2. VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES, LOI NORMALE

2.1. **Lois et densités.** On veut faire une loi de probabilité à support compact sur $[-1, 1]$, à densité maximum en 0. Définir explicitement une loi...

(1) en chapeau (triangulaire),
(2) en parabole $f(x) = a(1 + x)(1 - x)$,
(3) Dans les deux cas, déterminer espérance et variance de X.

2.2. **Détection de signal.** Un message binaire est envoyé par un signal S qui est soit $+1$, soit -1. En raison des imperfections du canal de communication, le signal est corrompu par un bruit additif N distribué comme une variable normale avec moyenne $\mu = 0$ et variance $\sigma^2 = 1/4$. Le récepteur decide que le signal $+1$ a été transmis si la valeur reçue $R = S + N$ est plus large que 0, et decide que le signal -1 a été transmis si $R < 0$. Calculer la probabilité d'erreur.

2.3. **Des notes !** On suppose que les notes des étudiants de Polytech suivent une loi normale $\mathcal{N}(\mu = 12, \sigma^2 = 16)$. On choisit aléatoirement et de façon indépendante n étudiants et on note X_i la note de l'étudiant i. Considérons la somme de ces n variables, notée S_n, et la fraction $M_n := S_n/n$. M_n est vue comme la note moyenne parmi les n étudiants. (Application numérique : $n = 1$, $n = 10$, $n = 36$.)

(1) Écrire S_n en fonction des $\{X_i\}_i$ et calculer son espérance et sa variance.
(2) Quelle est la loi de distribution de S_n ?
(3) Quelle est la loi de distribution de M_n ? Préciser son espérance et sa variance.
(4) Quelle est la probabilité que $M_n > 14$?
(5) Quelle est la probabilité que $M_n \leq 10$?
(6) Quelle est la probabilité que $10 < M_n \leq 14$?
(7) Déterminer un intervalle $[\mu - a_n, \mu + a_n]$ centré en μ tel que la probabilité que M_n soit dans cet intervalle est au moins 95%.

2.4. **Fréquence des piles et faces.** On effectue n tirages à pile ou face avec une pièce non truquée. Soit f_n la fréquence des "pile".

(1) Calculer l'espérance et la variance de f_n.
(2) Trouver la loi de distribution de f_n d'abord de manière exacte (aux approximations numériques près) et ensuite en utilisant l'approximation du théorème central limite.
(3) Trouver une valeur de n qui permette d'affirmer que f_n sera comprise entre 0.45 et 0.55 avec une probabilité supérieure à 0.9.
(4) Trouver une valeur de n qui permette d'affirmer que f_n sera comprise entre 0.49 et 0.51 avec une probabilité supérieure à 0.99.

2.5. **Théorème Central Limite [R].** Vérifier le théorème central limite comme suit.

(1) Produire n échantillons chacun avec s variables aléatoires $\{X_{i,k}, i = 1, \dots n, k = 1, \dots, s\}$ indépendantes et uniformément distribuées entre 0 et 6.
(2) Pour chaque échantillon i, calculer $Y_i = \frac{\sum_{k=1}^{s} X_{i,k} - \mu}{\sqrt{s\sigma^2}}$, où μ et σ^2 sont respectivement l'espérance et la variance des variables $X_{i,k}$.
(3) Quand s tend vers l'infini, vers quelle variable normale (W) converge Y_i ?
(4) Tracer l'histogramme des variables $\{Y_i, i = 1, \dots, n\}$ et la densité de probabilité de W.
(5) Vérifier que quand s augmente l'histogramme tend vers la densité de probabilité de la variable normale W.

Suggestions : stocker les variables $\{X_{i,k}, i = 1, \dots n, k = 1 \dots s\}$ dans une matrice, utiliser les fonctions R : *runif*, *hist*, *dnorm*, *curve*.

2.6. **Maximum de deux variables uniformes.** Soient deux v.a. X et Y ayant la même fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

On s'intéresse à $Z := \max\{X, Y\}$. On note les événements A_x : "$X \leq x$", B_x : "$Y \leq x$" et C_x : "$Z \leq x$".

(1) Quelle est la relation entre A_x, B_x et C_x ?
(2) En supposant que X et Y sont indépendantes, trouver la fonction de répartition de Z.
(3) Que vaut la variance de Z ?
(4) La comparer avec la variance de X.

2.7. **Vivement le ski !** La société *Omlet* a fabriqué un téléphérique qui s'effondre à coup sûr dès que le poids des passagers dépasse 3000 kg. L'ingénieur sécurité qui sait que le poids moyen d'un passager est de 70kg décide de limiter la capacité du téléphérique à 40 personnes. Un groupe aléatoire de 40 personnes (40 élèves du Polytech ??) prend le téléphérique. Calculer le risque que celui-ci se casse en fonction de l'écart type σ et pour les valeurs $\sigma = 5$ et $\sigma = 10$.