# RECONSTRUCTION DE POLYGONES CONVEXES À SOMMETS ENTIERS

Émilie CHARRIER

Lilian BUZER

Université Paris-Est Marne-la-Vallée

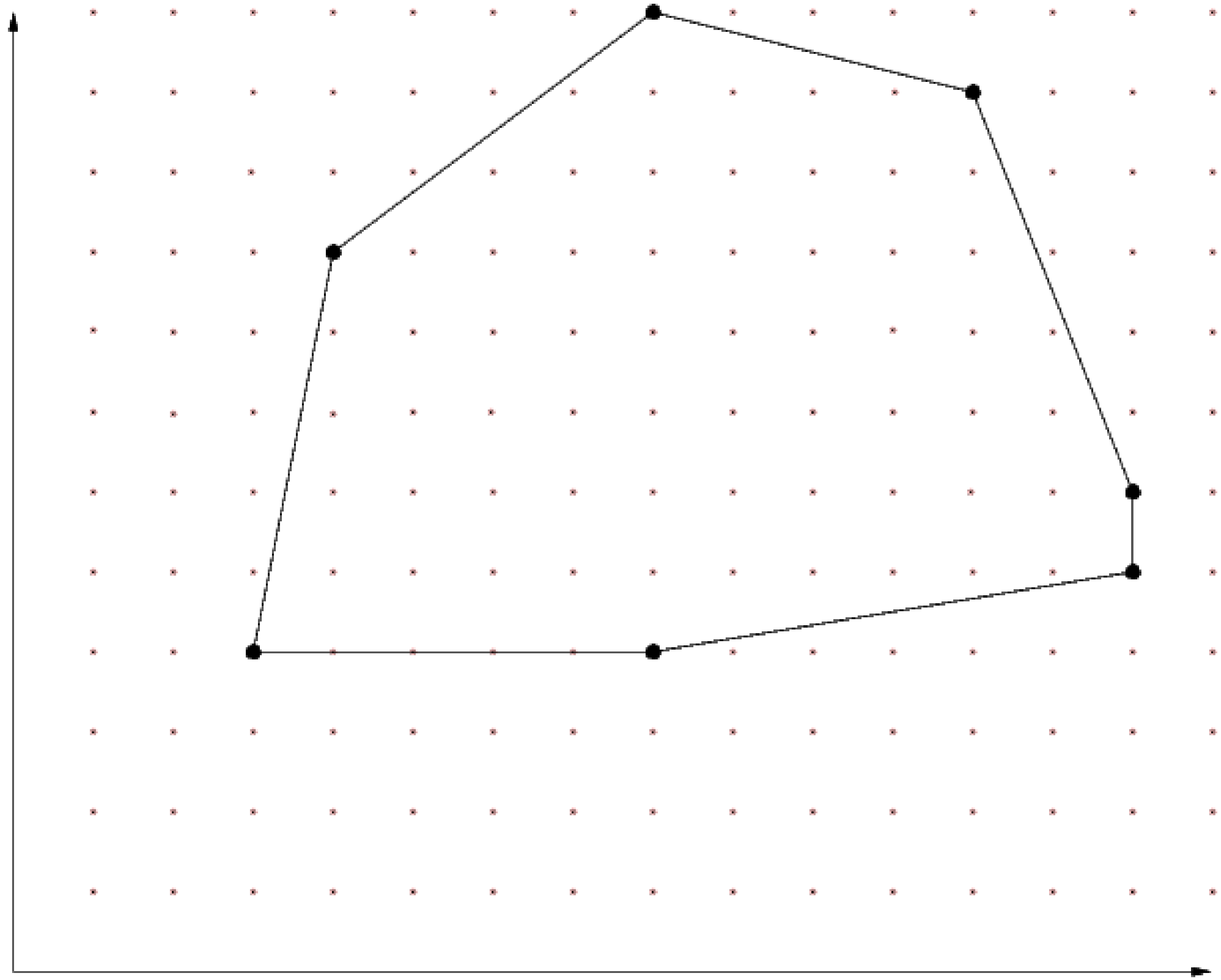
Laboratoire d'Informatique de l'IGM

Laboratoire A2SI, ESIEE

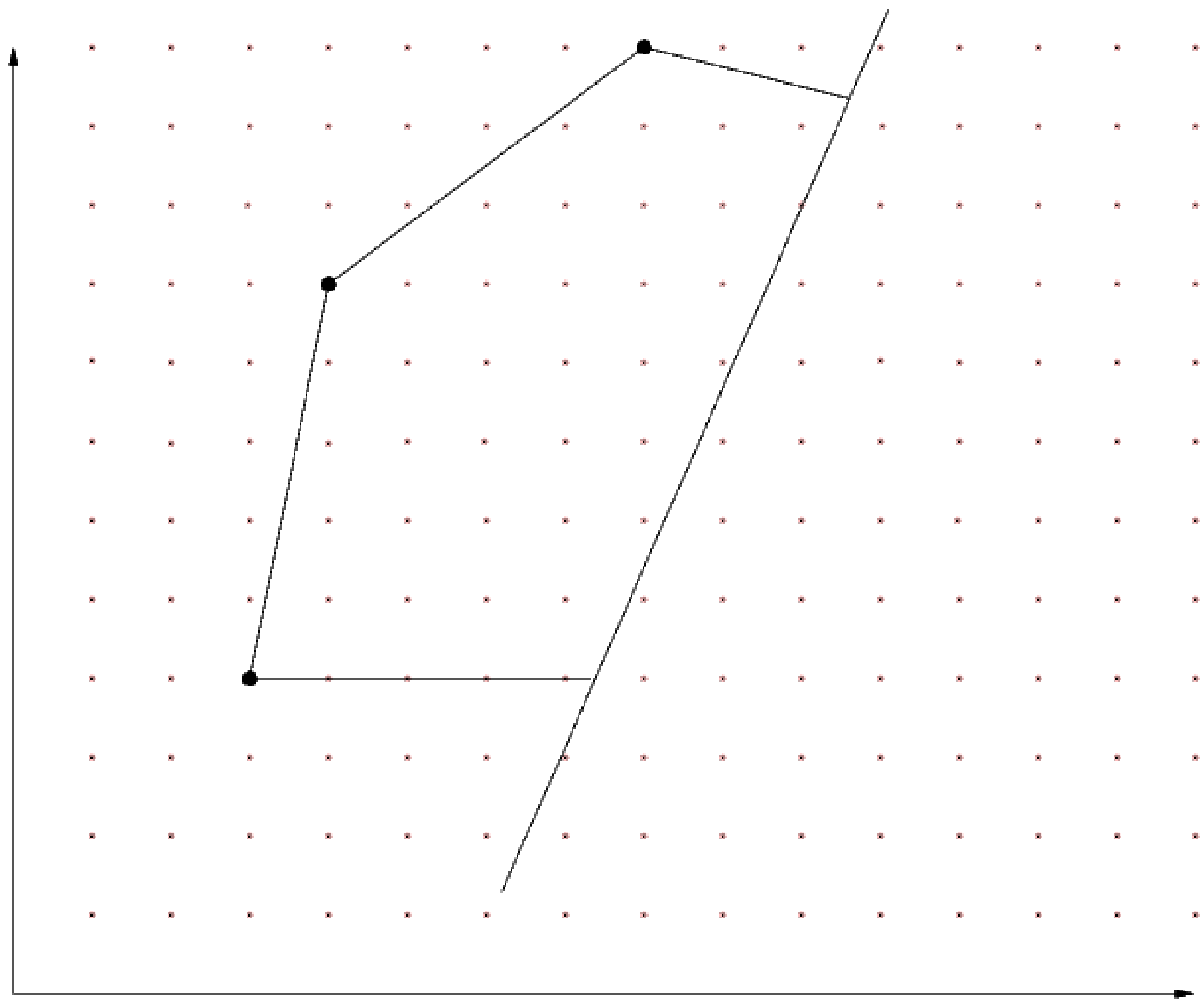
# CADRE DU PROBLÈME

- Espace de travail discret bidimensionnel (grille 2D régulière)
- Description des convexes par des polygones à sommets portés par la grille
- Intersection d'un tel poygone avec un demi-plan ⇨ reconstruction d'un nouveau polygone convexe à sommets portés par la grille

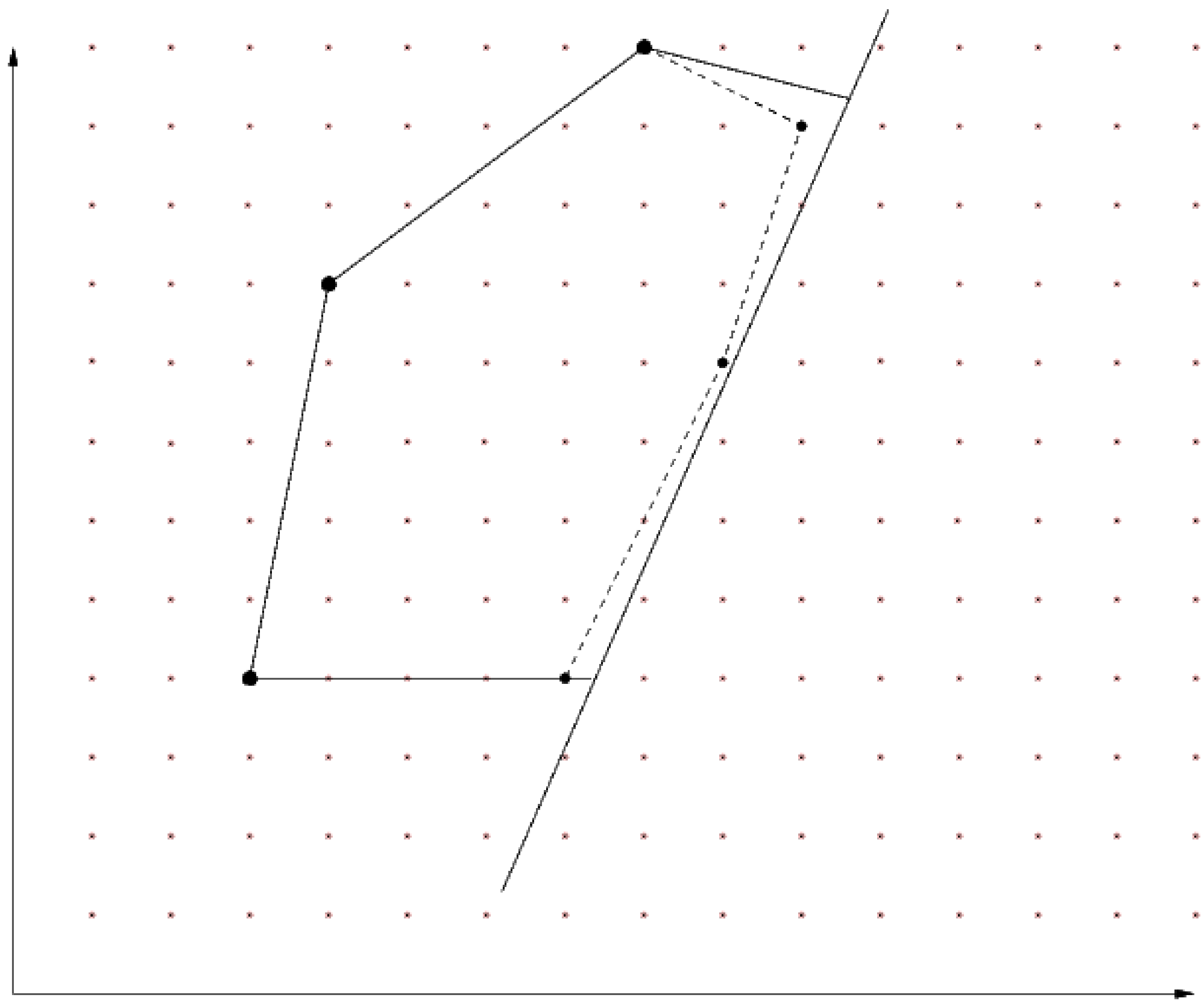
# CADRE DU PROBLÈME



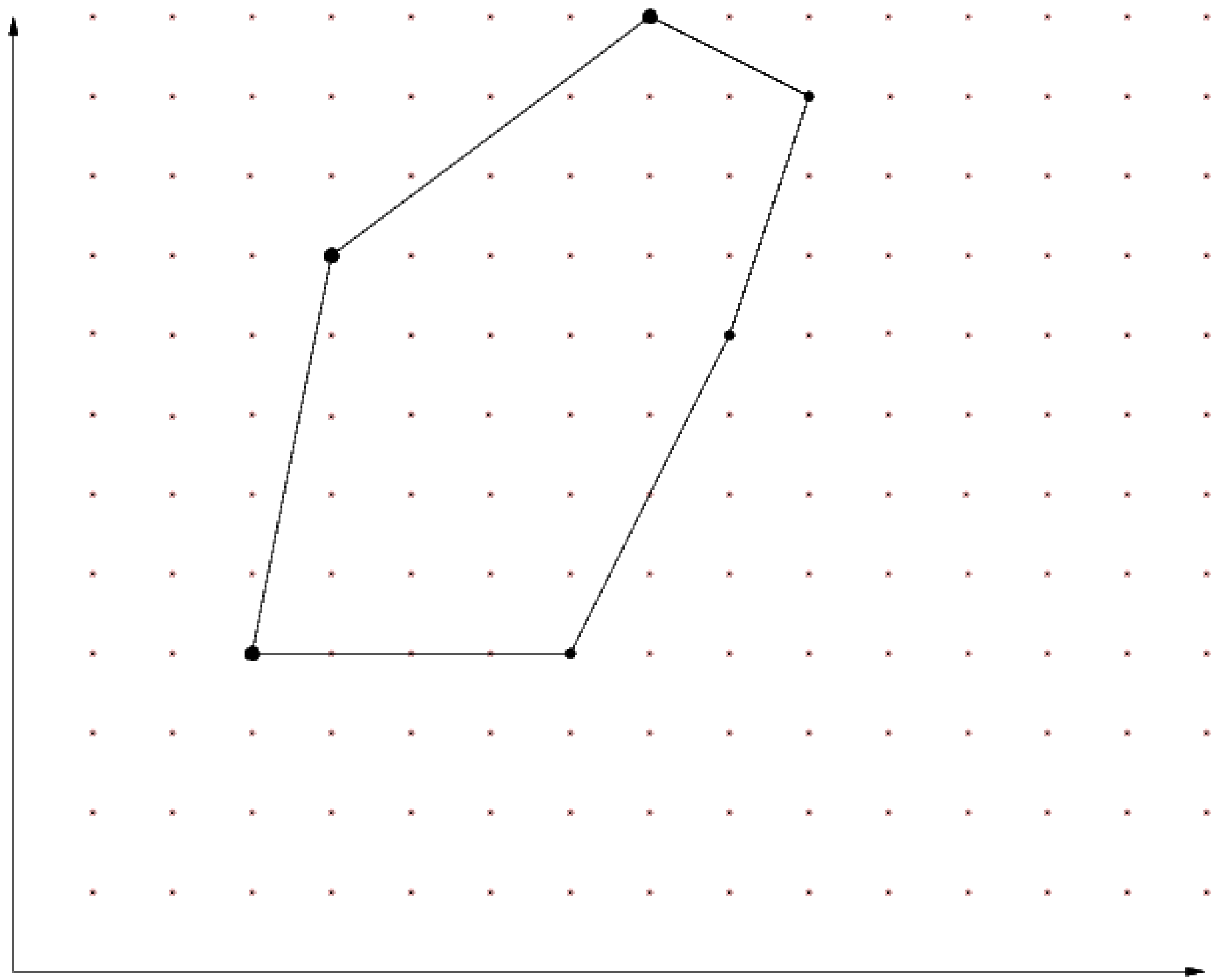
# CADRE DU PROBLÈME



# CADRE DU PROBLÈME

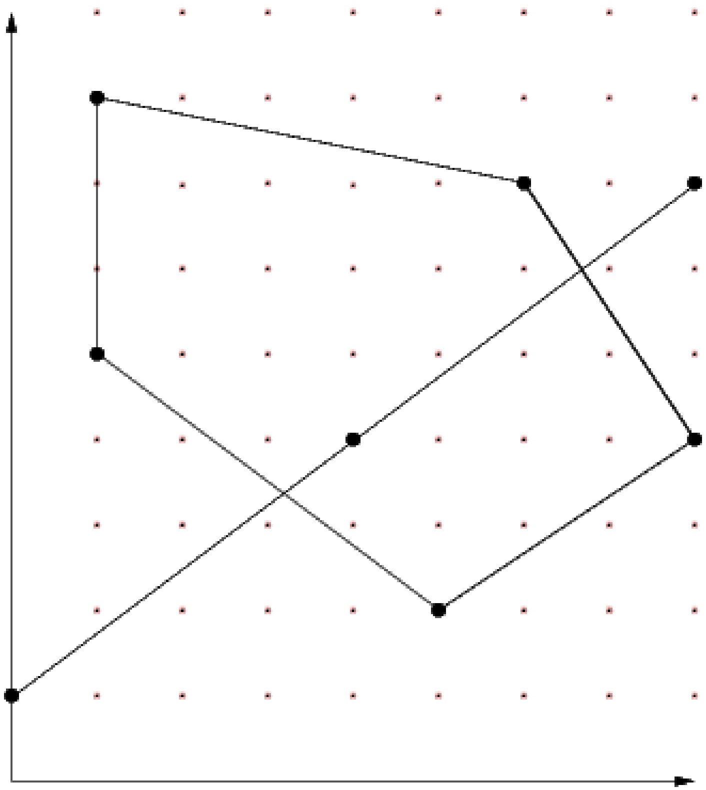


# CADRE DU PROBLÈME



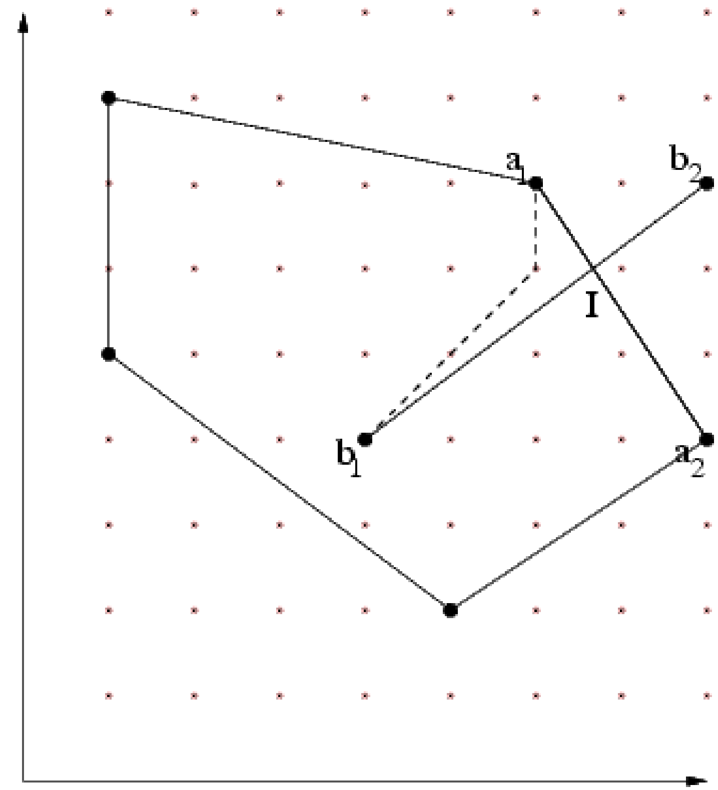
# CADRE DU PROBLÈME (2)

