1*u(2,1))+(t/d)*b(1,1);
Lu(1,1)= 0;
%j=1
for i=2:N-1
    c = g2*u(i-1,1)/d;
    u(i,1) = (1-t)*u(i,1)+w*c+(t-w)*Lu(i,1)+(t/d)*(b1*u(i,2)+g1*u(i+1,1))+(t/d)*b(i,1);
    Lu(i,1)= c;
end
%j=1, i=N
c = g2*u(N-1,1)/d;
u(N,1) = (1-t)*u(N,1)+w*c+(t-w)*Lu(N,1)+(t/d)*b1*u(N,2)+(t/d)*b(N,1);
Lu(N,1)= c;

for j=2:N-1
    %i=1
    c = b2*u(1,j-1)/d;
    u(1,j) = (1-t)*u(1,j)+w*c+(t-w)*Lu(1,j)+(t/d)*(b1*u(1,j+1)+g1*u(2,j))+(t/d)*b(1,j);
    Lu(1,j)= c;
    for i=2:N-1
        c = (g2*u(i-1,j)+b2*u(i,j-1))/d;
        u(i,j) = (1-t)*u(i,j)+w*c+(t-w)*Lu(i,j)+(t/d)*(b1*u(i,j+1)+g1*u(i+1,j))+(t/d)*b(i,j);
        Lu(i,j)= c;
    end
    %i=N
    c = (g2*u(N-1,j)+b2*u(N,j-1))/d;
    u(N,j) = (1-t)*u(N,j)+w*c+(t-w)*Lu(N,j)+(t/d)*b(N,j);
    Lu(N,j)= c;
end
%j=N, i=1
c = b2*u(1,N-1)/d;
u(1,N) = (1-t)*u(1,N)+w*c+(t-w)*Lu(1,N)+(t/d)*g1*u(2,N)+(t/d)*b(1,N);
Lu(1,N)= c;
%j=N
for i=2:N-1
    c = (g2*u(i-1,N)+b2*u(i,N-1))/d;
    u(i,N) = (1-t)*u(i,N)+w*c+(t-w)*Lu(i,N)+(t/d)*g1*u(i+1,N)+(t/d)*b(i,N);
    Lu(i,N)= c;
end
%j=N, i=N
c = (g2*u(N-1,N)+b2*u(N,N-1))/d;
u(N,N) = (1-t)*u(N,N)+w*c+(t-w)*Lu(N,N)+(t/d)*b(N,N);
Lu(N,N)= c;

if norm(u-u_prev,inf)<tol
    disp('!SIGKLISH META APO'),disp(iter),disp('EPANALHPSEIS')
    [x,y]=meshgrid(h:h:1-h,h:h:1-h);
    figure
    subplot(2,2,1)
    mesh(x,y,u);
    title('\SigmaYNAPTH\SigmaH u(x,y)');
    xlabel('y');
    ylabel('x');
    subplot(2,2,2)
    surf(x,y,u);
    title('\SigmaYNAPTH\SigmaH u(x,y)');
    xlabel('y');

```

```

ylabel('x');
shading interp
subplot(2,2,3)
contour(x,y,u);
title('\SigmaYNAPTH\SigmaH u(x,y) - Contour');
xlabel('y');
ylabel('x');
subplot(2,2,4)
contourf(x,y,u);
title('\SigmaYNAPTH\SigmaH u(x,y) - Contour');
xlabel('y');
ylabel('x');
return
end
iter=iter+1;
end
u=0;
disp('!DEN YPARXEI SIGKLISH META APO'),disp(n_iter),disp('EPANALHPSEIS')

```

Για να βρούμε βέλτιστες τιμές για τις παραμέτρους τ και ω υπολογίζουμε τον επαναληπτικό πίνακα $G_{\tau,\omega}$ και κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις $(\tau,\omega,\|G_{\tau,\omega}\|)$ και $(\tau,\omega,S(G_{\tau,\omega}))$. Η διαδικασία αυτή είναι αρκετά χρονοβόρα, αφού ο $G_{\tau,\omega}$ είναι ένας $N^2 \times N^2$ πίνακας, με πολλά μη μηδενικά στοιχεία. Η παρακάτω ρουτίνα επιστρέφει τον επαναληπτικό πίνακα:

```

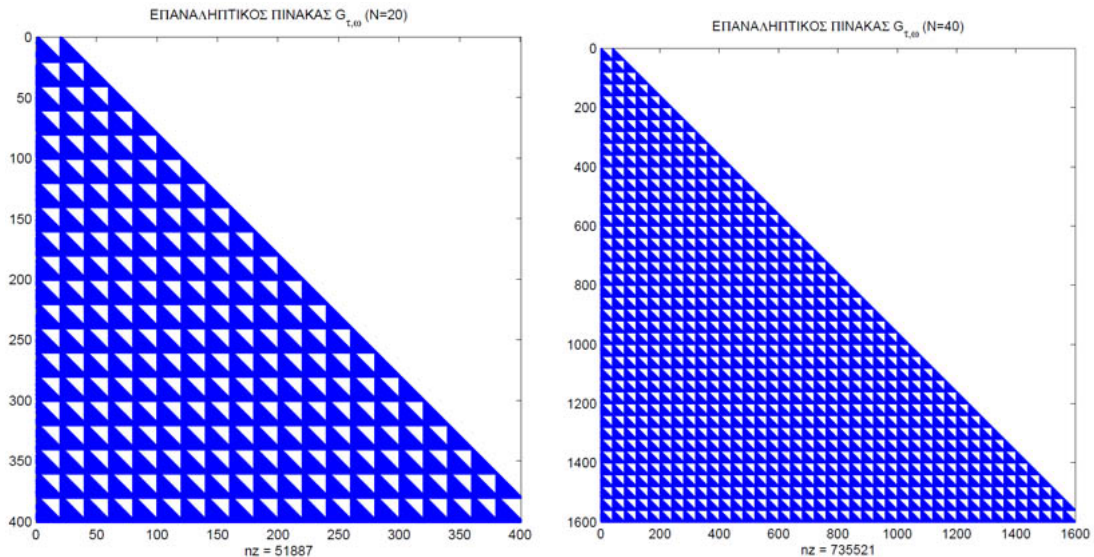
function G=G(N,c1,c2,c3,t,w)

h=1/(N+1);
N2=N^2;
b2=-(c2*h+1);
g2=-(c1*h+1);
d = 4-c3*h;
g1= c1*h-1;
b1= c2*h-1;

