Stabilité des mesures de bord pour la détection de lignes caractéristiques

F. Chazal[1] D. Cohen-Steiner[2] Q. Mérigot[2]

[1]Geometrica, INRIA Futurs

[2]Geometrica, INRIA Sophia-Antipolis

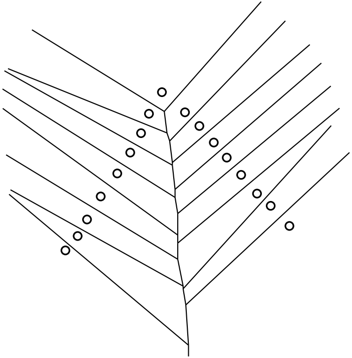
15 juin 2007 / Journées informatique et géométrie

Motivations

C étant un nuage de point échantillonnant $K \subseteq \mathbb{R}^n$, on veut :

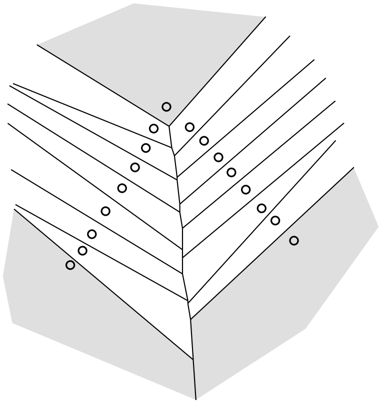
1. déterminer les zones singulières de K à partir de C seulement
2. le coût de la méthode ne doit pas (trop) dépendre de la dimension ambiante
   $\Longrightarrow$ on ne peut pas construire un diagramme de Voronoï de C
3. le résulat doit être stable sous perturbation Hausdorff

Les cellules de Voronoï du bord sont «grosses»..?



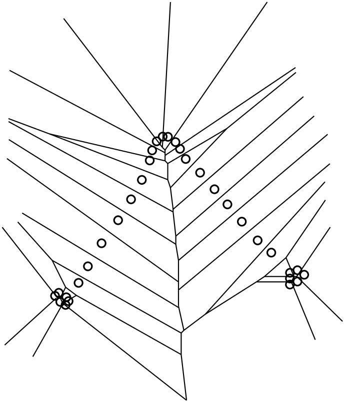
- la taille des cellules est sensible aux perturbations !
- par contre si on prend l'union des cellules de Voronoï dont le site est contenu dans une petite boule...

Les cellules de Voronoï du bord sont «grosses»..?



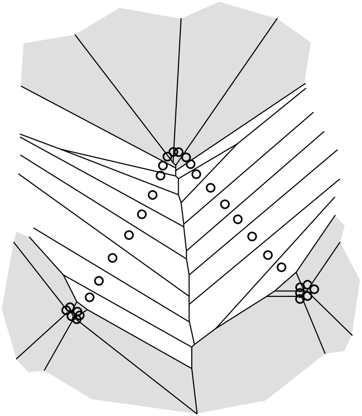
- la taille des cellules est sensible aux perturbations !
- par contre si on prend l'union des cellules de Voronoï dont le site est contenu dans une petite boule...

Les cellules de Voronoï du bord sont «grosses»..?



- la taille des cellules est sensible aux perturbations !
- par contre si on prend l'union des cellules de Voronoï dont le site est contenu dans une petite boule...

Les cellules de Voronoï du bord sont «grosses»..?



- la taille des cellules est sensible aux perturbations !
- par contre si on prend l'union des cellules de Voronoï dont le site est contenu dans une petite boule...

Projection sur un compact

Définition

La projection $p_K : \mathbb{R}^n \to K$ associe à un point $x \in \mathbb{R}^n$ son plus proche voisin dans K (s'il existe)

1. si K est fini, p_K envoie une cellule de Voronoï sur son site (et n'est pas définie sur les face de Voronoï)
2. en général, p_K est partout sauf sur l'axe médian $\mathcal{M}(K)$
3. $\mathcal{M}(K)$ est de mesure nulle (Rademacher)

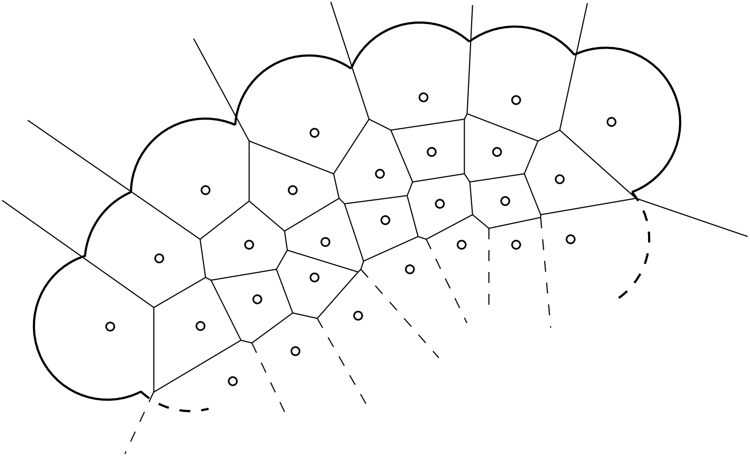
Définitions

Si $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathrm{p}_K : \mathbb{R}^n \to K$ est la projection sur K, et K^r le r-offset de K, *ie.* $K^r = \{x \in \mathbb{R}^n; \mathrm{d}(x, K) \leq r\}$. La mesure de bord $\mu_{K,r}$ est définie par :