- Reconstruction d'enveloppes convexes à sommets portés par la grille
- Enveloppe convexe dans un triangle décrit par deux segments à extrémités entières (décalage)



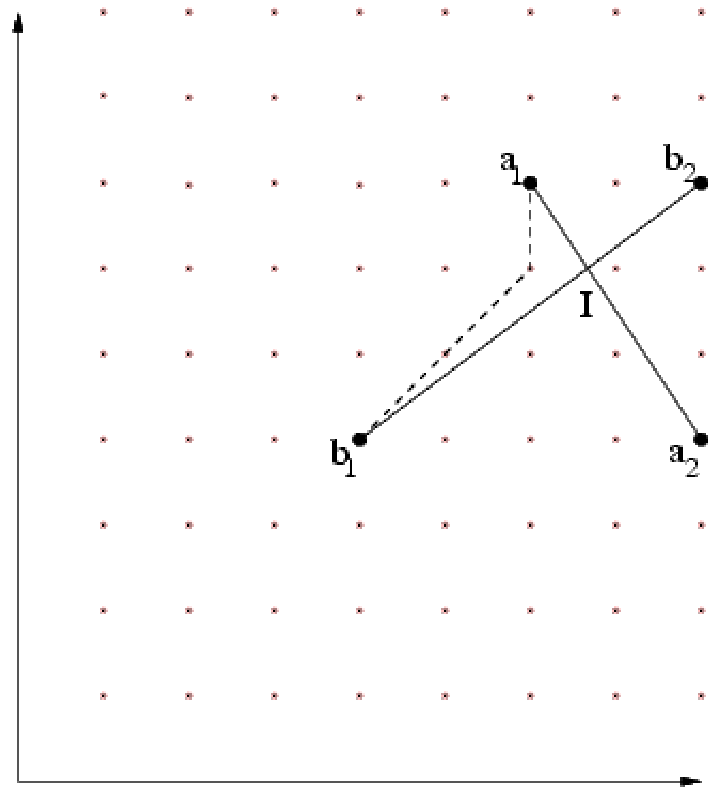
# CADRE DU PROBLÈME (2)

- Reconstruction d'enveloppes convexes à sommets portés par la grille
- Enveloppe convexe dans un triangle décrit par deux segments à extrémités entières (décalage)



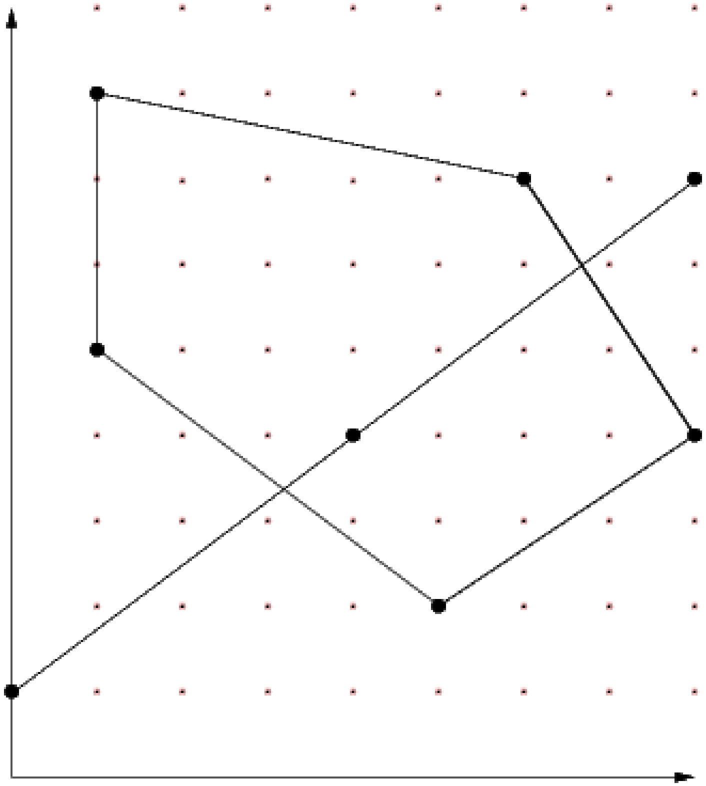
# CADRE DU PROBLÈME (2)

- Reconstruction d'enveloppes convexes à sommets portés par la grille
- Enveloppe convexe dans un triangle décrit par deux segments à extrémités entières (décalage)



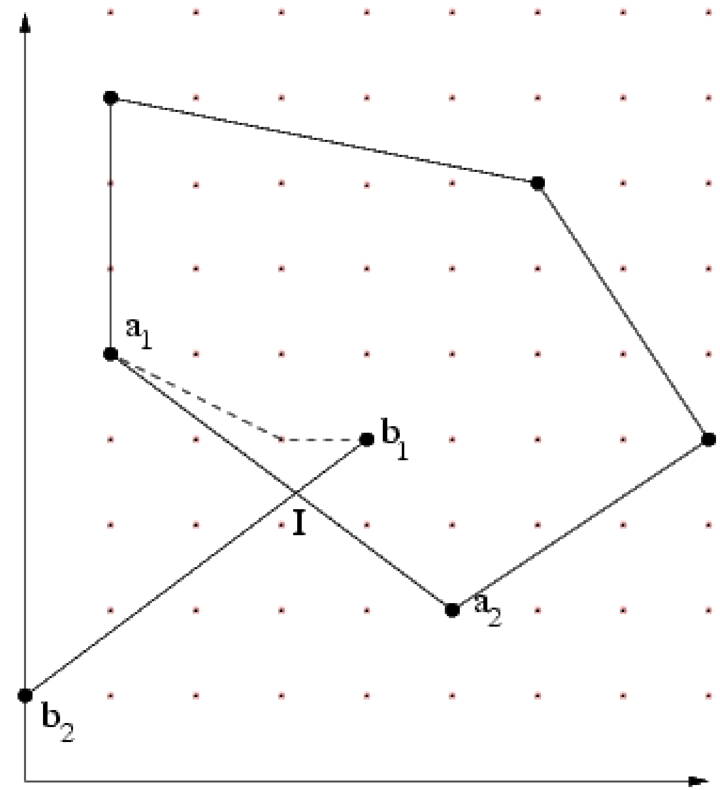
# CADRE DU PROBLÈME (2)

- Reconstruction d'enveloppes convexes à sommets portés par la grille
- Enveloppe convexe dans un triangle décrit par deux segments à extrémités entières (décalage)



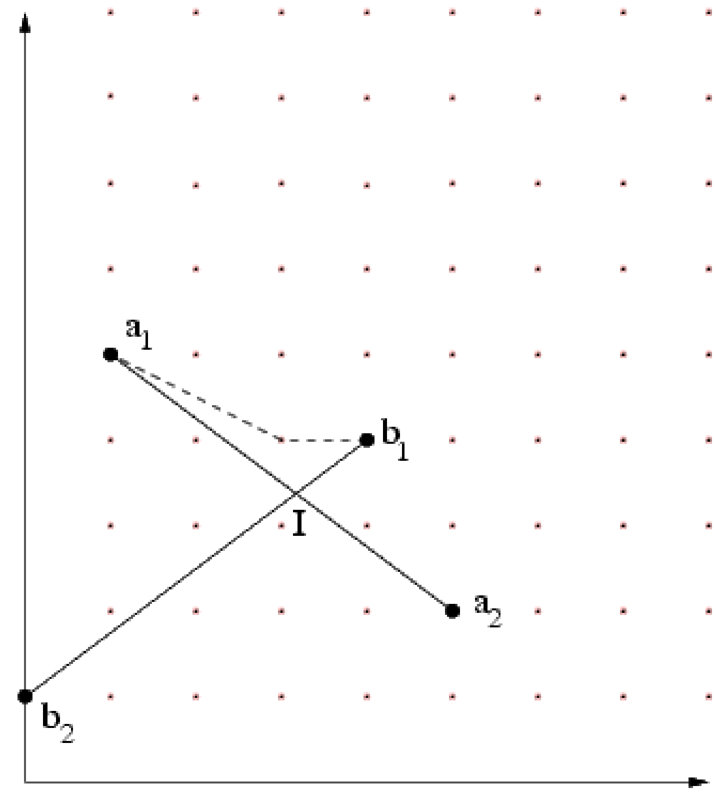
# CADRE DU PROBLÈME (2)

- Reconstruction d'enveloppes convexes à sommets portés par la grille
- Enveloppe convexe dans un triangle décrit par deux segments à extrémités entières (décalage)



# CADRE DU PROBLÈME (2)

- Reconstruction d'enveloppes convexes à sommets portés par la grille
- Enveloppe convexe dans un triangle décrit par deux segments à extrémités entières (décalage)



# PLAN

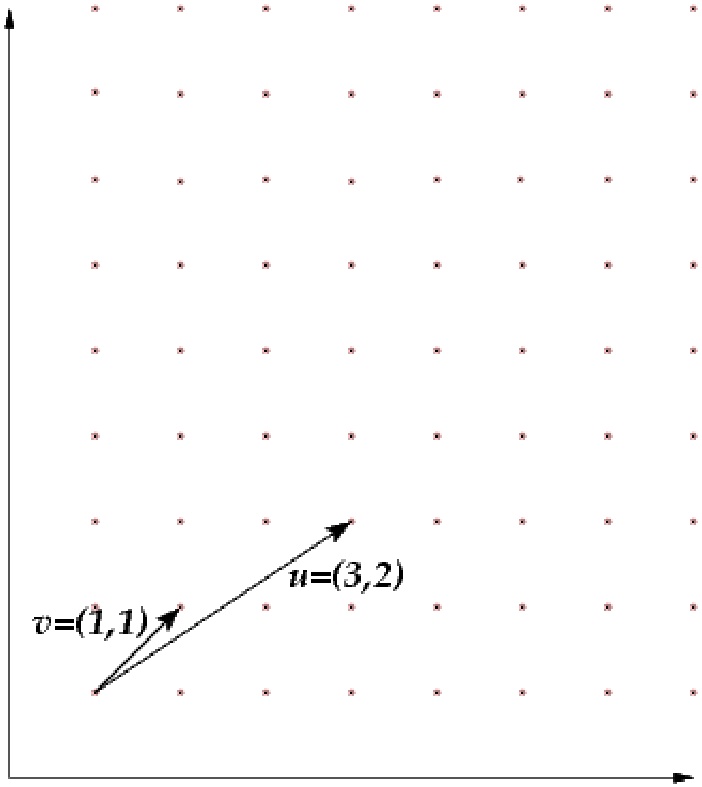
- Rappels de théorie des nombres
- Historique: voiles de Klein
- Étude du problème dans le cas général
- Algorithme de reconstruction
- Exemple et complexité de l'algorithme
- Conclusion

# PLAN

- **Rappels de théorie des nombres**
- Historique: voiles de Klein
- Étude du problème dans le cas général
- Algorithme de reconstruction
- Exemple et complexité de l'algorithme
- Conclusion

# RAPPELS DE THÉORIE DES NOMBRES

- Vecteur de Bézout d'un vecteur entier *u* irréductible
  $v \;\; t.q. \;\; u \wedge v = \pm 1$
- Résolution d'équation diophantienne
  $Trouver \;\; v \in \mathbb{Z}^2 \;\; t.q. \; -u_y v_x + u_x v_y = 1$
- Ensemble des solutions (algorithme d'Euclide étendu) $(x_{0,} y_0) + k u , \;\; k \in \mathbb{Z}$



# RAPPELS DE THÉORIE DES NOMBRES

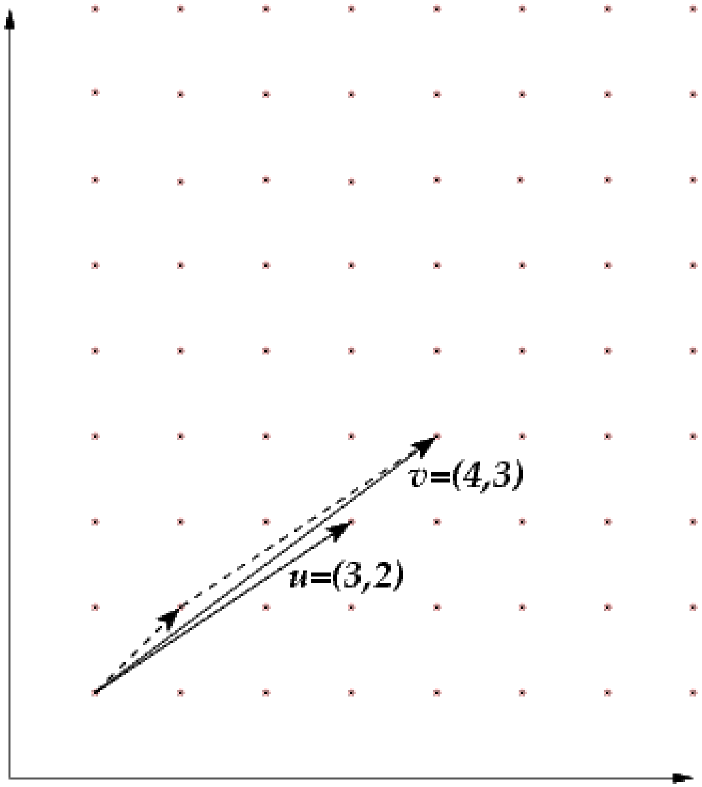
- Vecteur de Bézout d'un vecteur entier *u* irréductible

  $v \;\; t.q. \;\; u \wedge v = \pm 1$

- Résolution d'équation diophantienne

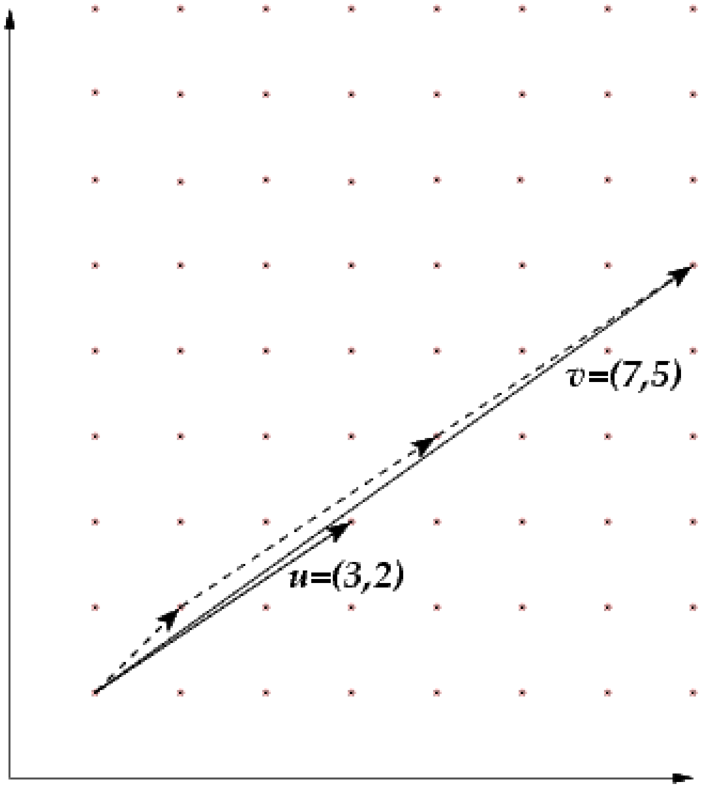
  $Trouver \;\; v \in \mathbb{Z}^2 \;\; t.q. \; -u_y v_x + u_x v_y = 1$