i= [ N+1:N2      2:N2      1:N2      1:N2-1      1:N2-N      ];
j= [ 1:N2-N      1:N2-1      1:N2      2:N2      (N+1):N2      ];
s= [b2*ones(1,N2-N) g2*ones(1,N2-1) d*ones(1,N2) g1*ones(1,N2-1) b1*ones(1,N2-N)];
A= sparse(i,j,s);
for i=1:N-1, A(i*N+1,i*N)=0; A(i*N,i*N+1)=0; end
% G=I-t*inv(R)*A
G = speye(N2) - t*inv( diag(diag(A))+w*tril(A,-1) ) *A;

```

Ο πίνακας $G_{\tau,\omega}$ αποθηκεύεται σαν αραιός πίνακας στη μνήμη, με χρήση της εντολής `sparse` του Matlab. Η δομή του είναι σχεδόν κάτω τριγωνική, με N επιπλέον μη μηδενικούς διαγωνίους πάνω από την κύρια διαγώνιο. Τα στοιχεία του σχηματίζουν ένα τρίγωνο Sierpinski. Παρακάτω δίνονται οπτικοποιήσεις του πίνακα διάστασης 400×400 και 1600×1600 :



Η ρουτίνα `findopt.m` διατρέχει το διάστημα $(0, 2)$ με κάποιο βήμα που δίνεται σαν όρισμα, υπολογίζει τη νόρμα $\|G_{\tau, \omega}\|$ και τη φασματική ακτίνα $S(G_{\tau, \omega})$ και σχεδιάζει τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις. Για τη νόρμα δίνει ένα διάγραμμα ισοϋψών καμπύλων, ώστε να γίνουν φανερά τυχόν σημεία ελαχίστου. Η νόρμα υπολογίζεται προσεγγιστικά, με την εντολή `normest` για αραιούς πίνακες. Επίσης η μεγαλύτερη κατ' απόλυτο τιμή ιδιοτιμή του $G_{\tau, \omega}$ υπολογίζεται με χρήση της βιβλιοθήκης ARPACK, με την εντολή `eigs` που είναι ειδικά για αραιούς πίνακες.

```
function [m, topt, wopt]=findopt(N,c1,c2,c3,step)

OPTS.disp = 0;
OPTS.maxit = 300;
OPTS.tol = 0.5e-2;
calc=(2/step-1);

[t,w]= meshgrid(step:step:2-step, step:step:2-step);

disp(' STEPS='),disp(calc^2)
count=0;
for i=1:calc
    for j=1:calc
        count=count+1;disp(count)
        z(i,j)=normest(G(N,c1,c2,c3,t(i,j),w(i,j)),inf);
        r(i,j)= abs( eigs(G(N,c1,c2,c3,t(i,j),w(i,j)),1,'lm',OPTS));
    end
end

figure
subplot(2,2,1)
    surf(t,w,z);
    title(' ||G_{\tau, \omega}|| ');
    xlabel('\tau');
    ylabel('\omega');
subplot(2,2,2)
    surf(t,w,r);
    title('\PhiA\SigmaMATIKH AKTINA');
    xlabel('\tau');
    ylabel('\omega');
subplot(2,2,3)
    surf(t,w,z);
    view([120 16])
    %title(' ||G_{\tau, \omega}|| ');
    xlabel('\tau');
    ylabel('\omega');
subplot(2,2,4)
    surf(t,w,r);
    view([120 16])
    %title('\PhiA\SigmaMATIKH AKTINA');
    xlabel('\tau');
    ylabel('\omega');

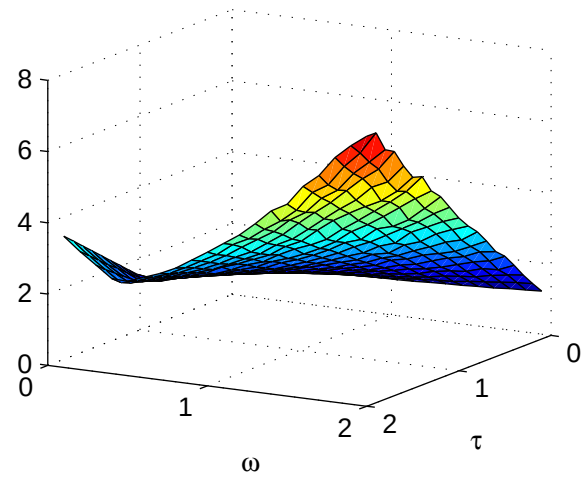
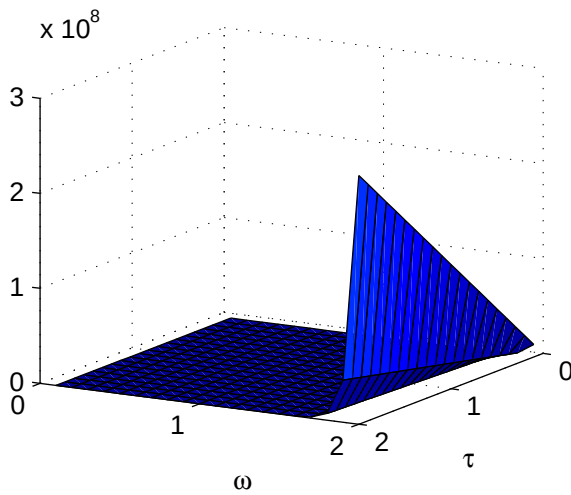
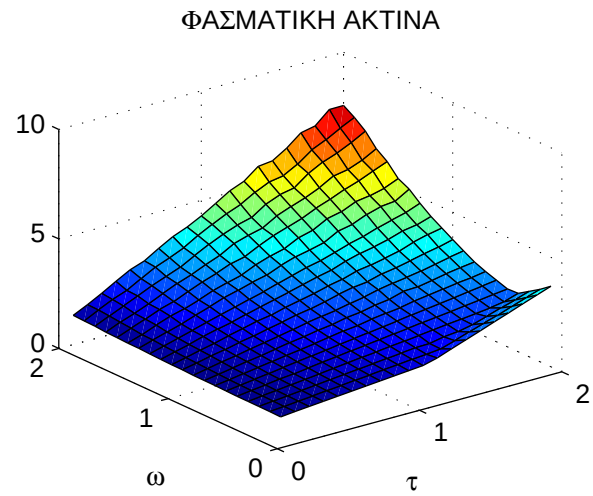
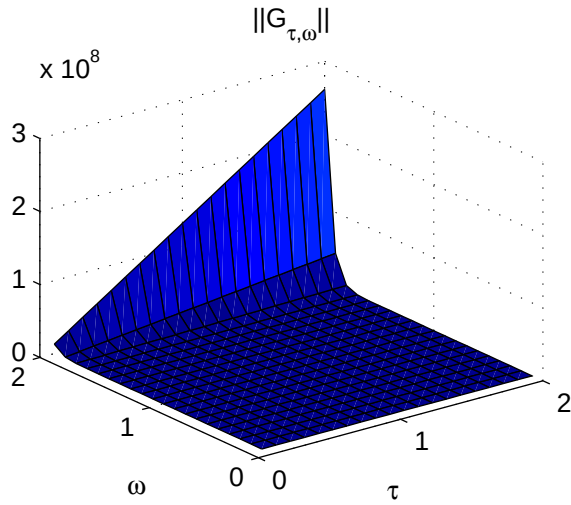
figure
    [c,h] =contour(t,w,r,calc*2);
    clabel(c);
    title('\PhiA\SigmaMATIKH AKTINA - Contour');
    xlabel('\tau');
    ylabel('\omega');