$$\forall B \subseteq \mathbb{R}^n, \;\; \mu_{K,r}(B) = \mathrm{vol}^n(\{x \in K^r; \mathrm{p}_K(x) \in B\})$$

1. «mesure» au sens de la théorie de la mesure
2. définit une distribution de masse concentrée sur K qui peut être volumique, linéique, surfacique, etc.

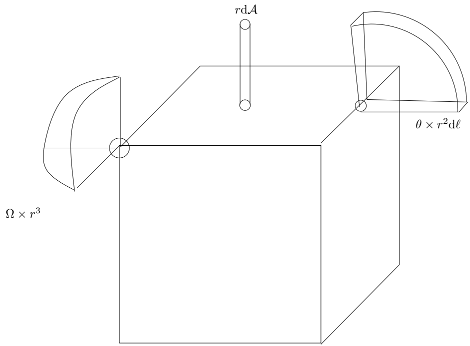
Exemple de mesure de bord : nuage de points



la mesure de bord s'écrit comme une somme de masses de Dirac :

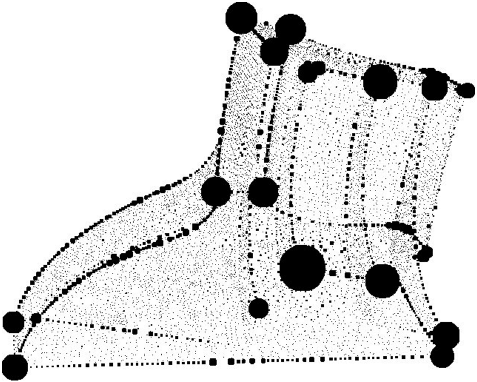
$$\mu_{C,r} = \sum_i \mathrm{vol}_n(\mathrm{Vor}(x_i) \cap C^r)\delta_{x_i}$$

Exemple de mesure de bord : polyèdre convexe



- la mesure de bord se décompose en somme : $\mu_{C,r} = \sum_{i=1}^{3} \Phi_{3-i} r^i$ où Φ_3 est volumique, Φ_2 surfacique, etc.
- les Φ_i sont (à une constante près) les *mesures de courbure* du cube

Exemple de mesure de bord : nuage de points (bis)



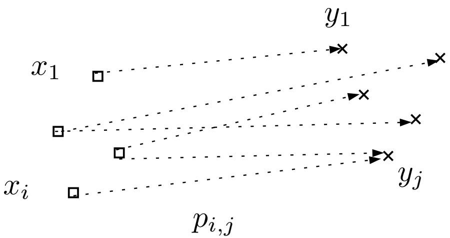
les volumes des cellules de Voronoï sont évalués par une méthode Monte-Carlo

Distance de Wasserstein

1. distance de Wasserstein : distance entre deux mesures ν et μ sur $\mathbb{R}^n$ de même masse totale
2. version discrète : $\mu = \sum_i c_i \delta_{x_i}$, $\nu = \sum_j d_j \delta_{y_j}$,

$$W(\mu, \nu) = \inf\{\sum_{i,j} p_{ij} \|x_i - y_j\| ; \sum_j p_{ij} = d_j \text{ et } \sum_i p_{ij} = c_i\}$$

3. version générale : la distance de Wasserstein entre μ et ν est le minimum du coût des transports de μ à ν



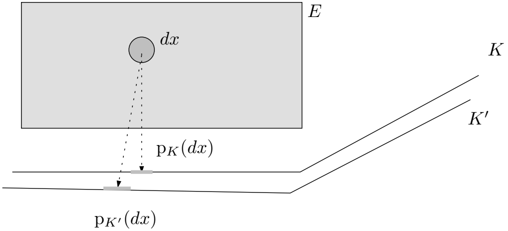
Distance de Wasserstein entre mesures de bord

- pour simplifier, on fixe E un ouvert à bord lisse E, et on considère la mesure $\mu_{K,E}$ définie par

$$\forall B, \mu_{K,E}(B) = \mathrm{vol}_n(\{x \in E; p_K(x) \in B\})$$

- K, K' sont deux compacts, et on veut majorer $W(\mu_{K,E}, \mu_{K',E})$
- il suffit de trouver **un** plan de transport et de majorer son coût

Distance de Wasserstein entre mesures de bord (bis)