- Ensemble des solutions (algorithme d'Euclide étendu) $(x_{0,} y_0) + k u, \;\; k \in \mathbb{Z}$



# RAPPELS DE THÉORIE DES NOMBRES

- Vecteur de Bézout d'un vecteur entier *u* irréductible
  $v \ \ t.q. \ \ u \wedge v = \pm 1$
- Résolution d'équation diophantienne
  $Trouver \ \ v \in \mathbb{Z}^2 \ \ t.q. \ -u_y v_x + u_x v_y = 1$
- Ensemble des solutions (algorithme d'Euclide étendu) $(x_0, y_0) + k u, \ \ k \in \mathbb{Z}$



# RAPPELS DE THÉORIE DES NOMBRES (2)

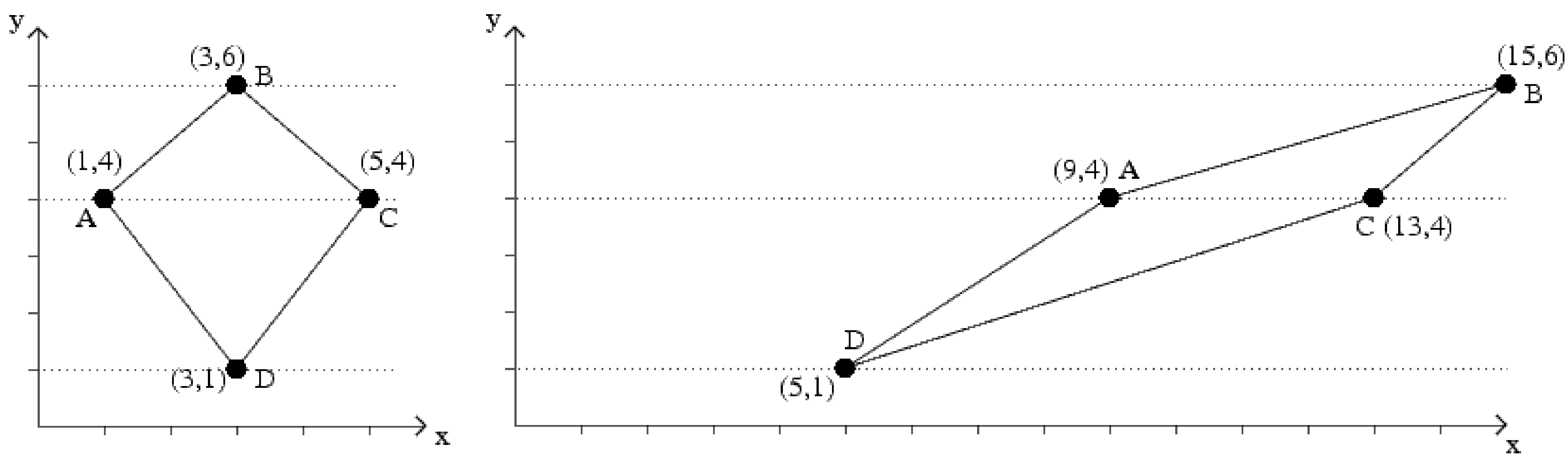
- Fractions continues: $x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots}}} = [a_{0,} a_{1,} a_{2,} \dots]$
- Séquences d'entiers $(p_k)_{k\geq 0}$ et $(q_k)_{k\geq 0}$

$$\begin{cases} p_0 = 0 \quad p_1 = 1 \quad p_{k+2} = p_k + a_k p_{k+1} \\ q_0 = 1 \quad q_1 = 0 \quad q_{k+2} = q_k + a_k q_{k+1} \end{cases} \qquad [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$$

$$Exemple: \frac{4}{11} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = [0,2,1,3]$$

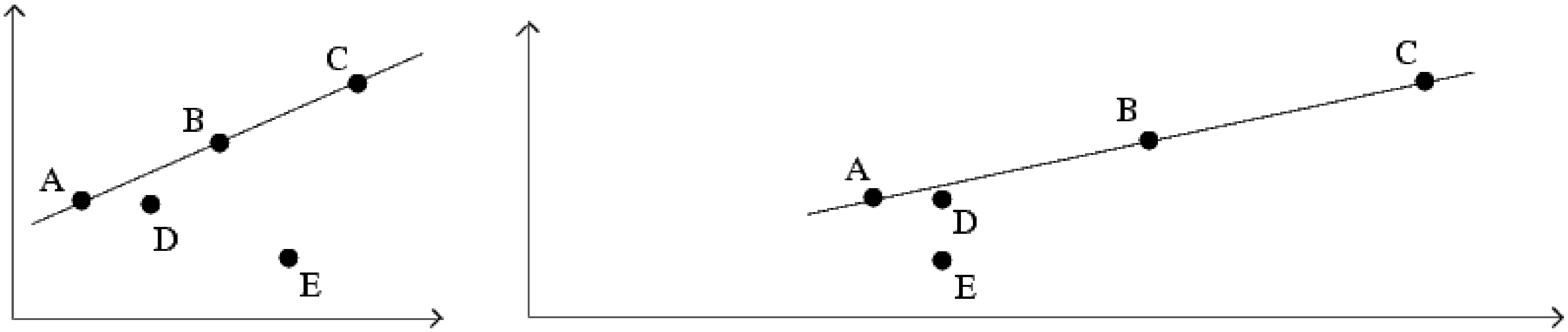
# Transvections dans $\mathbb{Z}^2$

- Transvections dans $\mathbb{Z}^2$ : $T_U(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $T_L(a)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}$
  - Engendrent le groupe spécial linéaire $SL(2,\mathbb{Z})$



# Transvections dans $\mathbb{Z}^2$

- Transvections dans $\mathbb{Z}^2$ : $T_U(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $T_L(a)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}$
  - Préservent le signe des angles et les enveloppes convexes

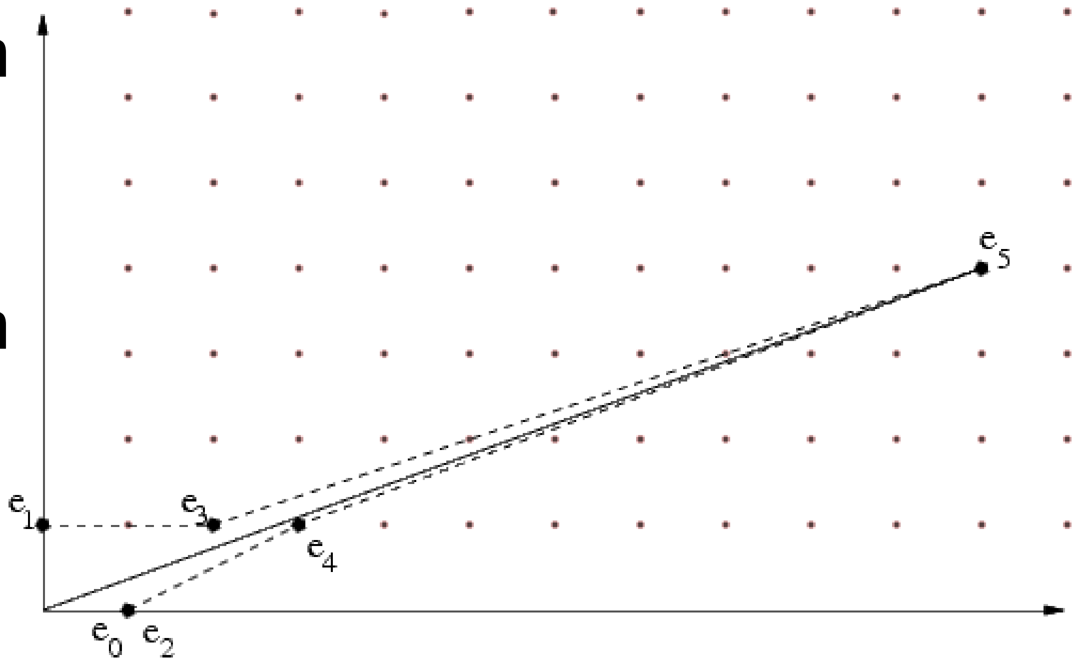


# PLAN

- Rappels de théorie des nombres
- **Historique: voiles de Klein**
- Étude du problème dans le cas général
- Algorithme de reconstruction
- Exemple et complexité de l'algorithme
- Conclusion

# HISTORIQUE: VOILES DE KLEIN

- Soit $e_k = (q_k, p_k)$
  - $(e_{2k})_{k \geq 0}$ -> Ligne polygonale de Klein inférieure
  - $(e_{2k+1})_{k \geq 0}$ -> Ligne polygonale de Klein supérieure

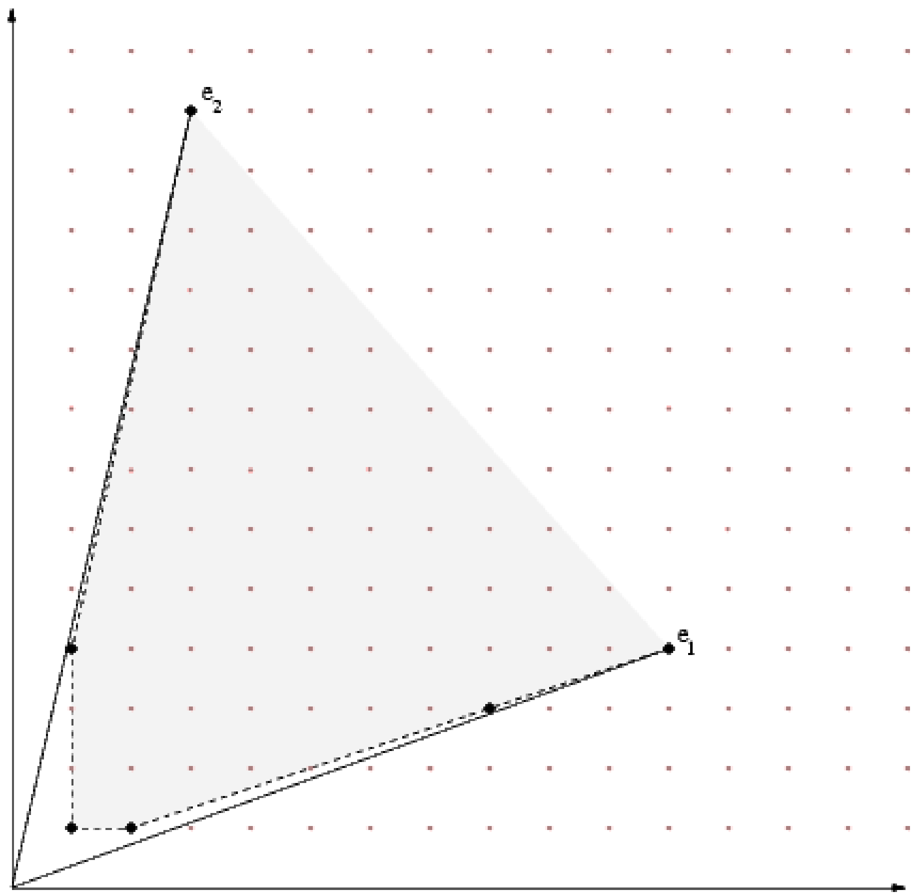



- Enveloppe convexe

  dans 2 triangles

# HISTORIQUE: VOILES DE KLEIN

- Dimensions supérieures: polyèdres de Klein (voiles de Klein)
- Polyèdres de Klein en dimension 2 équivalents aux polyèdres de Klein en dimension 1 (transvection)



# HISTORIQUE: VOILES DE KLEIN (2)

- Voiles de Klein: enveloppe convexe des points de la grille dans le triangle décrit par 2 droites d'intersection entière
  - Fractions continues [KLEIN 1907]
  - Problème d'optimisation avec heuristique [MOUSSAFIR 2000]

# ALGORITHME PAR OPTIMISATION AVEC HEURISTIQUE

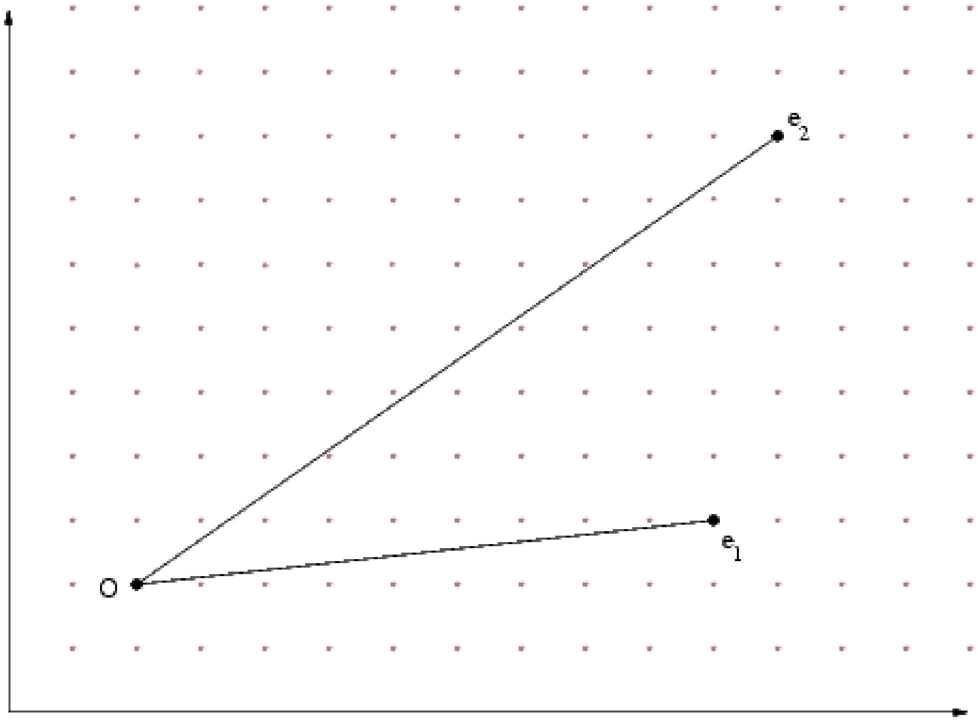
- Algorithme par optimisation avec heuristique:

  Minimisation du périmètre du triangle par transvections

$$P = \sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2} + \sqrt{e_{2x}^2 + e_{2y}^2} + \sqrt{(e_{2x} - e_{1x})^2 + (e_{2y} - e_{1y})^2}$$

  Balayage du triangle avec une droite verticale

  Reconstruction à chaque itération



# ALGORITHME PAR OPTIMISATION AVEC HEURISTIQUE

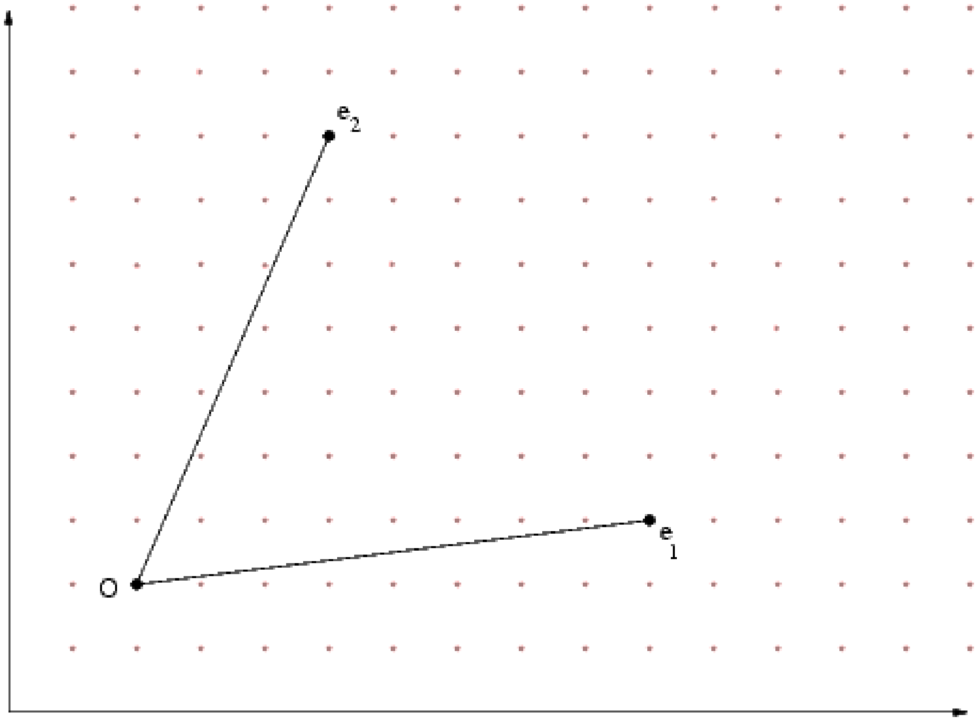
- Algorithme par optimisation avec heuristique:

  Minimisation du périmètre du triangle par transvections

$$P = \sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2} + \sqrt{e_{2x}^2 + e_{2y}^2} + \sqrt{(e_{2x} - e_{1x})^2 + (e_{2y} - e_{1y})^2}$$