[m, i, j] = minn(r);
topt = t(i,j);
wopt = w(i,j);
```

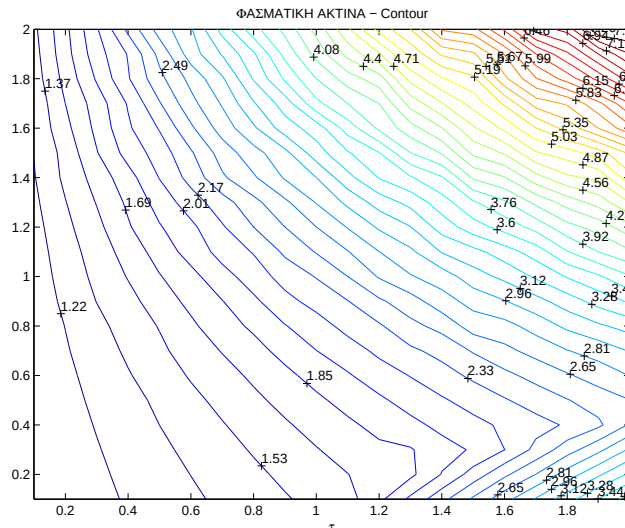
3 Εφαρμογές

Για βοήθεια στον πειραματισμό, κατασκευάστηκε η ρουτίνα `findoptiter.m` η οποία εκτελεί την ESOR για όλες τις τιμές των παραμέτρων τ , ω με κάποιο βήμα που δίνεται σαν όρισμα. Έτσι ελέγχουμε πόσες επαναλήψεις γίνονται συναρτήσει των τ , ω και συγκρίνουμε τις τιμές με τα βέλτιστα τ , ω ως προς τη φασματική ακτίνα.

Έστω $N = 20$, $(c_1, c_2, c_3) = (1, 2, 30)$. Η γραφική παράσταση της νόρμας και της φασματικής ακτίνας είναι

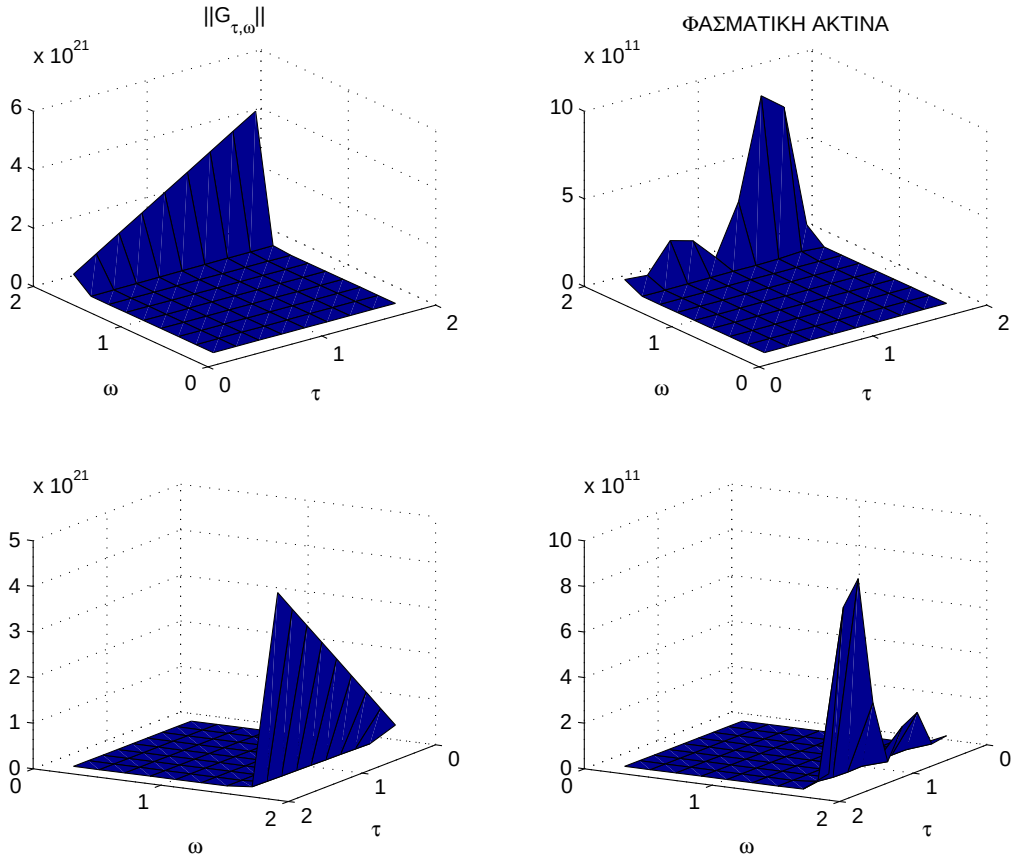