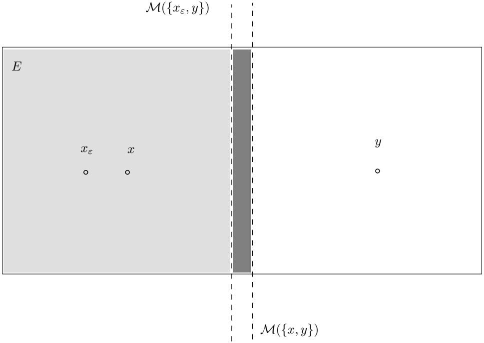


on considère le plan de transport suivant : une petite masse $p_K(\mathrm{d}x)$ provenant d'un élément de masse $\mathrm{d}x$ de E est transportée en $p_{K'}(\mathrm{d}x)$

le coût total de ce transport est :

$$\int_E \|p_K(x) - p_{K'}(x)\| \,\mathrm{d}x = \left\|p_K - p'_K\right\|_{\mathrm{L}^1(E)}$$

Ex. de distance entre mesures de bord



- $K_\varepsilon = \{x_\varepsilon, y\}$ et $K = \{x, y\}$
- sur la partie gris foncé, $\|p_K(w) - p_{K_\varepsilon}(w)\| = \|x_\varepsilon - y\| = \|x - y\| + \varepsilon$
- sur la partie gris clair, $\|p_K(w) - p_{K_\varepsilon}(w)\| = \varepsilon$
- au total, $\|p_K - p_{K'}\|_{\mathrm{L}^1(E)} = W(\mu_{K,E}, \mu_{K',E}) = O(\varepsilon)$

les projections sur K et K_ε peuvent beaucoup différer sur un voisinage (fin) de l'axe médian de K

Théorème de stabilité des projections

Théorème

Soit E un ouvert à bord lisse de $\mathbb{R}^n$, K et K' deux compacts *assez proches*, il existe une constante $C(n)$ telle que

$$\begin{aligned} \|p_K - p_{K'}\|_{\mathrm{L}^1(E)} &:= \int_E \|p_K - p_{K'}\| \\ &\leq C(n)[\mathrm{vol}_n(E) + \mathrm{diam}(K)\mathrm{vol}_{n-1}(\partial E)]\sqrt{R_K \mathrm{d}_H(K, K')} \end{aligned}$$

où $R_K = \sup_{x \in E} \mathrm{d}(x, K)$.

1. *assez proches* signifie que $\mathrm{d}_H(K, K')$ est plus petit que $\min(R_K, \mathrm{diam}(K), \mathrm{diam}(K)^2/R_K)$
2. $C(n) = O(\sqrt{n})$
3. le terme en $\mathrm{vol}_{n-1}(\partial E)$ est inévitable

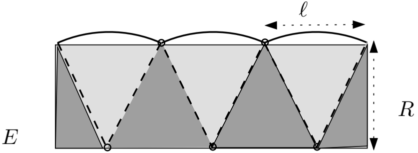
Esquisse de preuve

- $p_K = \nabla v_K$ où $v_K : x \to \|x\|^2 - d_K(x)^2$ est convexe
- si $\phi, \psi : E \to \mathbb{R}$ sont convexes et $k = \mathrm{diam}(\nabla\phi(E) \cup \nabla\psi(E))$,

$$\|\nabla\phi - \nabla\psi\|_{\mathrm{L}^1(E)} \leq C(n)[\mathrm{vol}_n(E) + k\,\mathrm{vol}_{n-1}(\partial E)]\,\|\phi - \psi\|_\infty^{1/2}$$

Optimalité du théorème de stabilité des projections

K = segment unité dans $\mathbb{R}^2$, R fixé
K_ℓ = arcs de cercles approximant K



- $\mathrm{d}_H(K, K_\ell) \leq R\ell^2/8$.
- un calcul montre que $\|p_K - p_{K_\ell}\|_{\mathrm{L}^1(E)} = \Omega(\ell)$ (E est le rectangle de taille $1 \times R$ attaché à K).
- finalement, $\|p_K - p_{K_\ell}\|_{\mathrm{L}^1(E)} = \Omega(\mathrm{d}_H(K, K_\ell)^{1/2})$

Théorème

Soit K un compact fixé, et E un ouvert à bord lisse, alors

$$\mathrm{W}(\mu_{K,E}, \mu_{K',E}) \leq C(n, E, K)\mathrm{d}_H(K, K')^{1/2}$$

dès lors que K' est assez proche de K.

$\Longrightarrow$ théorème quantitatif de stabilité des mesures de courbure

Conclusion

Résumé des résultats :

1. construction d'une mesure «de bord» qui charge les zones singulières d'un compact
2. cette mesure dépend continûment du compact (théorème quantitatif)

Questions ouvertes :

1. peut-on remplacer les projections par des projections approchées ?
2. comment peut-on extraire l'information géométrique contenue dans la mesure de bord ou dans les mesures de courbure (on a besoin d'une notion stable de support)