  Balayage du triangle avec une droite verticale

  Reconstruction à chaque itération



# ALGORITHME PAR OPTIMISATION AVEC HEURISTIQUE

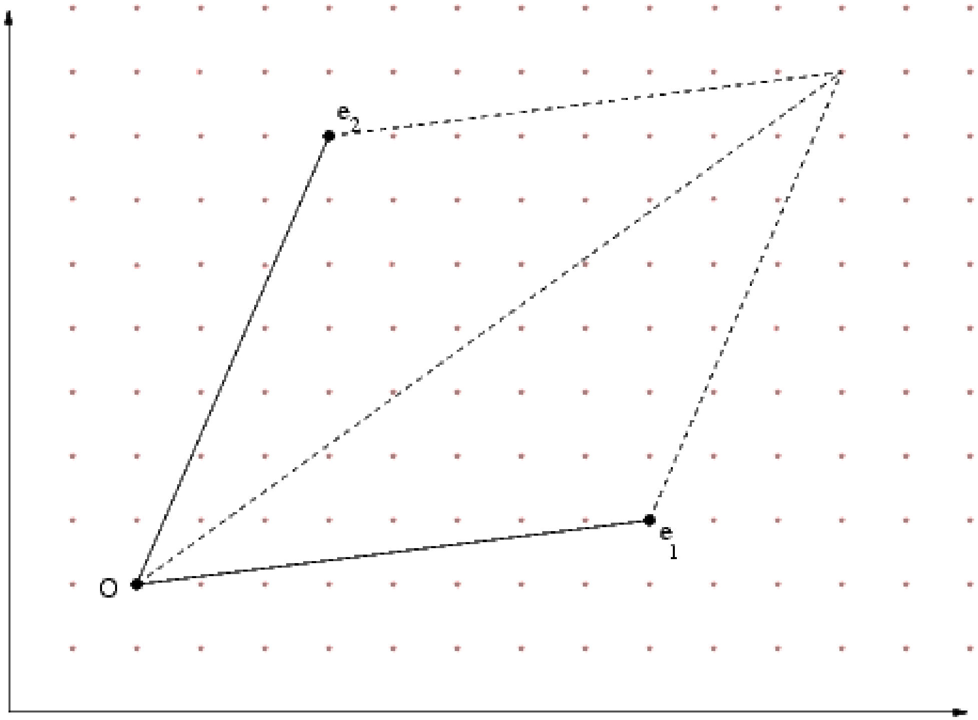
- Algorithme par optimisation avec heuristique:

  Minimisation du périmètre du triangle par transvections

$$P=\sqrt{e_{1x}^2+e_{1y}^2}+\sqrt{e_{2x}^2+e_{2y}^2}+\sqrt{(e_{2x}-e_{1x})^2+(e_{2y}-e_{1y})^2}$$

  Balayage du triangle avec une droite verticale

  Reconstruction à chaque itération



# ALGORITHME PAR OPTIMISATION AVEC HEURISTIQUE

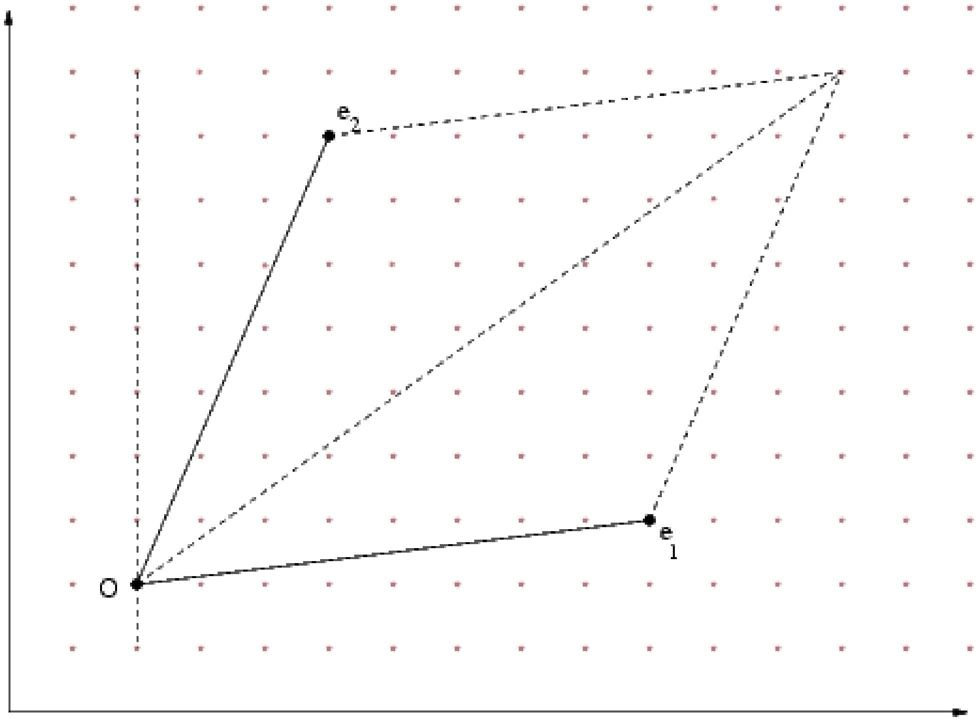
- Algorithme par optimisation avec heuristique:

  Minimisation du périmètre du triangle par transvections

$$P = \sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2} + \sqrt{e_{2x}^2 + e_{2y}^2} + \sqrt{(e_{2x} - e_{1x})^2 + (e_{2y} - e_{1y})^2}$$

  Balayage du triangle avec une droite verticale

  Reconstruction à chaque itération



# ALGORITHME PAR OPTIMISATION AVEC HEURISTIQUE

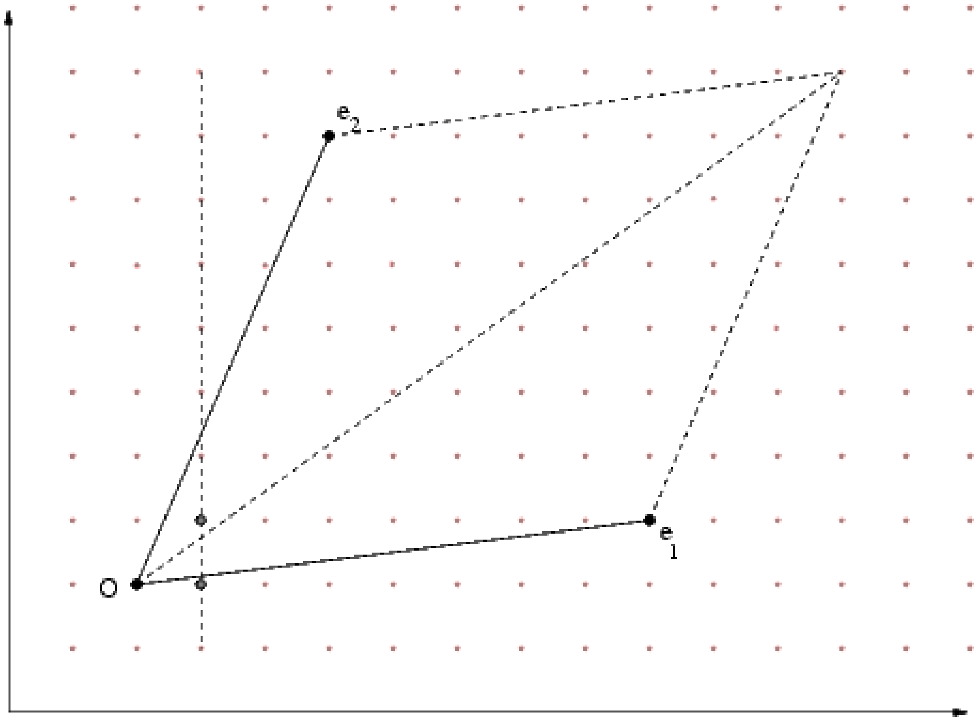
- Algorithme par optimisation avec heuristique:

  Minimisation du périmètre du triangle par transvections

$$P=\sqrt{e_{1x}^2+e_{1y}^2}+\sqrt{e_{2x}^2+e_{2y}^2}+\sqrt{(e_{2x}-e_{1x})^2+(e_{2y}-e_{1y})^2}$$

  Balayage du triangle avec une droite verticale

  Reconstruction à chaque itération



# ALGORITHME PAR OPTIMISATION AVEC HEURISTIQUE

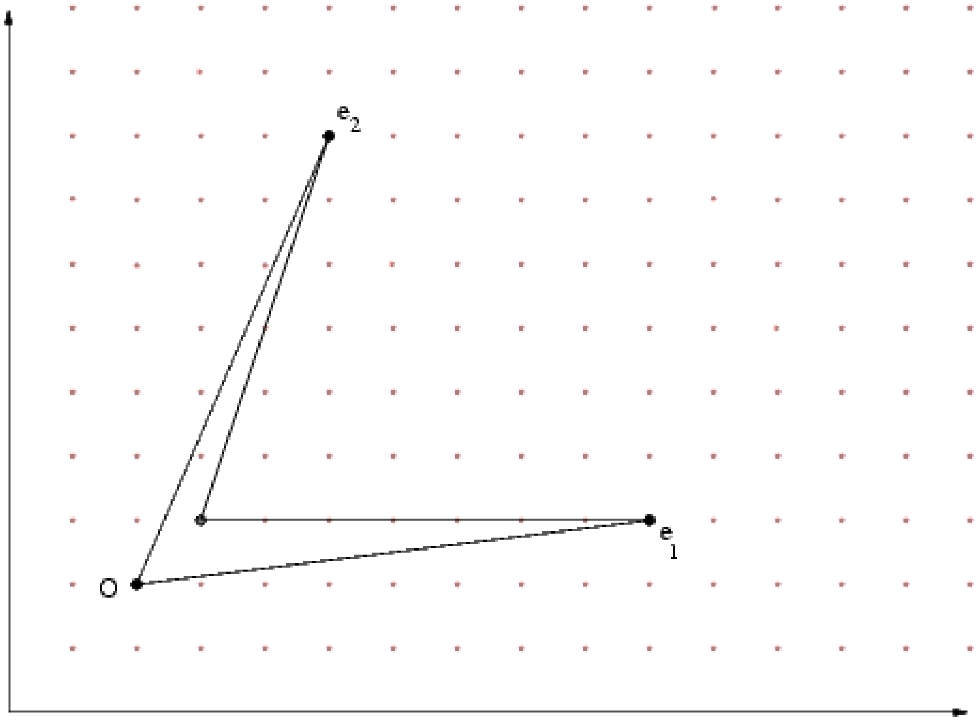
- Algorithme par optimisation avec heuristique:

  Minimisation du périmètre du triangle par transvections

$$P=\sqrt{e_{1x}^2+e_{1y}^2}+\sqrt{e_{2x}^2+e_{2y}^2}+\sqrt{(e_{2x}-e_{1x})^2+(e_{2y}-e_{1y})^2}$$

  Balayage du triangle avec une droite verticale

  Reconstruction à chaque itération



# ALGORITHME PAR OPTIMISATION AVEC HEURISTIQUE

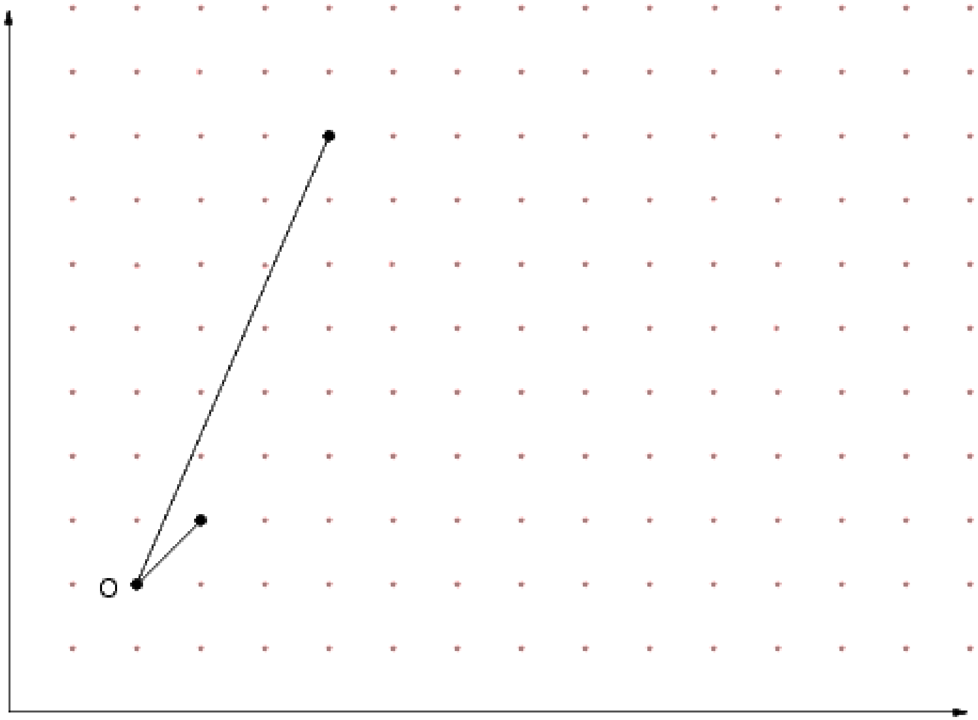
- Algorithme par optimisation avec heuristique:

  Minimisation du périmètre du triangle par transvections

$$P=\sqrt{e_{1x}^2+e_{1y}^2}+\sqrt{e_{2x}^2+e_{2y}^2}+\sqrt{(e_{2x}-e_{1x})^2+(e_{2y}-e_{1y})^2}$$

  Balayage du triangle avec une droite verticale

  Reconstruction à chaque itération



# ALGORITHME PAR OPTIMISATION AVEC HEURISTIQUE

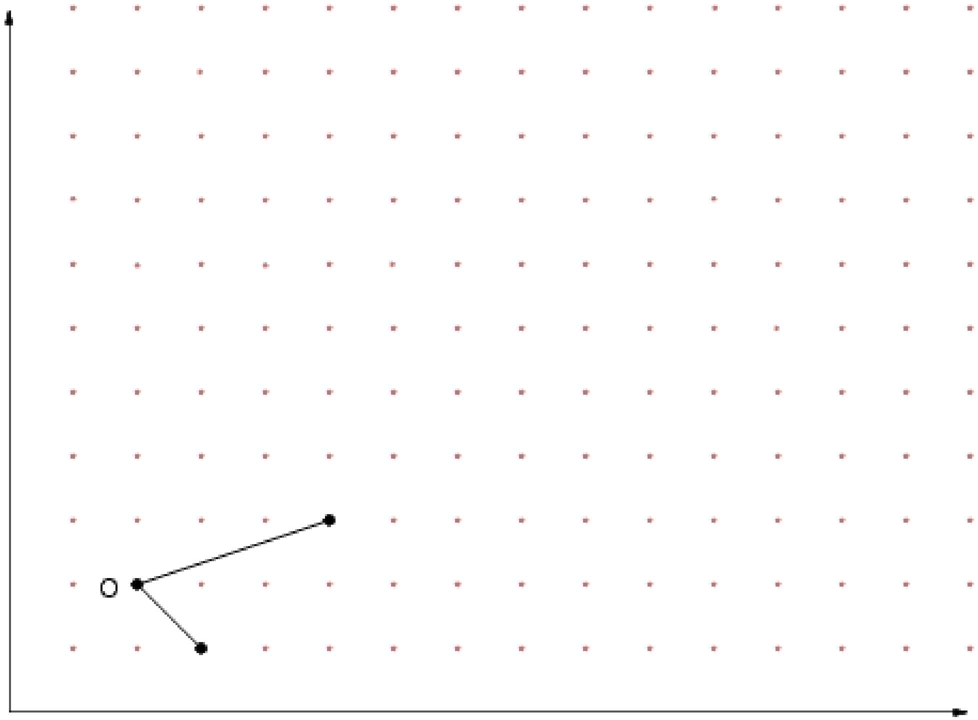
- Algorithme par optimisation avec heuristique:

  Minimisation du périmètre du triangle par transvections

$$P=\sqrt{e_{1x}^2+e_{1y}^2}+\sqrt{e_{2x}^2+e_{2y}^2}+\sqrt{(e_{2x}-e_{1x})^2+(e_{2y}-e_{1y})^2}$$