και το διάγραμμα ισοϋψών καμπύλων

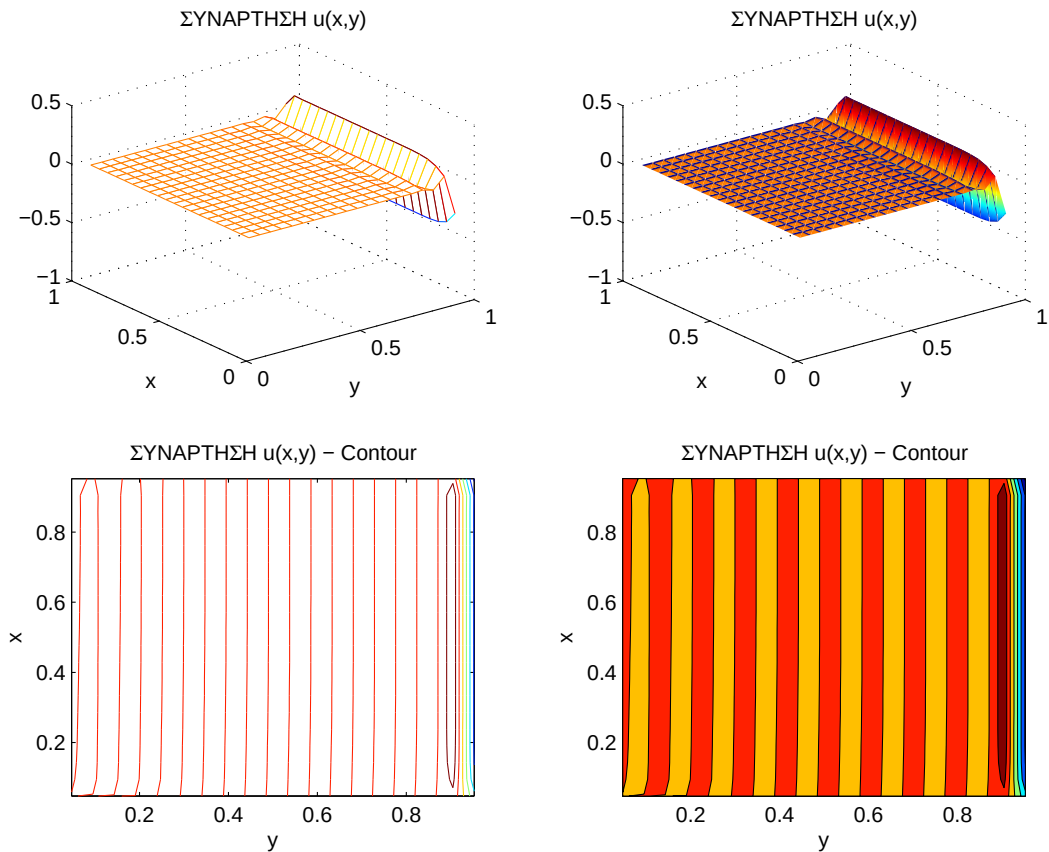


Η φασματική ακτίνα παραμένει μεγαλύτερη του 1 σε όλο το πλέγμα. Κάθε προσπάθεια επίλυσης του συστήματος με την `condiff.m` απέτυχε, για όλες τις αντίστοιχες τιμές τ , ω .

Έστω $N = 20$, $(c_1, c_2, c_3) = (25, 50, 30)$. Η γραφική παράσταση της νόρμας και της φασματικής ακτίνας είναι(βήμα 0.2):

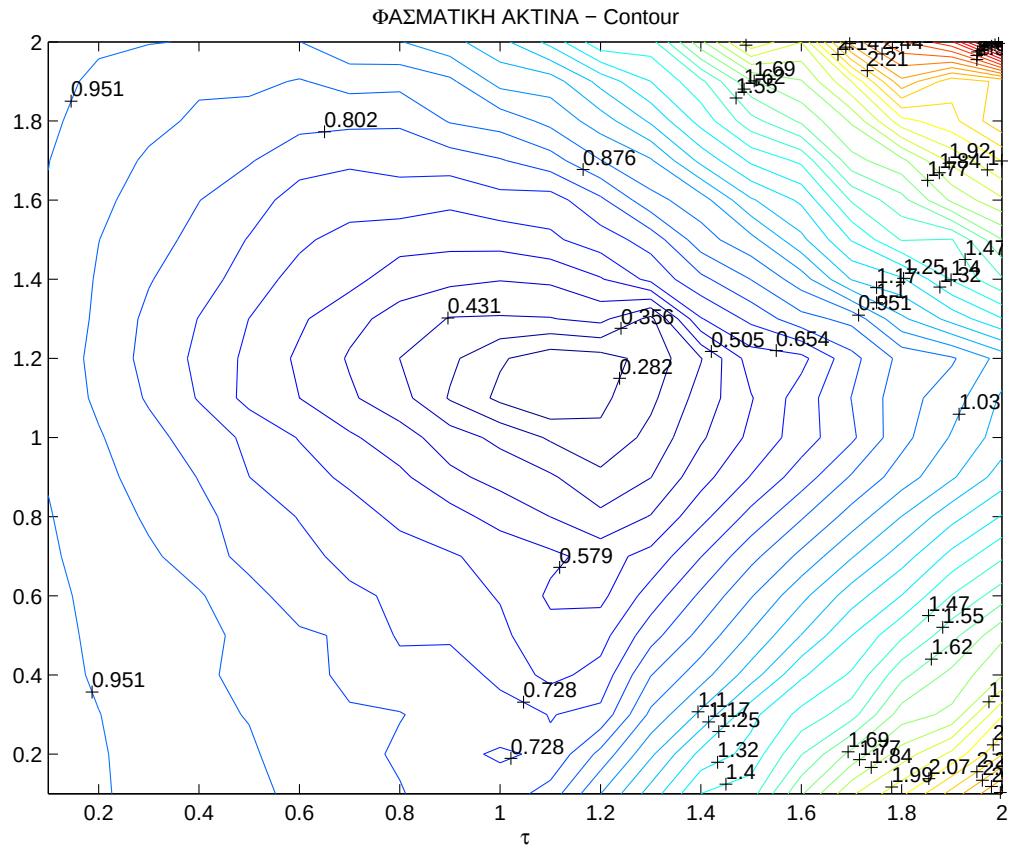


Η φασματική ακτίνα εκτοξεύεται στα ύψη για μεγάλες τιμές του τ , ω . Το βέλτιστο βρέθηκε για $\tau = 0.4$, $\omega = 0.6$ όπου $S(G_{0.4, 0.6}) \cong 0.6$. Πράγματι χρειάστηκαν 57 επαναλήψεις για να λάβουμε τη λύση:

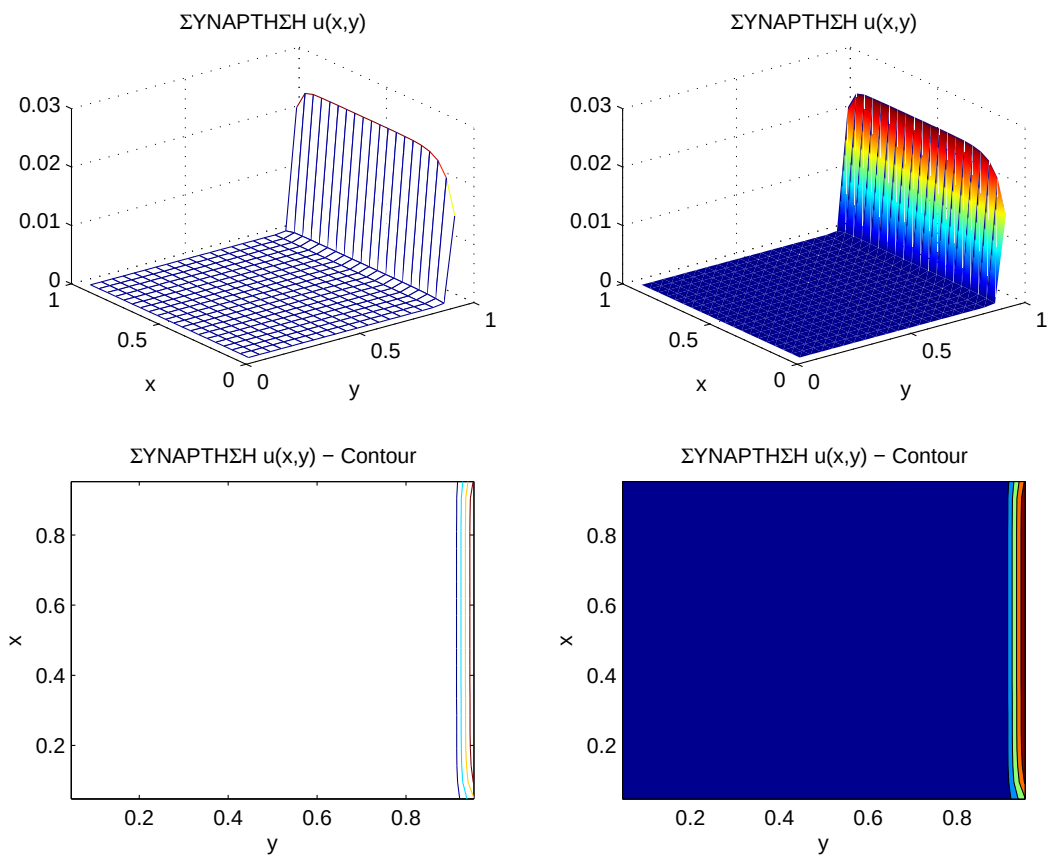


Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι για $\tau = 0.3$, $\omega = 0.5$ οι επαναλήψεις είναι 81, ενώ για $\tau = 0.2$, $\omega = 0.3$ χρειάστηκαν 133 επαναλήψεις.

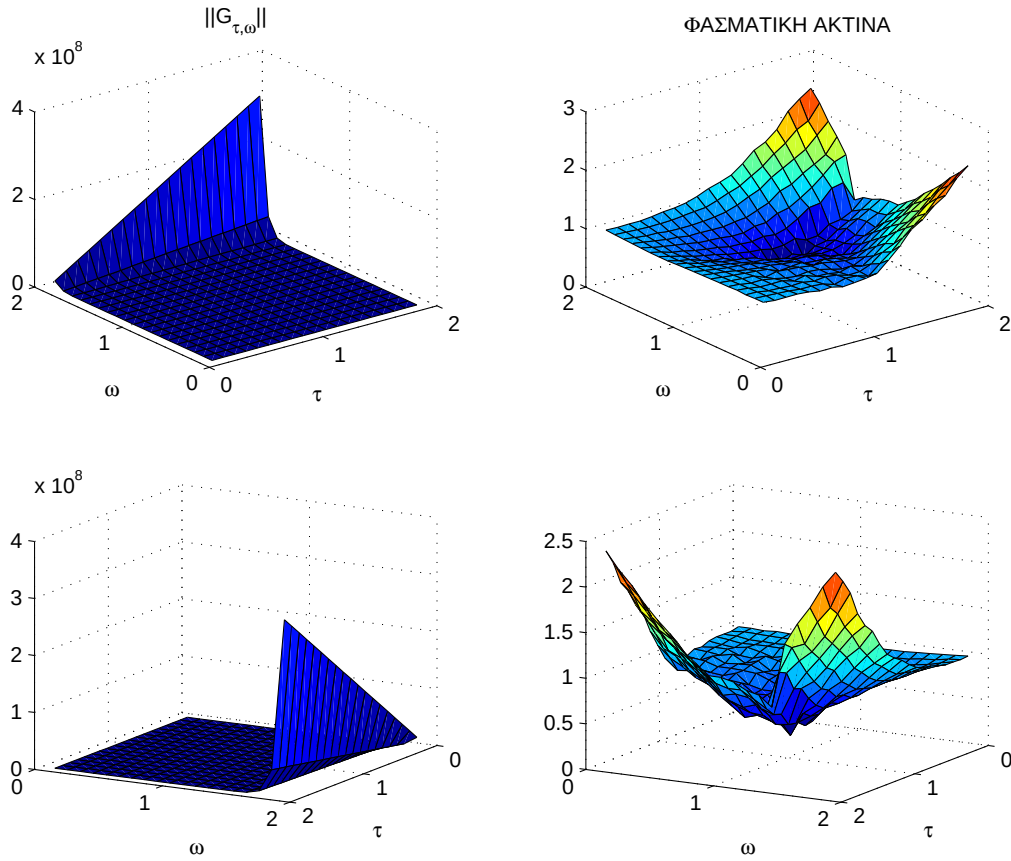
Έστω $N = 20$, $(c_1, c_2, c_3) = (10, 20, 1)$. Το διάγραμμα ισοϋψών καμπύλων είναι (βήμα 0.1):



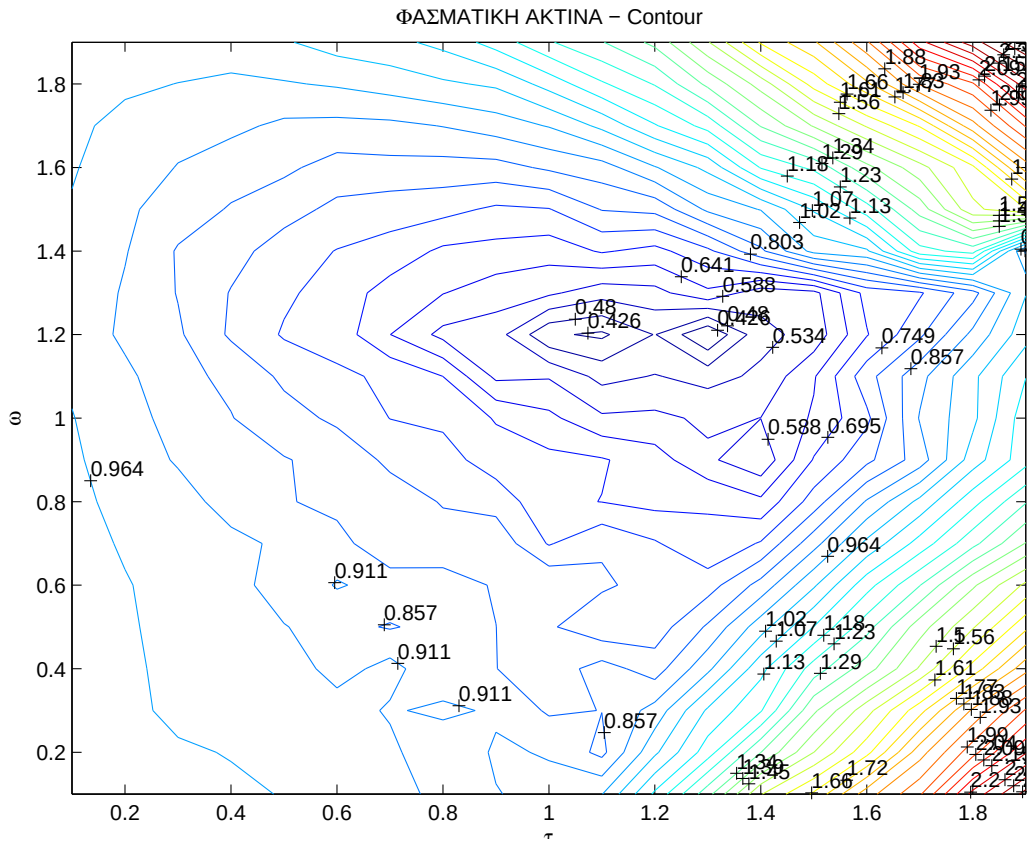
Το βέλτιστο βρέθηκε για $\tau = \omega = 1.1$ όπου $S(G_{1.1,1.1}) \cong 0.1639$. Πράγματι χρειάστηκαν 9 επαναλήψεις για να λάβουμε τη λύση:

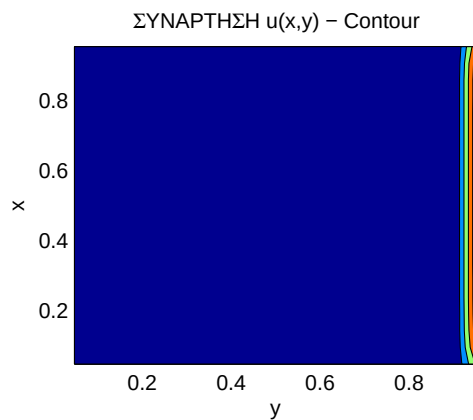
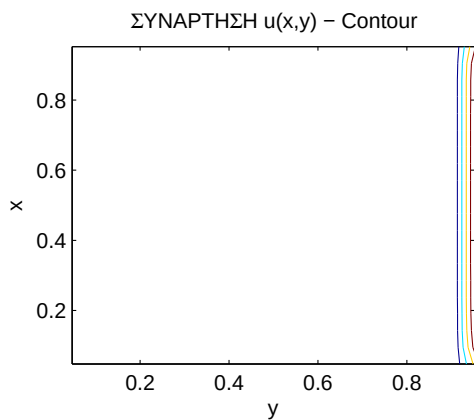
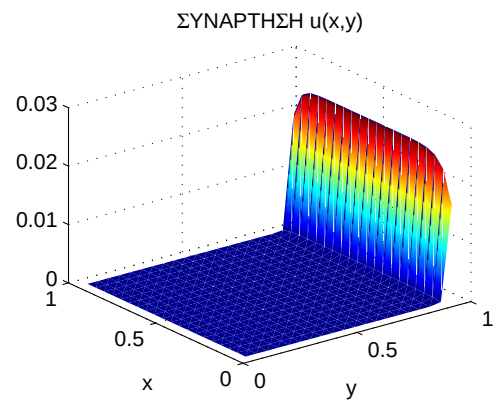
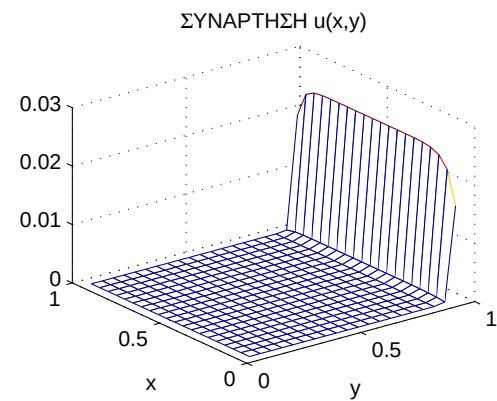


Έστω $N = 20$, $(c_1, c_2, c_3) = (5, 20, 10)$. Η γραφική παράσταση της νόρμας και της φασματικής ακτίνας είναι (βήμα 0.2):

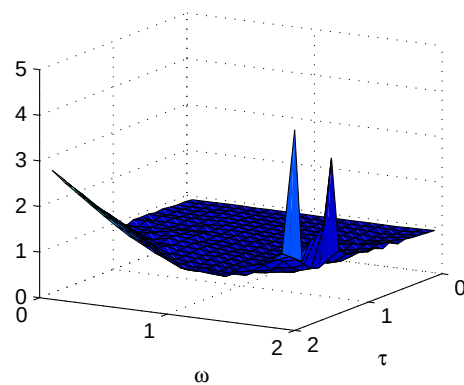
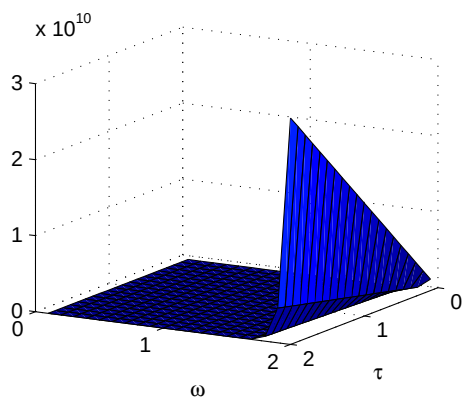
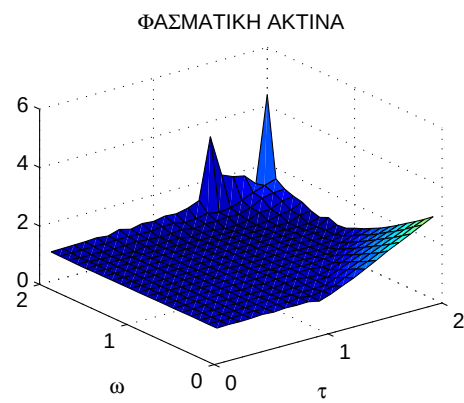
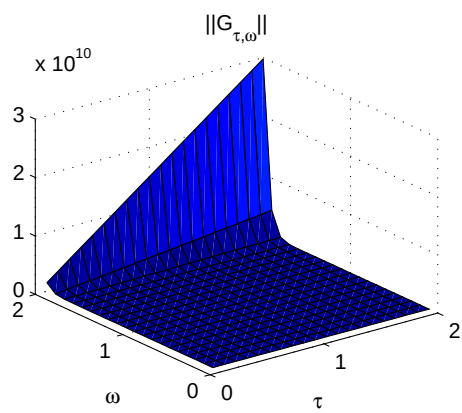


Το διάγραμμα ισοϋψών καμπύλων είναι:

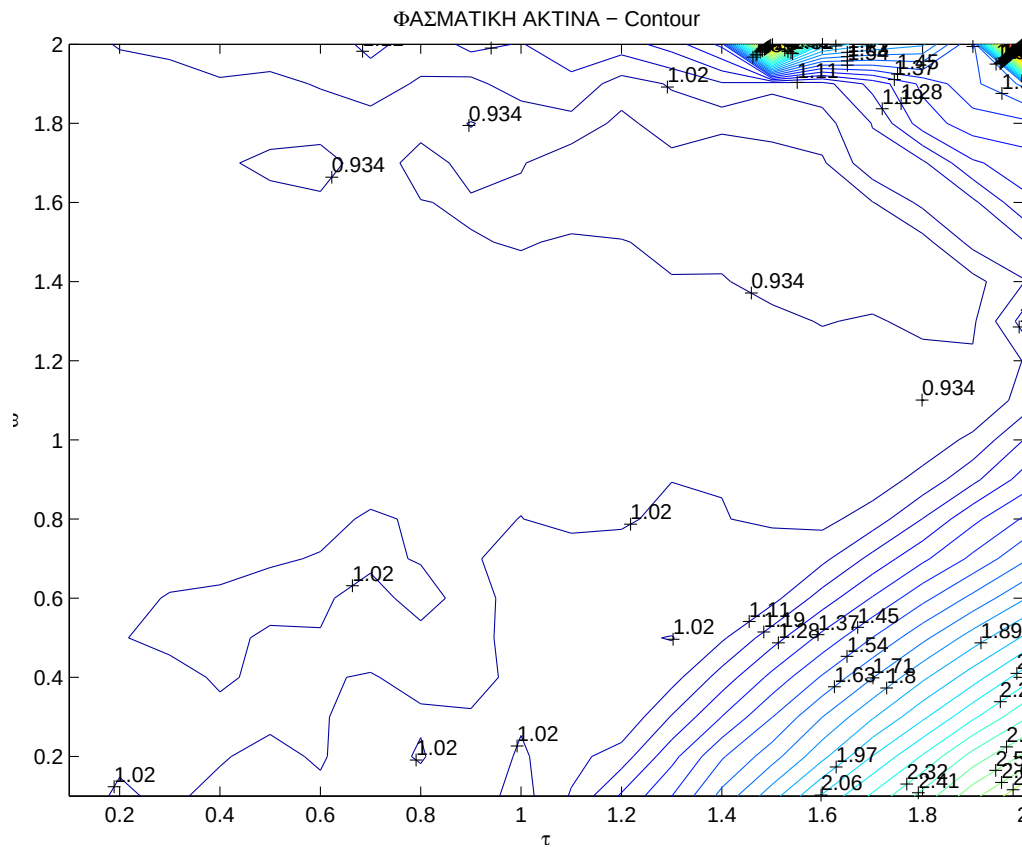




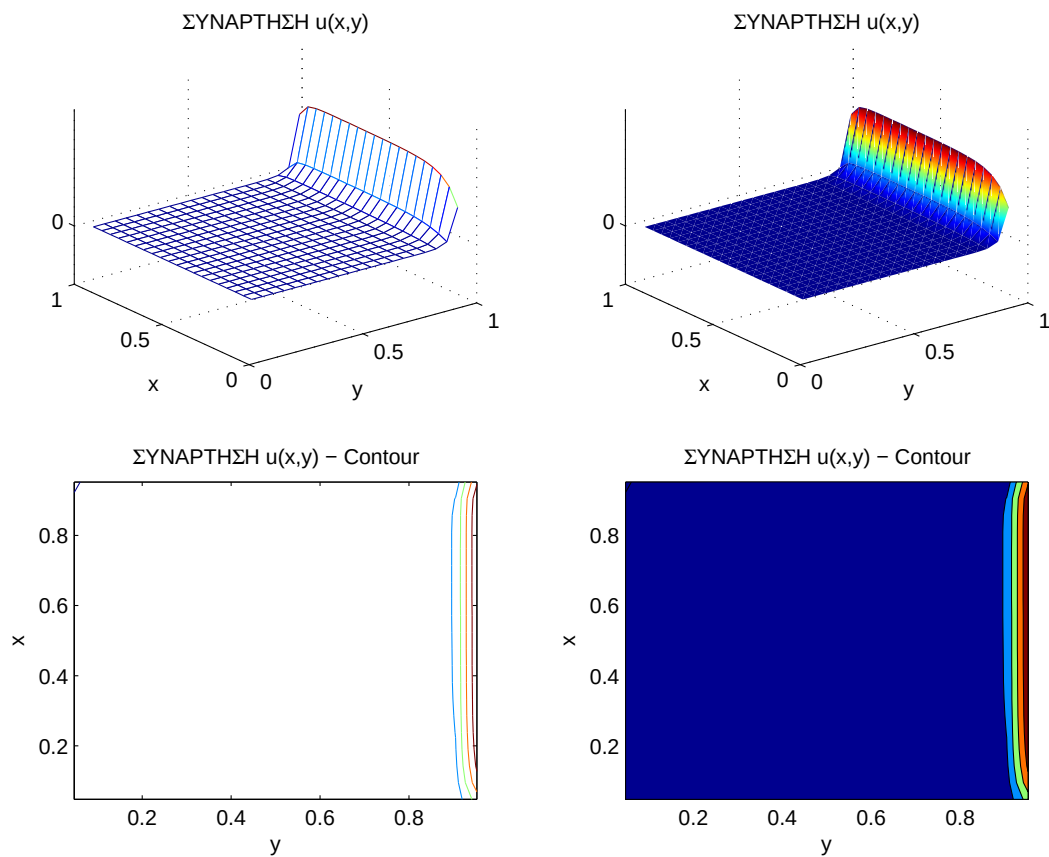
