

1. NOTIONS DE PROBABILITÉ ET D'ANALYSE COMBINATOIRE

1.1. **Des cours.** Dans une certaine université, il y a 500 étudiants inscrits à au moins un des trois cours A, B ou C. Ces étudiants sont répartis comme suit: 329 suivent le cours A, 186 le cours B, 295 le cours C, 83 les cours A et B, 217 les cours A et C et 63 les cours B et C.

- (1) Quelle est la probabilité qu'un étudiant tiré au hasard soit inscrit aux cours A ?
- (2) Quelle est la probabilité qu'un étudiant tiré au hasard soit inscrit aux trois cours ?
- (3) Quelle est la probabilité qu'un étudiant tiré au hasard suive les cours A ou C, mais pas le cours B ?

1.2. **Jet de 3 dés.** Dans un jet de trois dés, on considère les événements suivants:

- A: "La somme des points est égale 'a 3"
 B: "La somme des points est égale 'a 4"
 C: "Au moins un 1 apparaît"
 D: "Deux dés au moins ont des faces identiques"
 E: "La somme des points obtenus est paire"

Calculer successivement les probabilités des événements.

1.3. **Poker.** Le poker se joue avec des mains de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes.

- (1) Quelle est la probabilité de recevoir une couleur ?
- (2) Quelle est la probabilité de recevoir un carré d'as ?
- (3) Quelle est la probabilité de recevoir une main pleine ? (Un brelan et une paire.)

1.4. **Défense antiaérienne.** Un système de défense antiaérienne est constituée d'un radar et d'une batterie avec deux missiles. Si un avion ennemi est présent, le radar le détecte avec probabilité 0.99 et il active automatiquement la batterie qui lance successivement les deux missiles. La probabilité que le premier missile détruit l'avion est 0.8. Si le premier missile échoue, le second missile peut détruire l'avion avec une probabilité égale à 0.9. Calculez la probabilité que l'avion ennemi soit détruit par le premier missile, par le seconde et la probabilité qu'il soit détruit par l'un de deux.

1.5. **Analyse médicale.** Un test médical révèle la maladie qu'il recherche dans 95% des cas où elle est présente. Mais il donne aussi une indication positive erronée chez 1% des patients sains. C'est une maladie rare dont 0.5% de la population est atteinte. Quelle est la probabilité d'être vraiment malade quand le test est positif ?

1.6. **Centenaires.** La proportion de centenaires dans une certaine population est de 0.2%. On tire un échantillon de 1000 individus. Calculer de façon exacte et de façon approximative la probabilité de trouver

- (1) un centenaire exactement ?
- (2) deux centenaires exactement ?
- (3) au moins un centenaire ?
- (4) trois centenaires au plus ?

Que peut-on en déduire ?

1.7. **Lancer deux dés.** On lance deux dés en même temps et on s'intéresse à la somme S des points obtenus.

- (1) Quelle est la loi de probabilité de S ?

1.8. **Lois marginales.** X et Y sont deux variables aléatoires sur le même espace fondamental Ω , avec $X(\Omega) = \{7, 8, 9, 10\}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$. La loi jointe de probabilité de X et Y est représentée dans le tableau ci-dessous :

Y					
4	0	1/20	1/20	1/20	
3	1/20	2/20	3/20	1/20	
2	1/20	2/20	3/20	1/20	
1	0	1/20	1/20	1/20	
	7	8	9	10	X

Calculer les lois de probabilité marginales de X et de Y et l'espérance mathématique de $X + Y$.

1.9. **Lancers d'une pièce de monnaie.** On jette une pièce de monnaie un certain nombre de fois jusqu'à obtenir soit "pile" soit un maximum de cinq "face". En désignant par X le nombre de jets effectués, trouver la distribution de X et calculer sa moyenne et sa variance.

1.10. **Piéton ou motard ?** Si la météo est bonne (ce qui arrive avec une probabilité de 0.6), Alice va à pied à l'université à une vitesse $V = 5\text{km/h}$, sinon elle conduit sa moto à une vitesse $V = 50\text{km/h}$. Si la distance entre la maison d'Alice et l'université est de 2km, quel est le temps moyen pour se rendre à l'université ?

1.11. **Échecs.** Deux personnes A et B jouent un tournoi d'échecs, le vainqueur du tournoi est celui qui gagne 2 parties consécutives ou bien un total de 3 parties. Le joueur A a 60% de chances de gagner une partie.

- (1) Quelle est la probabilité pour que A gagne le tournoi ?
- (2) On désigne par X le nombre de parties jouées. Trouver la distribution de X et calculer sa moyenne et sa variance.

Pour s'amuser encore plus...

1.12. **Lancer de deux dés.** Quelle est la probabilité qu'un des deux dés soit un 6 sachant que

- (1) La somme fait 8.
- (2) Les deux dés ont des valeurs différentes.
- (3) Les deux propriétés ci-dessus sont vraies.

1.13. **Tournoi d'échecs.** Vous entrez dans un tournoi d'échecs où vos chances de gagner une partie sont de 0.3 contre la moitié des joueurs (les joueurs de niveau avancé), 0.4 contre un quart des joueurs (les joueurs de niveau intermédiaire), et 0.5 contre le quart restant (les débutants). Vous jouez une partie contre un adversaire choisi au hasard.

- (1) Quelle est la probabilité de gagner ?
- (2) Si vous gagnez un match, quelle est la probabilité que vous avez joué contre un joueur de niveau avancé? Contre quel type de joueur il est plus probable que vous ayez joué ?

1.14. **Trousseau de clés.** Une personne essaie d'ouvrir une porte à l'aide d'un trousseau comportant n clés et dont une seule est la bonne. Une clé testée n'est pas remise dans le lot. Soit X une v.a.d. donnant le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte. Trouver la distribution de X et vérifier ainsi que X suit une loi discrète uniforme de paramètre n .