  Balayage du triangle avec une droite verticale

  Reconstruction à chaque itération



# ALGORITHME PAR OPTIMISATION AVEC HEURISTIQUE

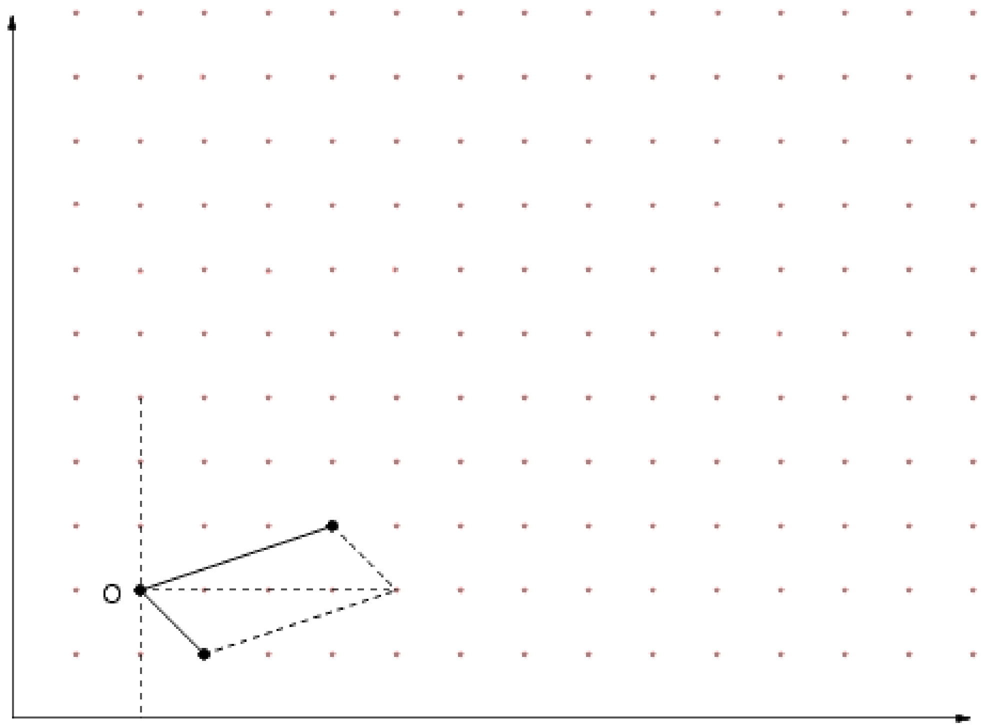
- Algorithme par optimisation avec heuristique:

  Minimisation du périmètre du triangle par transvections

$$P=\sqrt{e_{1x}^2+e_{1y}^2}+\sqrt{e_{2x}^2+e_{2y}^2}+\sqrt{(e_{2x}-e_{1x})^2+(e_{2y}-e_{1y})^2}$$

  Balayage du triangle avec une droite verticale

  Reconstruction à chaque itération



# ALGORITHME PAR OPTIMISATION AVEC HEURISTIQUE

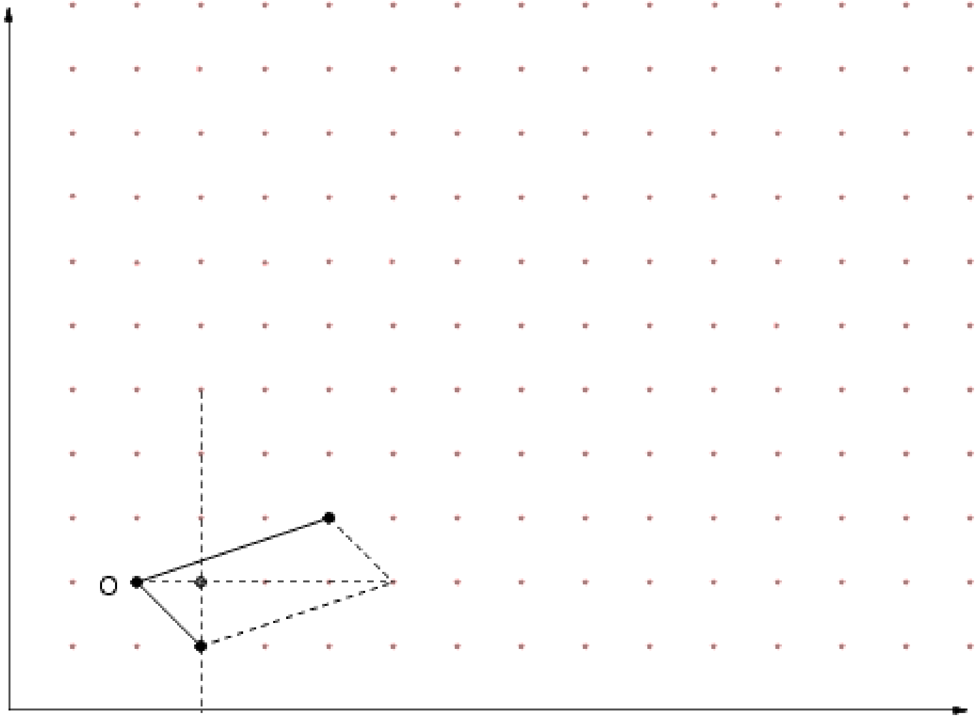
- Algorithme par optimisation avec heuristique:

  Minimisation du périmètre du triangle par transvections

$$P=\sqrt{e_{1x}^2+e_{1y}^2}+\sqrt{e_{2x}^2+e_{2y}^2}+\sqrt{(e_{2x}-e_{1x})^2+(e_{2y}-e_{1y})^2}$$

  Balayage du triangle avec une droite verticale

  Reconstruction à chaque itération



# ALGORITHME PAR OPTIMISATION AVEC HEURISTIQUE

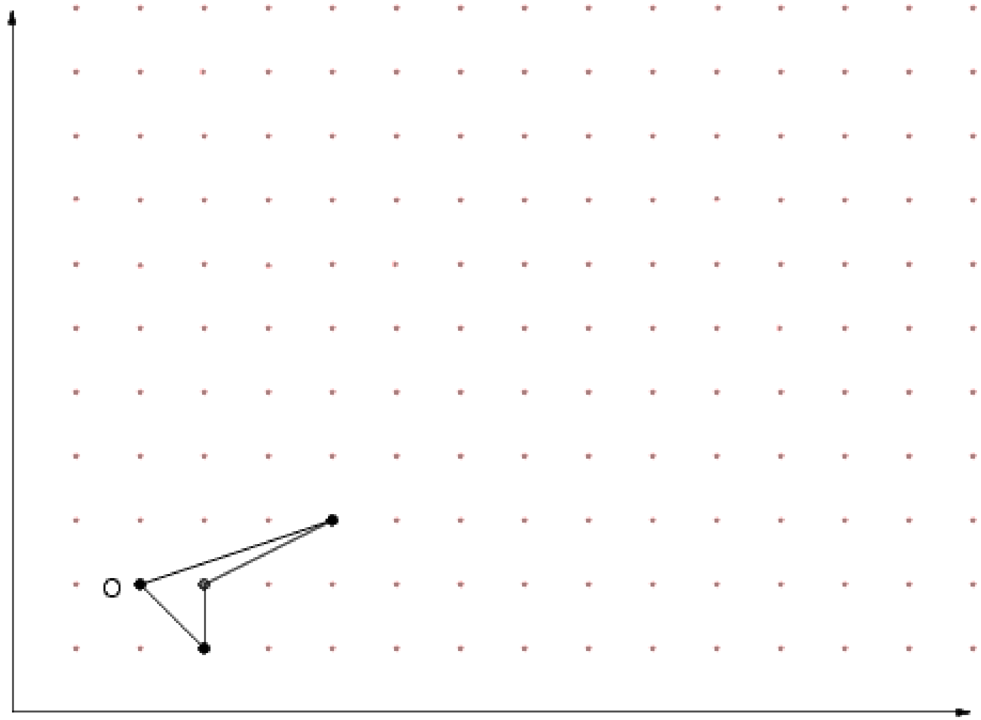
- Algorithme par optimisation avec heuristique:

  Minimisation du périmètre du triangle par transvections

$$P=\sqrt{e_{1x}^2+e_{1y}^2}+\sqrt{e_{2x}^2+e_{2y}^2}+\sqrt{(e_{2x}-e_{1x})^2+(e_{2y}-e_{1y})^2}$$

  Balayage du triangle avec une droite verticale

  Reconstruction à chaque itération

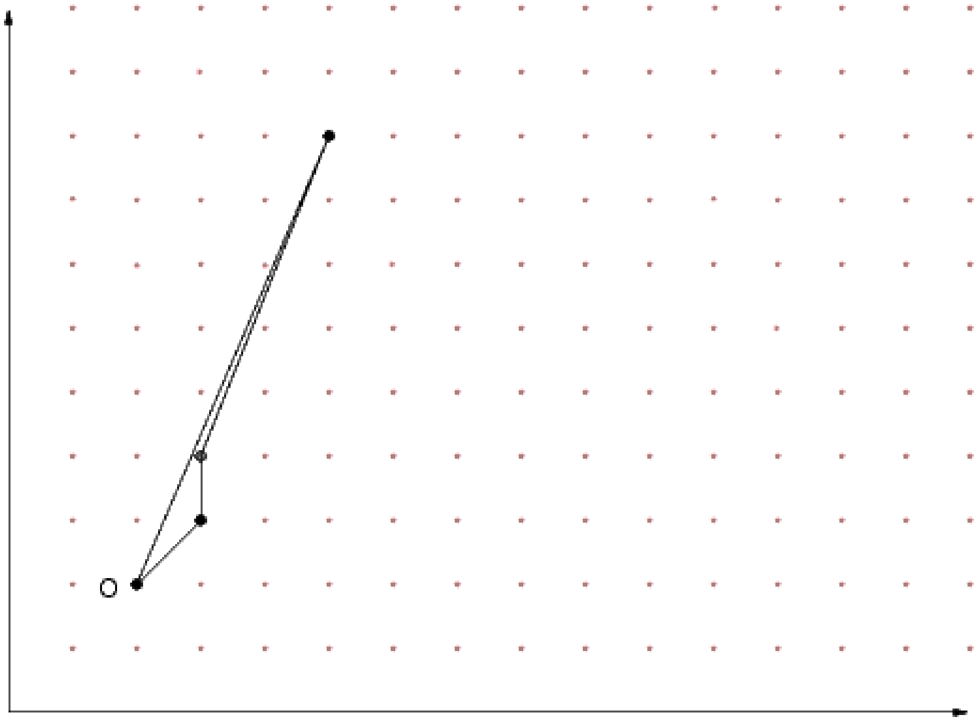


# ALGORITHME PAR OPTIMISATION AVEC HEURISTIQUE

- Algorithme par optimisation avec heuristique:

Minimisation du périmètre du triangle par transvections

$$P=\sqrt{e_{1x}^2+e_{1y}^2}+\sqrt{e_{2x}^2+e_{2y}^2}+\sqrt{(e_{2x}-e_{1x})^2+(e_{2y}-e_{1y})^2}$$



Balayage du triangle avec une droite verticale

Reconstruction à chaque itération

# ALGORITHME PAR OPTIMISATION AVEC HEURISTIQUE

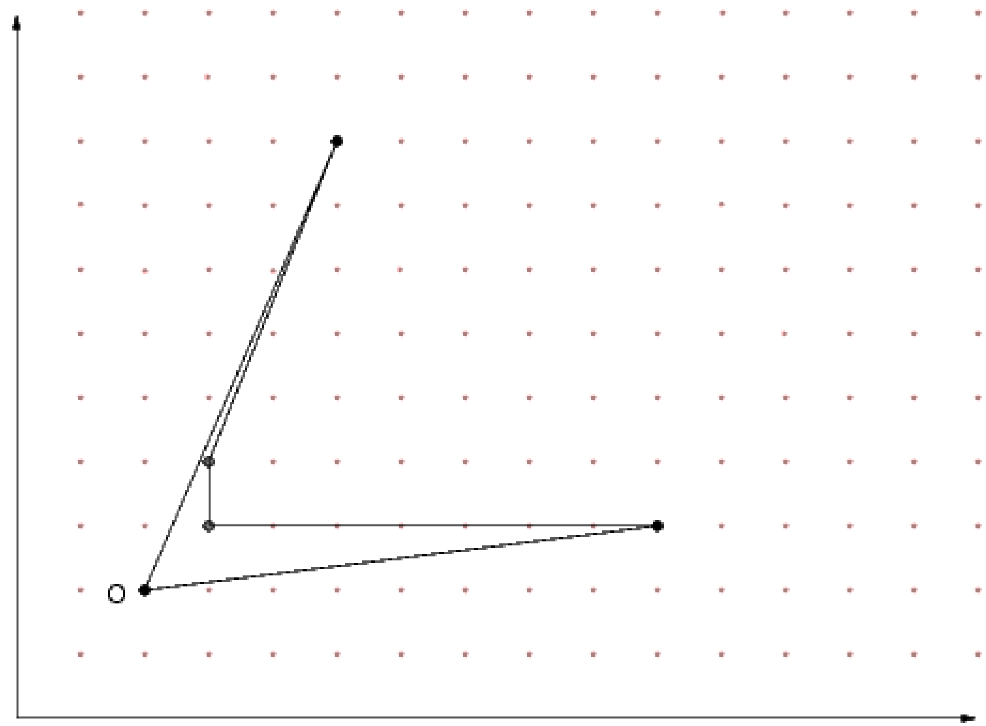
- Algorithme par optimisation avec heuristique:

  Minimisation du périmètre du triangle par transvections

$$P=\sqrt{e_{1x}^2+e_{1y}^2}+\sqrt{e_{2x}^2+e_{2y}^2}+\sqrt{(e_{2x}-e_{1x})^2+(e_{2y}-e_{1y})^2}$$

  Balayage du triangle avec une droite verticale

  Reconstruction à chaque itération



# ALGORITHME PAR OPTIMISATION AVEC HEURISTIQUE

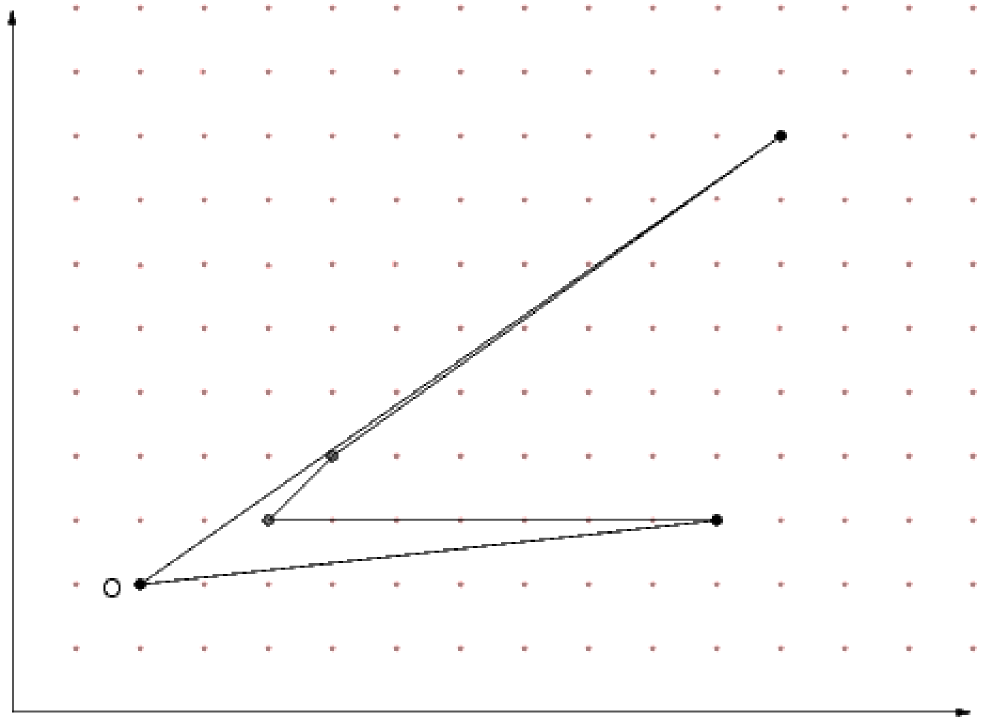
- Algorithme par optimisation avec heuristique:

  Minimisation du périmètre du triangle par transvections

$$P=\sqrt{e_{1x}^2+e_{1y}^2}+\sqrt{e_{2x}^2+e_{2y}^2}+\sqrt{(e_{2x}-e_{1x})^2+(e_{2y}-e_{1y})^2}$$