Έστω $N = 20$, $(c_1, c_2, c_3) = (11, 13, 15)$. Η γραφική παράσταση της νόρμας και της φασματικής ακτίνας είναι (βήμα 0.1):



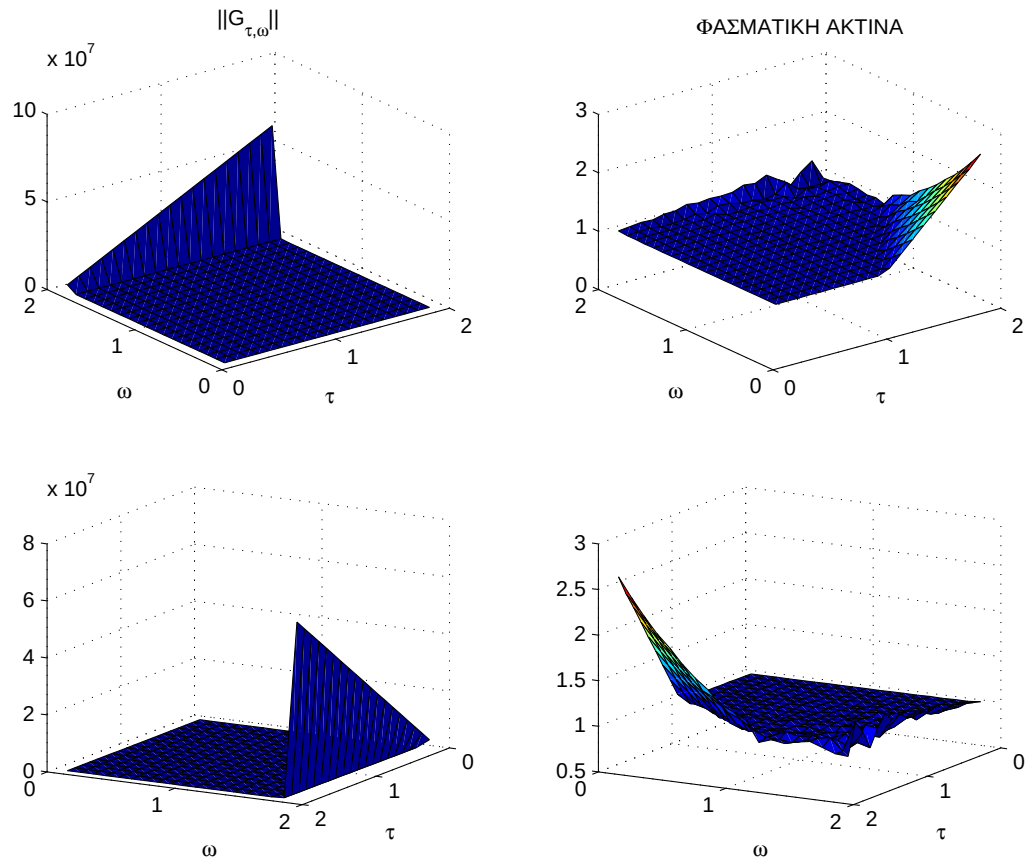
Το διάγραμμα ισοϋψών καμπύλων είναι:



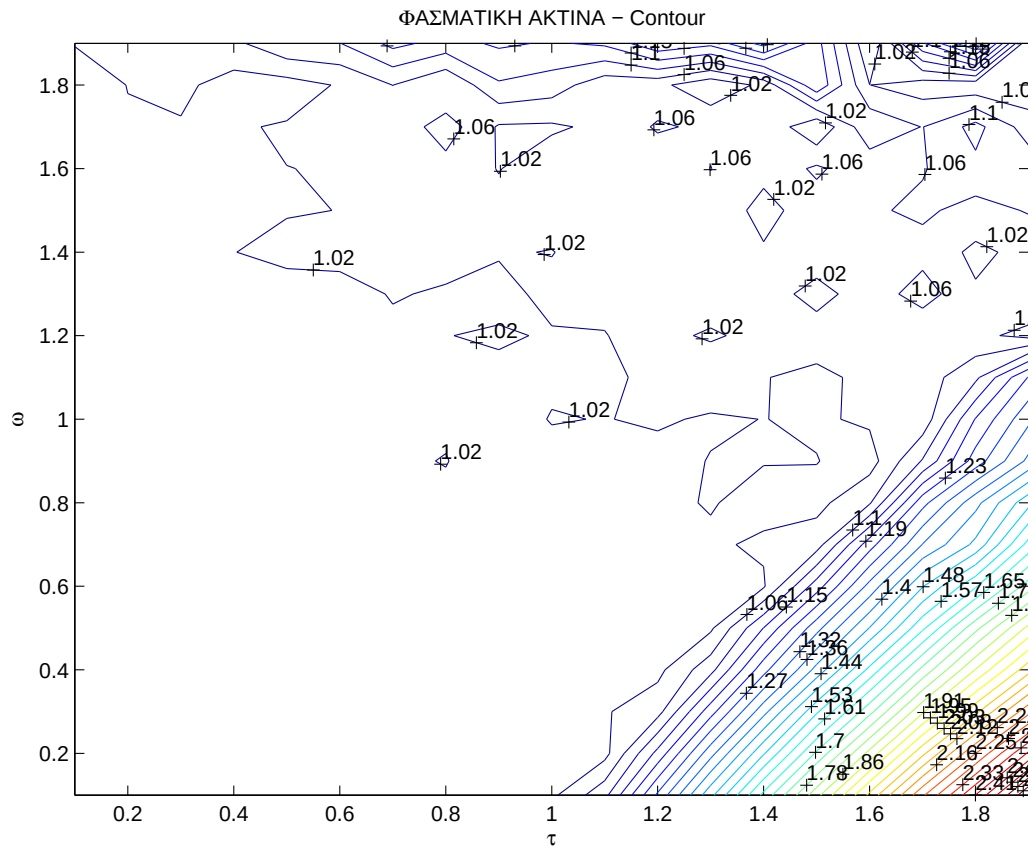
Το βέλτιστο βρέθηκε για $\tau = 1.4$, $\omega = 1.7$ όπου $S(G_{1.4,1.7}) \cong 0.8475$. Πράγματι χρειάστηκαν 43 επαναλήψεις για να λάβουμε τη λύση:



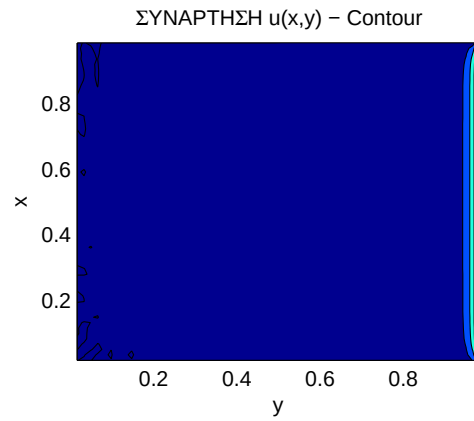
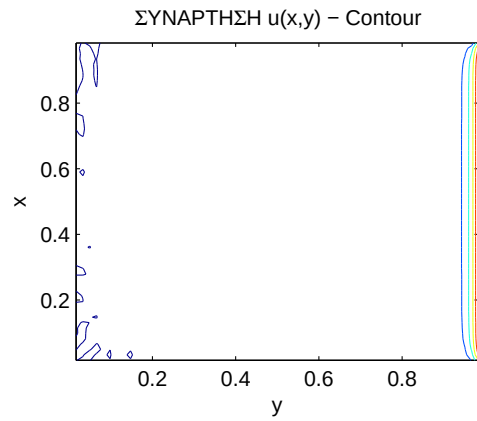
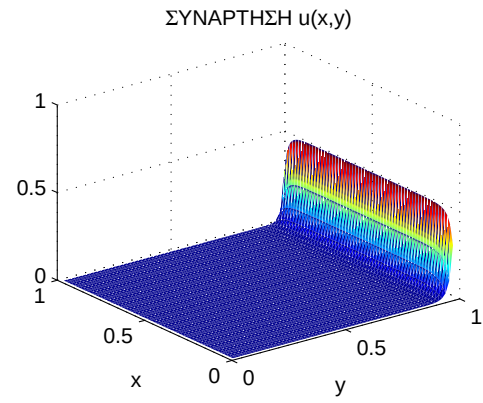
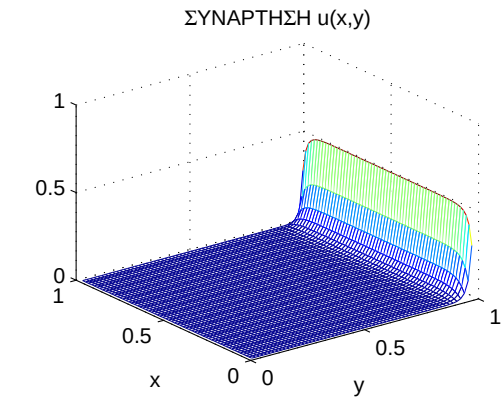
Έστω $N = 60$, $(c_1, c_2, c_3) = (2, 20, 7)$. Η γραφική παράσταση της νόρμας και της φασματικής ακτίνας είναι (βήμα 0.1):



Το διάγραμμα ισοϋψών καμπύλων είναι:



Το βέλτιστο βρέθηκε για $\tau = 1.9 = \omega = 1.9$ όπου $S(G_{1.3, 1.8}) \cong 0.9778$. Χρησιάστηκαν 186 επαναλήψεις για να λάβουμε τη λύση:



Κοιτάζοντας το διάγραμμα ισοϋψών καμπύλων, βλέπουμε ότι γύρω στο $\tau = 1.4$, $\omega = 1.6$ υπάρχουν καμπύλες που δηλώνουν πιθανό ελάχιστο. Πράγματι για αυτές τις παραμέτρους η ESOR ολοκληρώνει σε 61 επαναλήψεις! Πιθανότατα η αντίφαση αυτή να οφείλεται στα σφάλματα κατά την προσέγγιση της φασματικής ακτίνας.