  Balayage du triangle avec une droite verticale

  Reconstruction à chaque itération



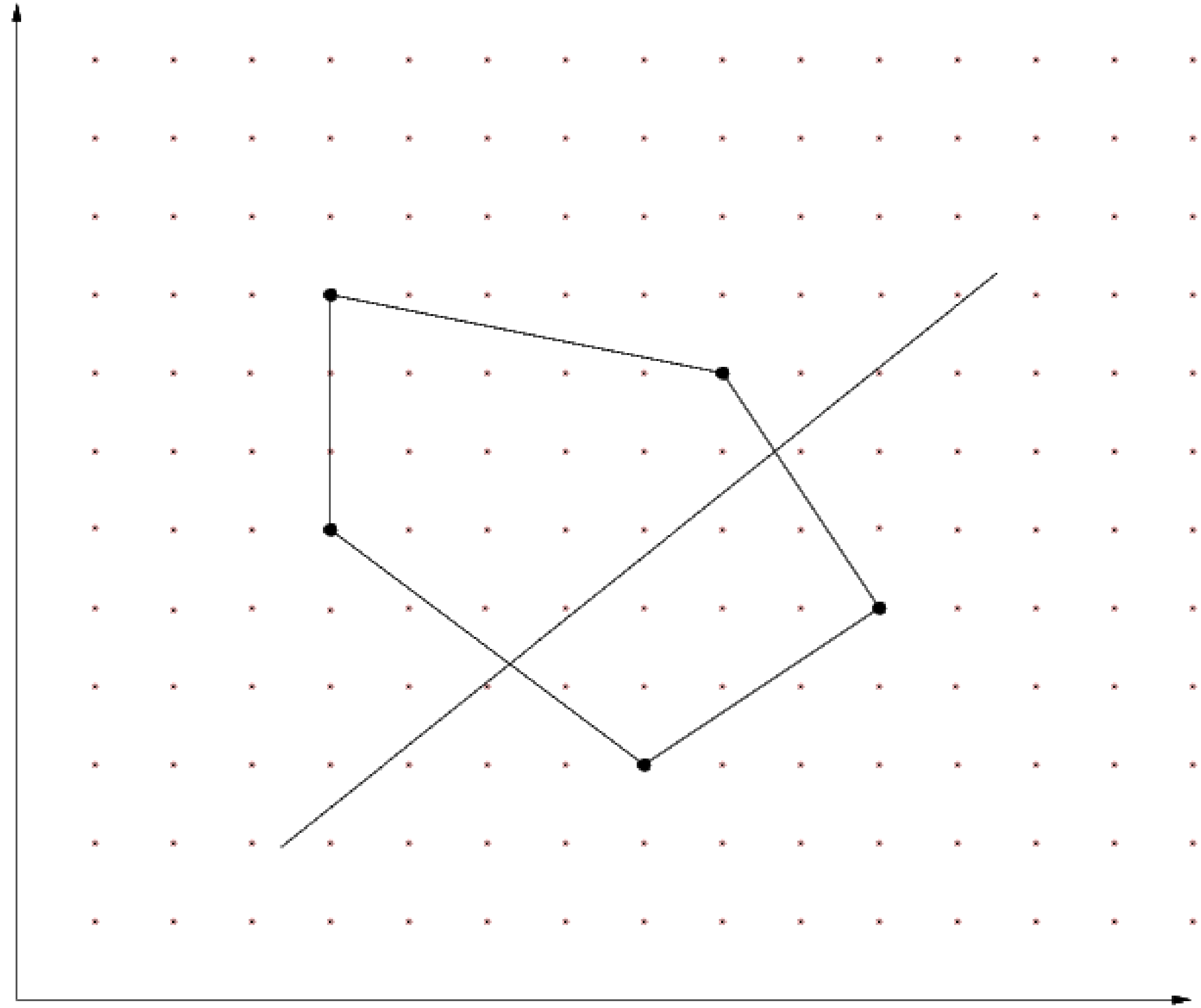
# UN PROBLÈME PLUS GÉNÉRAL

- Enveloppe convexe dans un triangle décrit par 2 segments d'extrémités entières mais d'intersection quelconque
  - Algorithme de Klein (fractions continues) inadaptable
  - Algorithme par optimisation avec heuristique de complexité mal déterminée

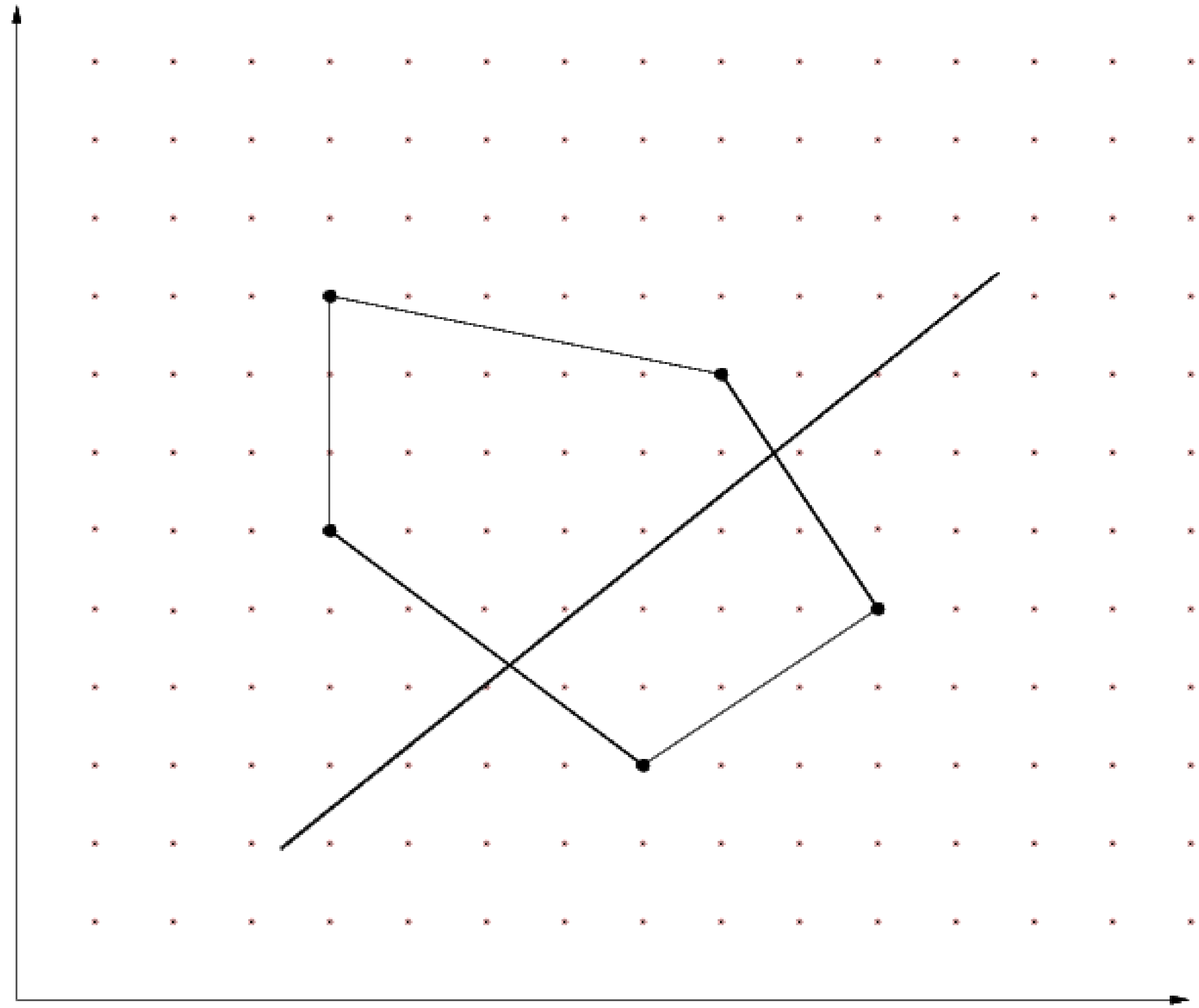
# PLAN

- Rappels de théorie des nombres
- Historique: voiles de Klein
- **Étude du problème dans le cas général**
- Algorithme de reconstruction
- Exemple et complexité de l'algorithme
- Conclusion

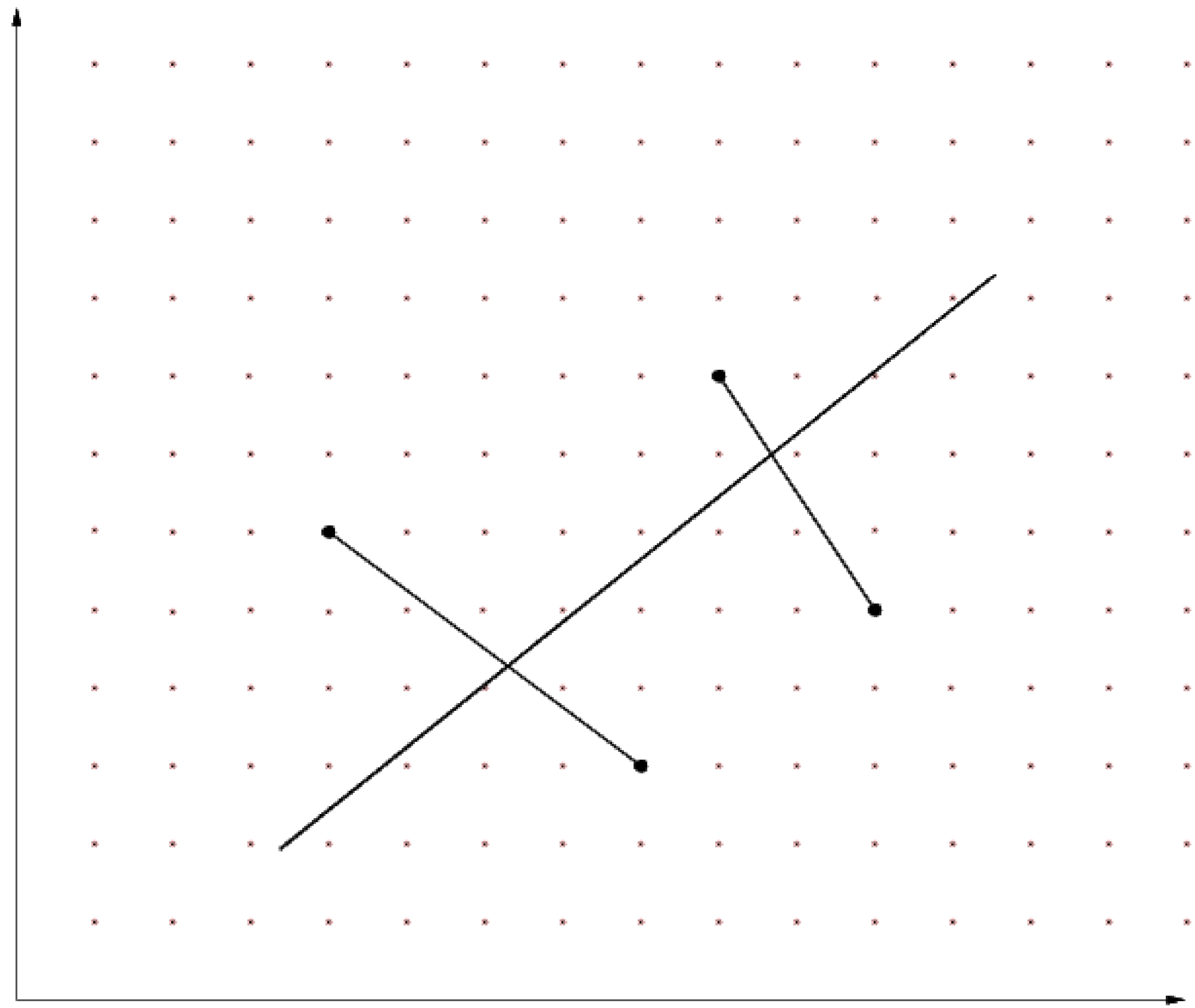
# ÉTUDE DU PROBLÈME



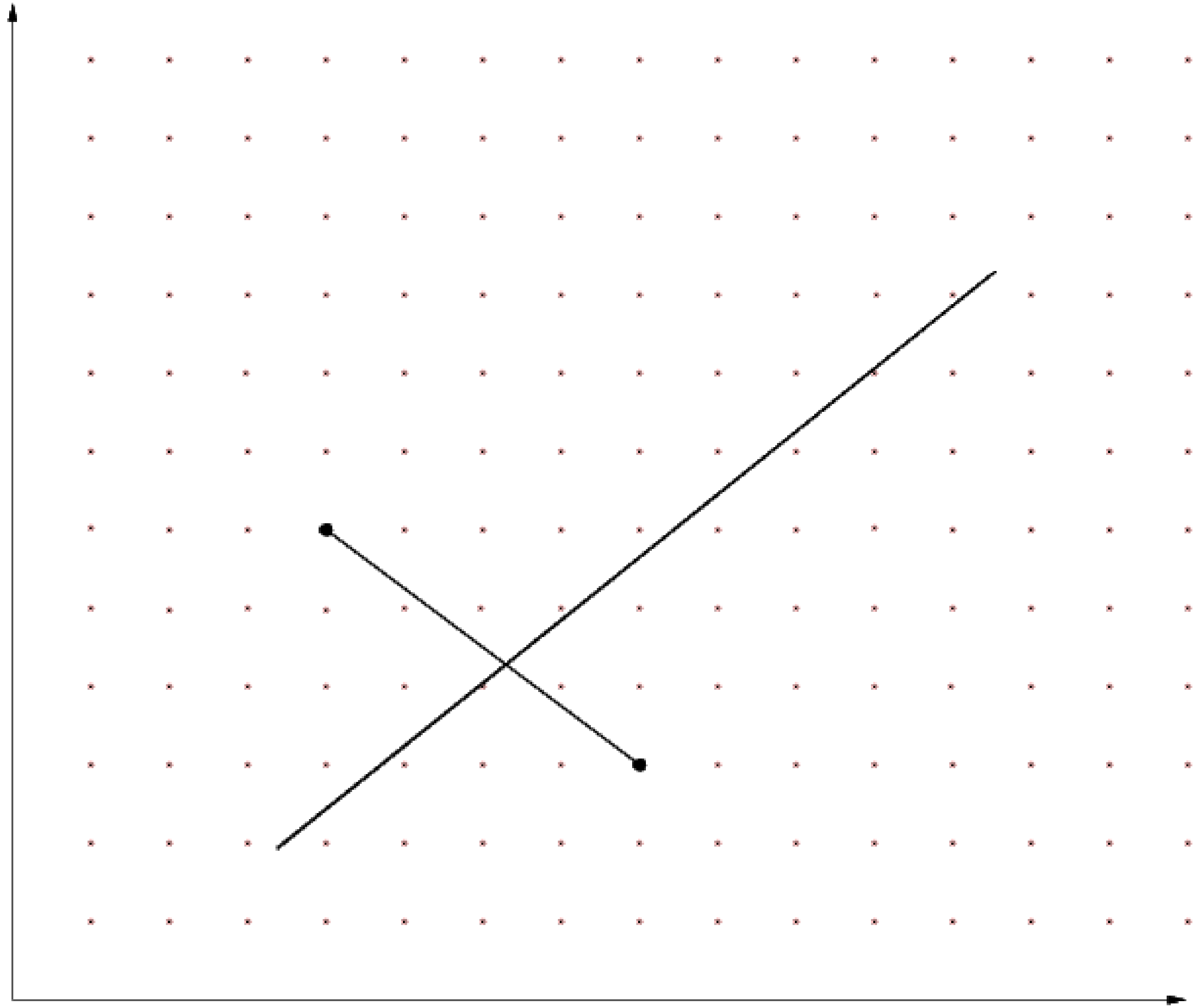
# ÉTUDE DU PROBLÈME



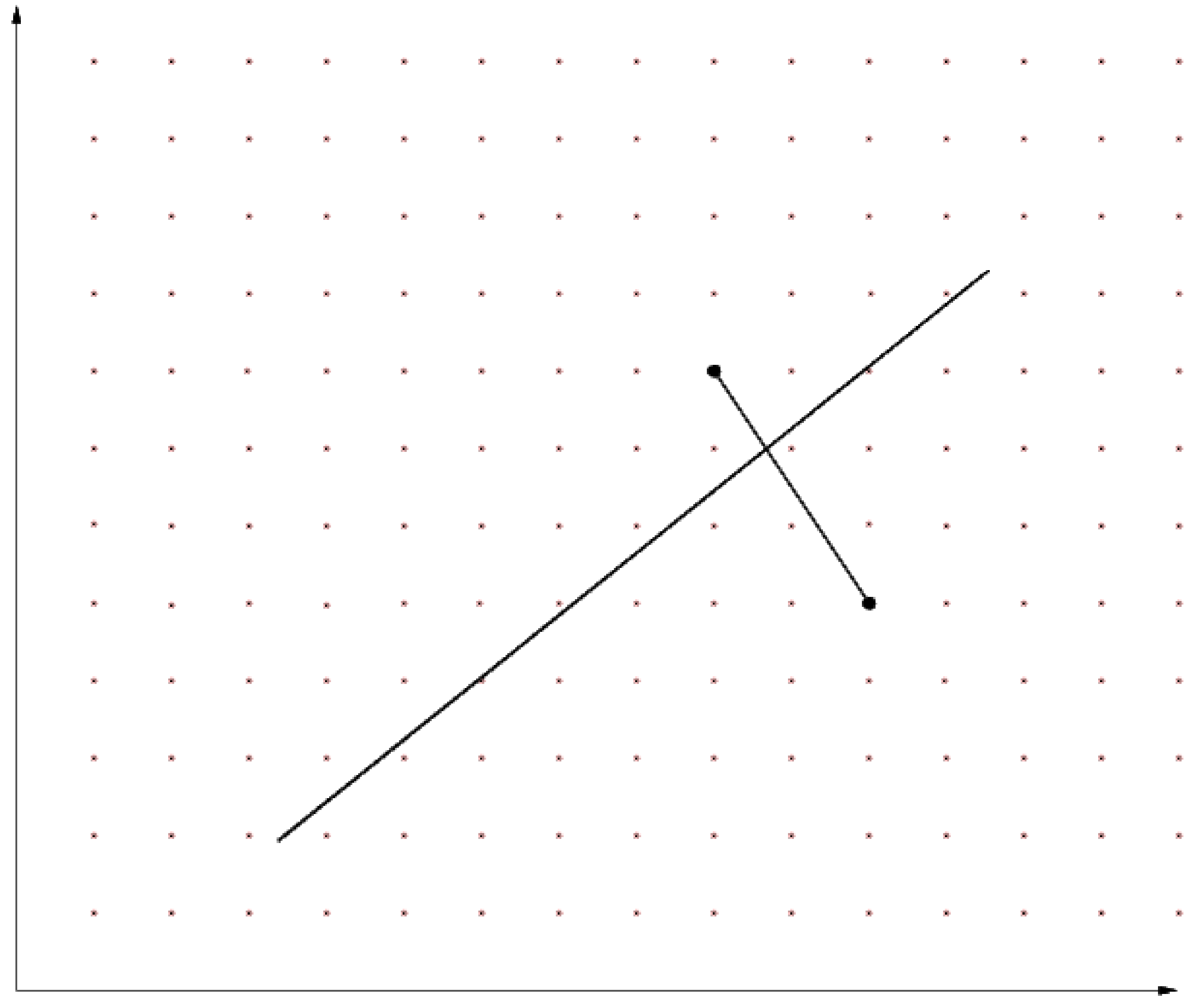
# ÉTUDE DU PROBLÈME



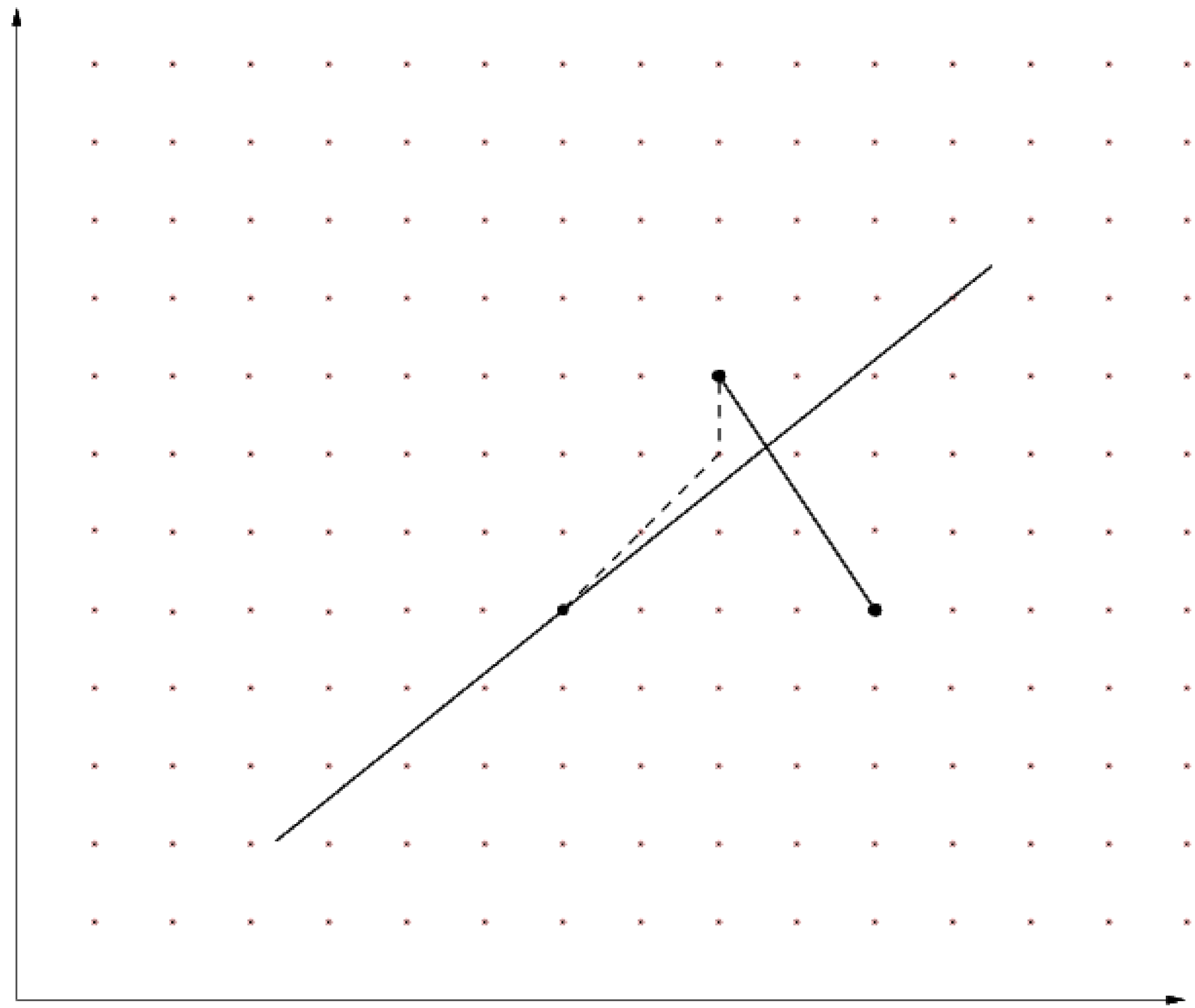
# ÉTUDE DU PROBLÈME



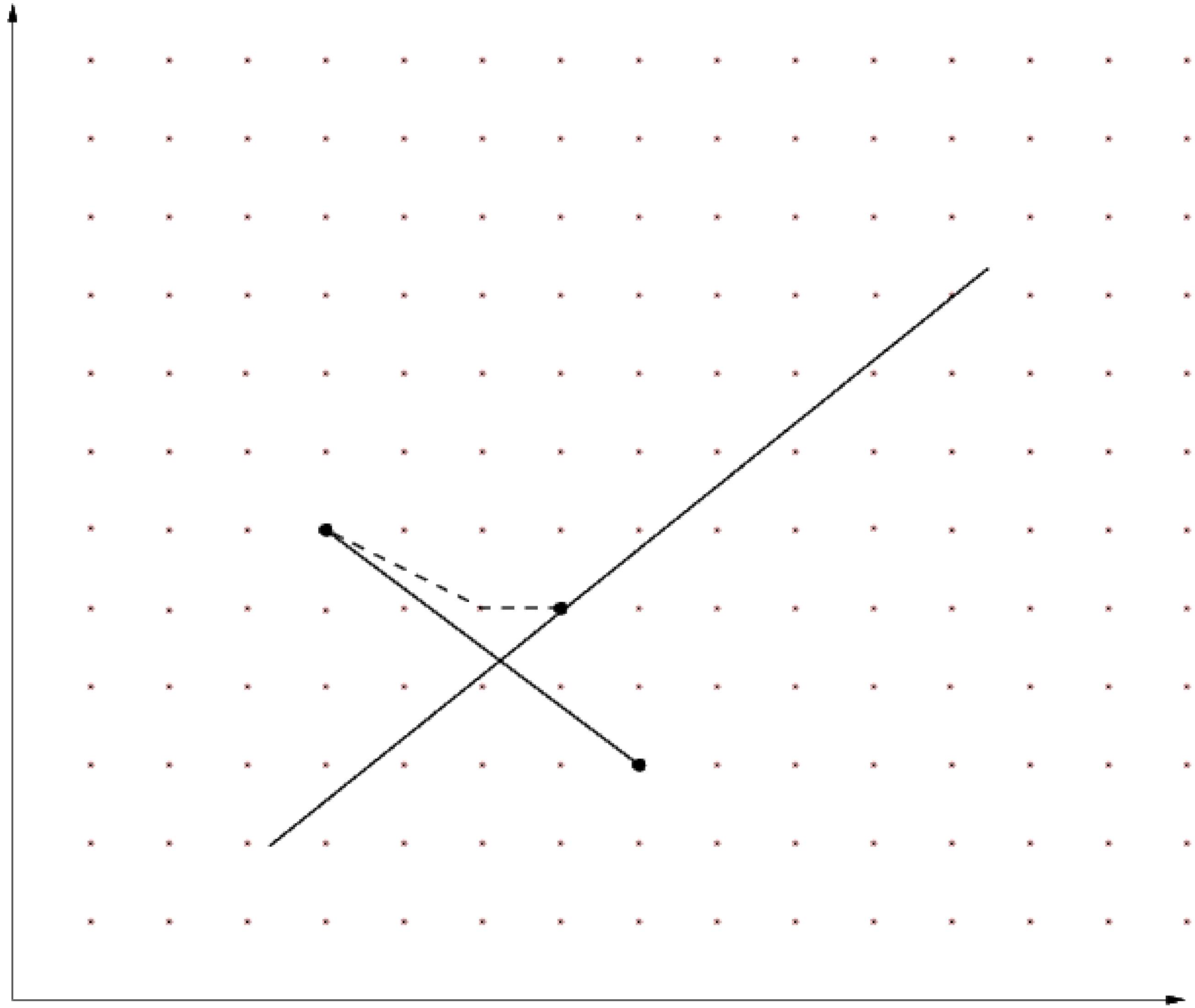
# ÉTUDE DU PROBLÈME



# ÉTUDE DU PROBLÈME



# ÉTUDE DU PROBLÈME



# ETUDE DU PROBLÈME (2)

- Soit *D* la droite d'équation $y=\frac{a_N}{a_D}x+\frac{b_N}{b_D}$ avec $a_N, a_D, b_N, b_D \in \mathbb{Z}$

Identité de Bezout généralisée =>

$$\frac{b_N}{b_D} \neq \frac{\alpha}{a_D}, \forall \alpha \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow pas\ \ de\ \ points\ \ entiers\ \ sur\ \ la\ \ droite\ \ D$$

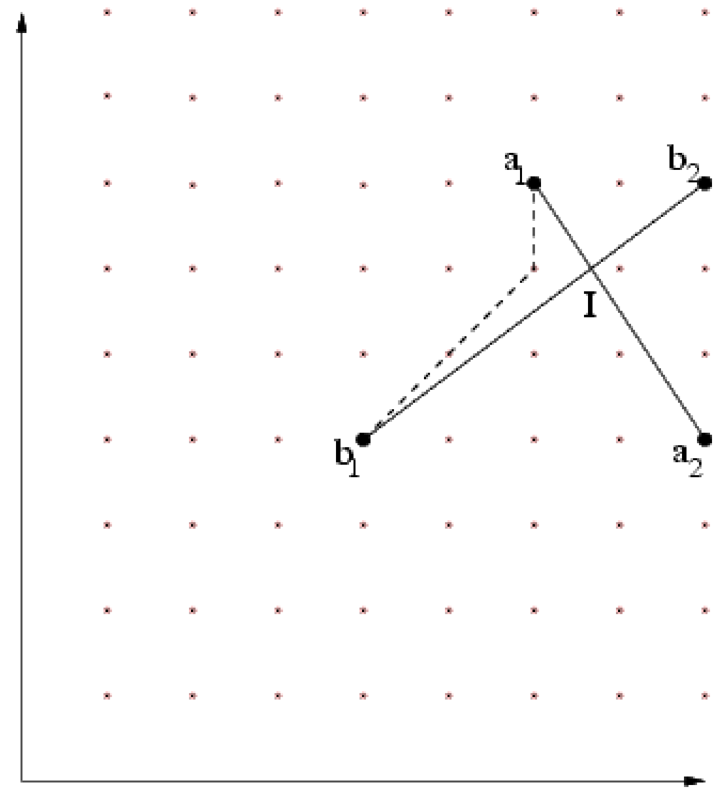
$$\underline{Exemple:}\ \ y=\frac{1}{5}x+\frac{2}{3}\ \ \Rightarrow\ \ pas\ \ de\ \ sol.\ \ entière$$

$$y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}\ \ \Rightarrow\ \ infinité\ \ de\ \ sol.\ \ entières$$

- Éventuel décalage du demi-plan de coupe

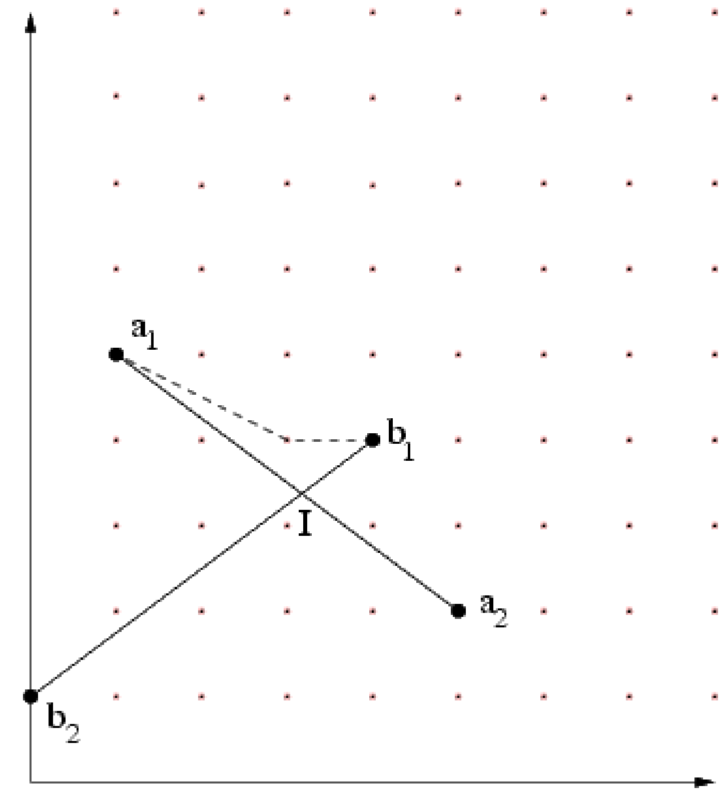
# ETUDE DU PROBLÈME (3)

- Calcul de l'enveloppe convexe dans un triangle décrit par deux segments entiers irréductibles $a_1 a_2$ et $b_1 b_2$



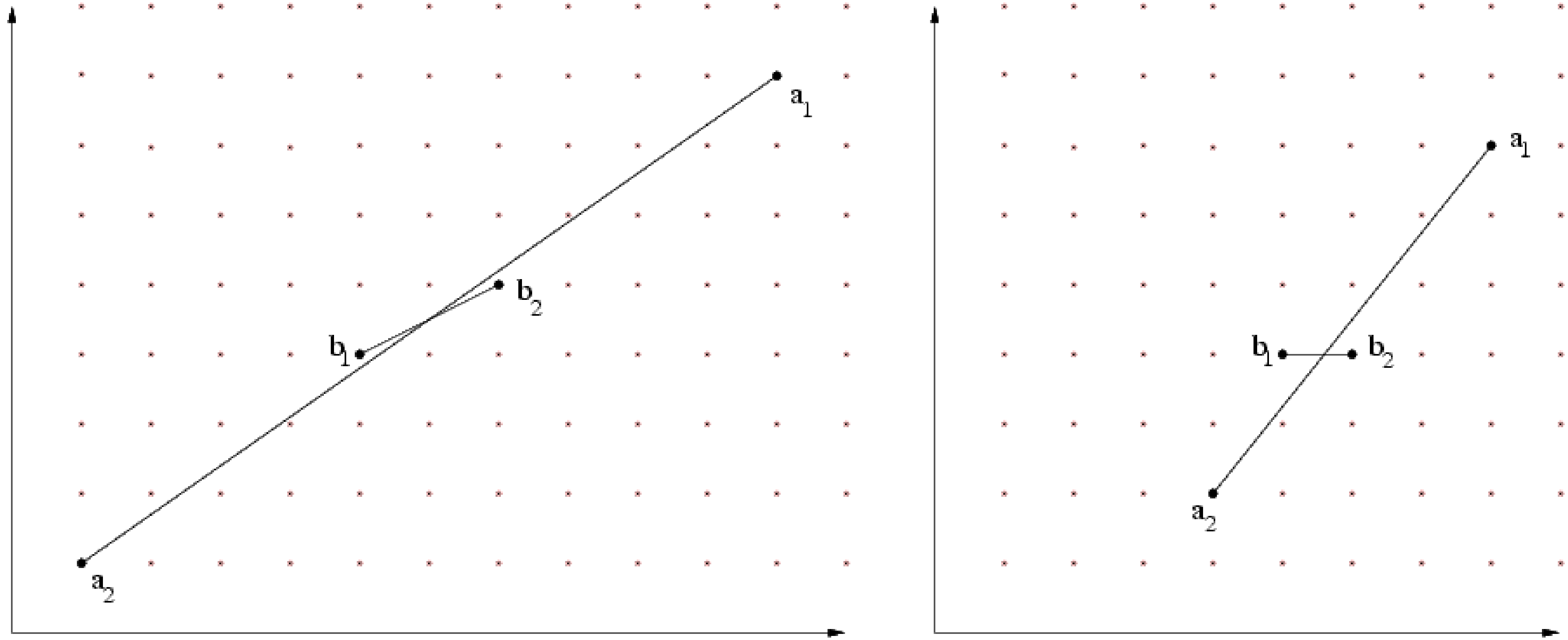
# ETUDE DU PROBLÈME (3)

- Calcul de l'enveloppe convexe dans un triangle décrit par deux segments entiers irréductibles $a_1 a_2$ et $b_1 b_2$



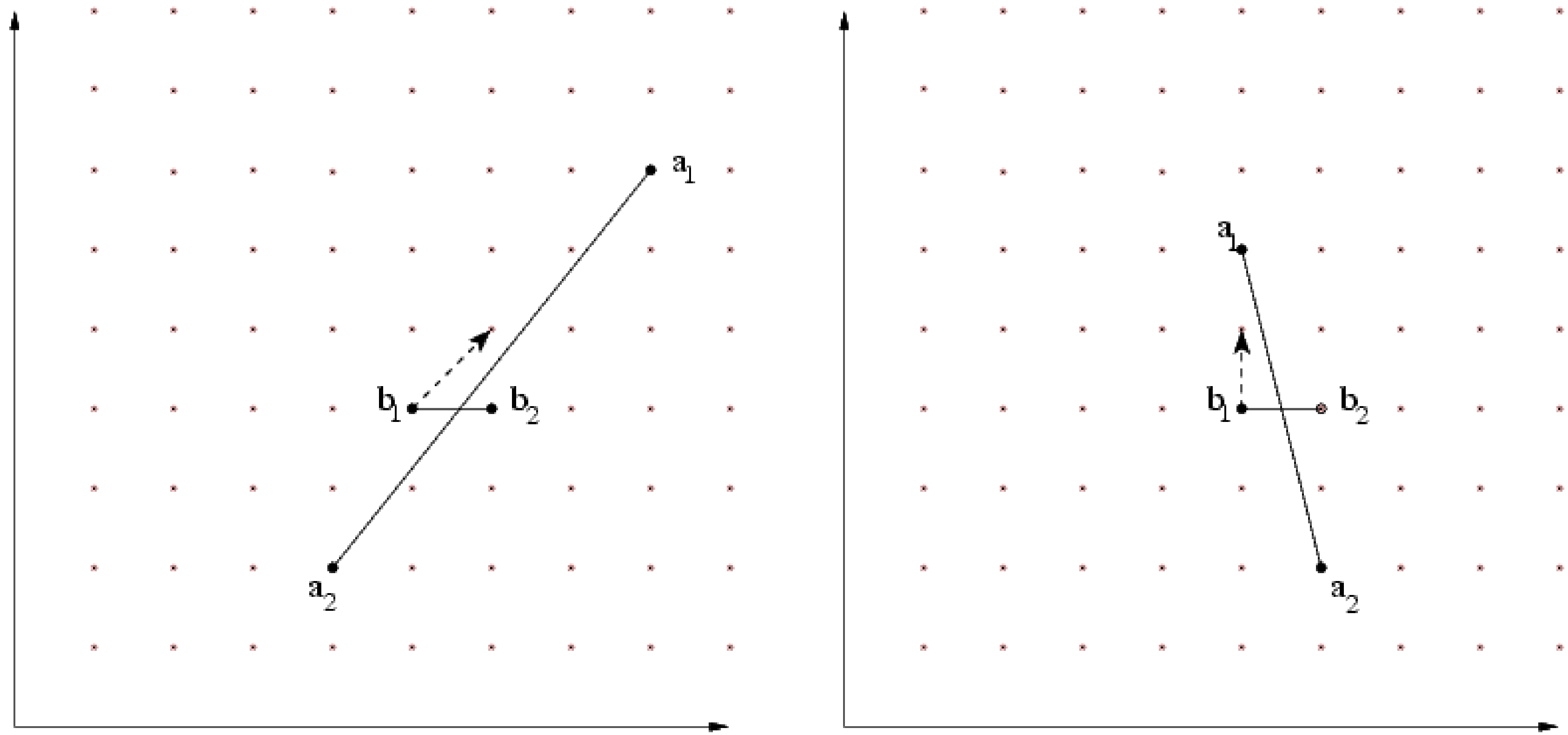
# SE RAMENER À UN CAS GÉNÉRAL

- Application de transvections pour ramener $b_1 b_2$ en (1,0)



# SE RAMENER À UN CAS GÉNÉRAL (2)

- Application de transvections telles que $a_1 a_2$ intersecte $b_1+(0,1)$ $b_2+(0,1)$

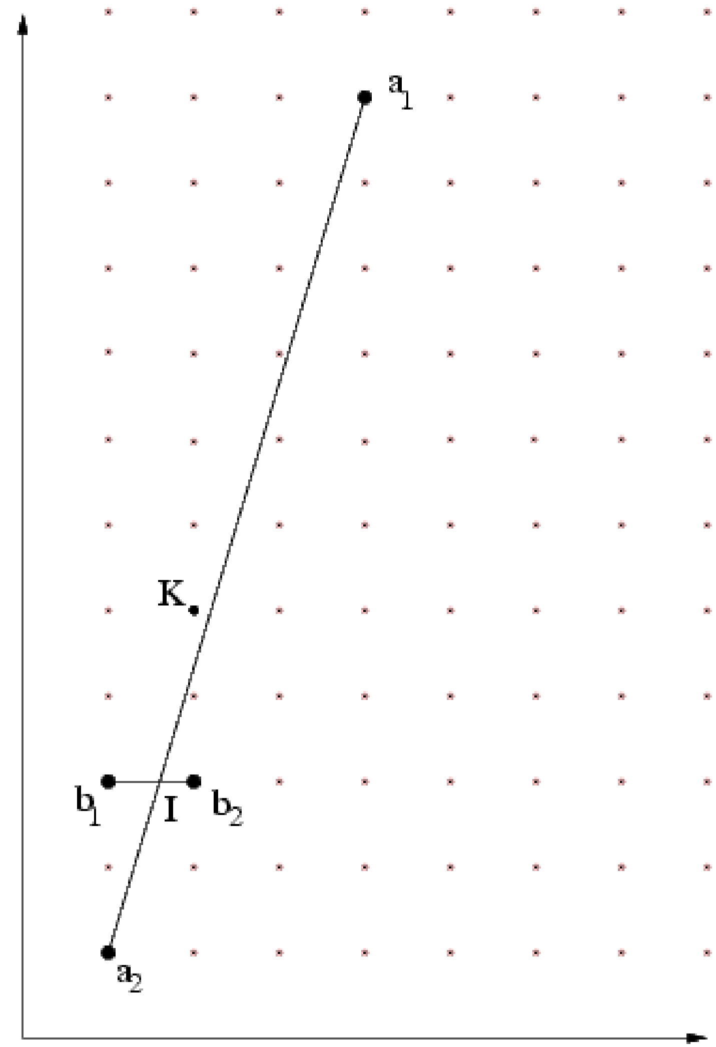


# PLAN

- Rappels de théorie des nombres
- Historique: voiles de Klein
- Étude du problème dans le cas général
- **Algorithme de reconstruction**
- Exemple et complexité de l'algorithme
- Conclusion

# ALGORITHME DE RECONSTRUCTION

- Soient $a_{1,} b_{1,} I$ les points déterminant le triangle
- Déterminer le point de la grille *K* tel que le vecteur $b_1 K$ forme un angle minimal avec le vecteur $b_1 b_2$ et $K \in (b_1 I a_1) \longrightarrow$ *K* appartient à l'enveloppe convexe

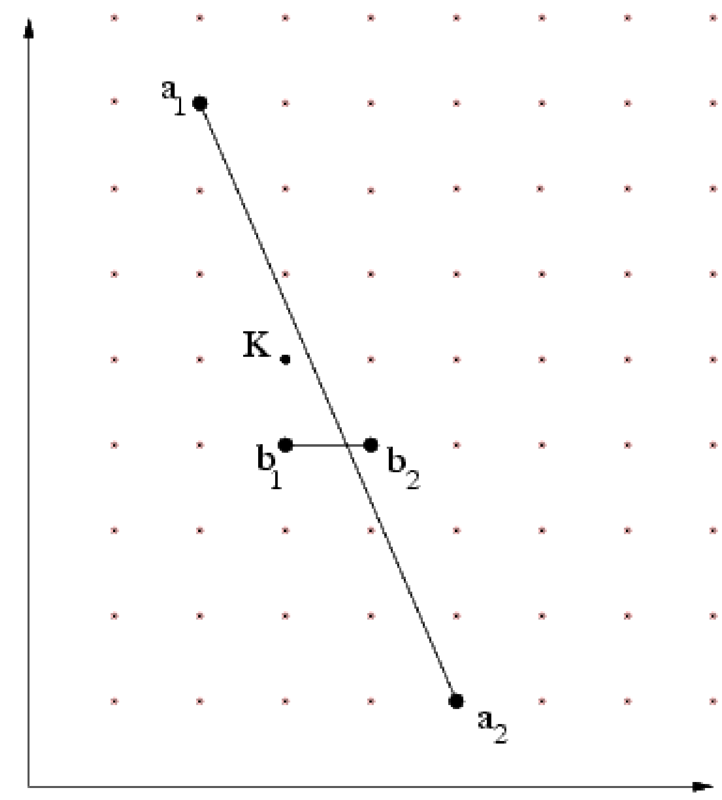


# ALGORITHME DE RECONSTRUCTION (2)

- Deux configurations possibles:
  - Le vecteur $a_2 a_1$ forme un angle strictement négatif avec la verticale
  - Le vecteur $a_2 a_1$ forme un angle strictement positif avec la verticale
- $a_2 a_1$ vertical $\longrightarrow$ intersection entière

# PREMIÈRE CONFIGURATION

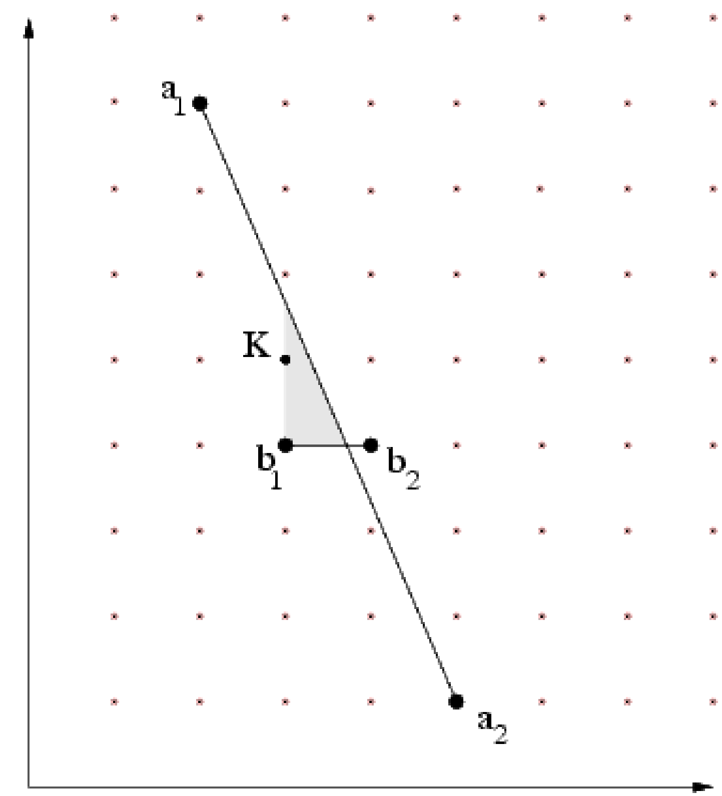
- Le vecteur $a_2 a_1$ forme un angle strictement négatif avec la verticale
- Détermination de K en dessous de $a_1 a_2$ tel que $K = b_1 + (0, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{N},\ \alpha\ maximal$



# PREMIÈRE CONFIGURATION

- Le vecteur $\overrightarrow{a_2 a_1}$ forme un angle strictement négatif avec la verticale
- Détermination de K en dessous de $a_1 a_2$ tel que

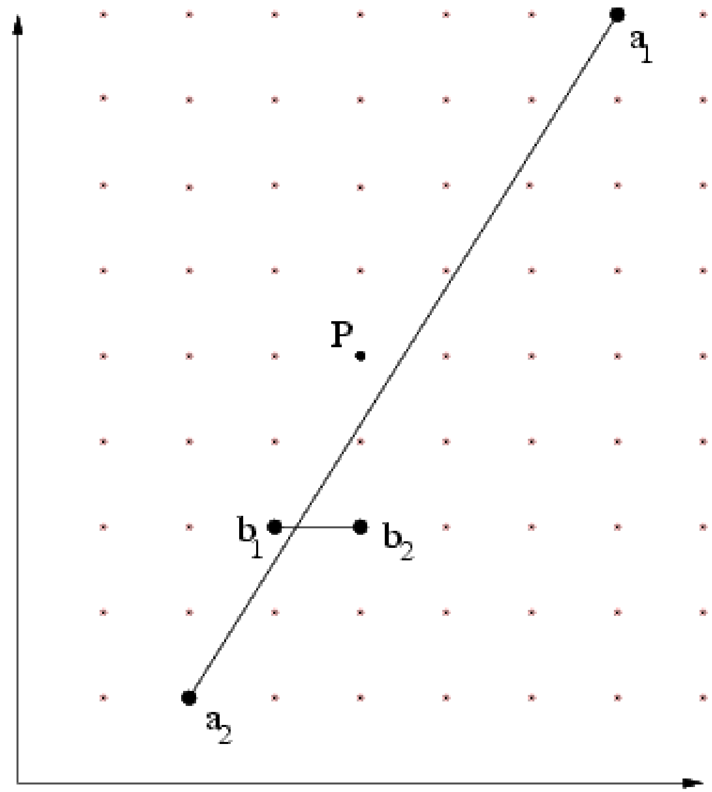
$K = b_1 + (0, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{N},\ \alpha\ maximal$



# SECONDE CONFIGURATION

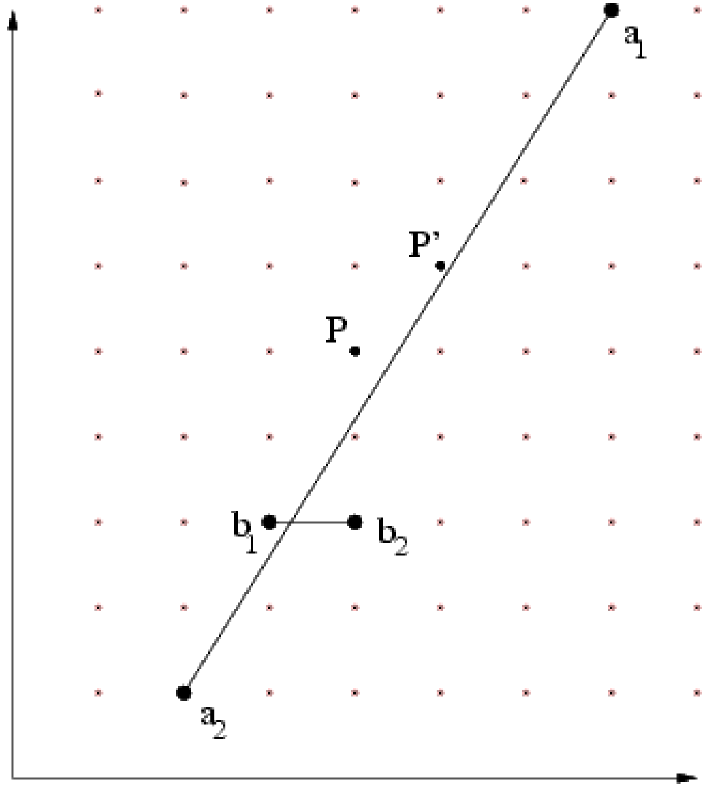
- Le vecteur $a_2 a_1$ forme un angle strictement positif avec la verticale
- Détermination de *P* au dessus de $a_1 a_2$ tel que

$$P = b_2 + (0, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{N},\ \alpha\, minimal$$



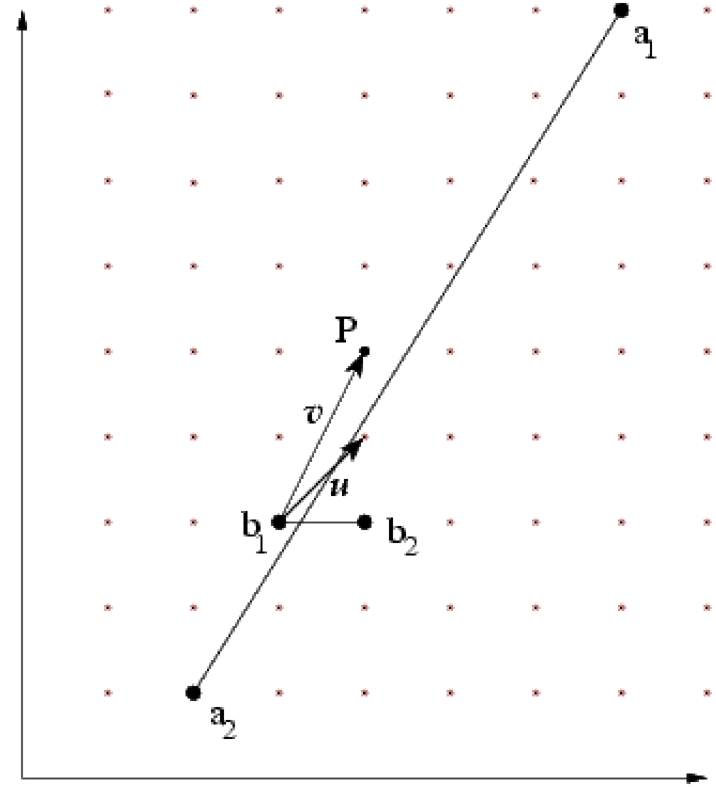
# SECONDE CONFIGURATION (2)

- $b_1 P$ approxime $a_2 a_1$
- $P$ n'est que candidat pour faire partie de l'enveloppe convexe
- Relancer la recherche entre $b_1 P$ et $a_2 a_1$ (algorithme récursif)



# SECONDE CONFIGURATION (2)

- $b_1 P$ approxime $a_2 a_1$
- *P* n'est que candidat pour faire partie de l'enveloppe convexe
- Relancer la recherche entre $b_1 P$ et $a_2 a_1$ (algorithme récursif)

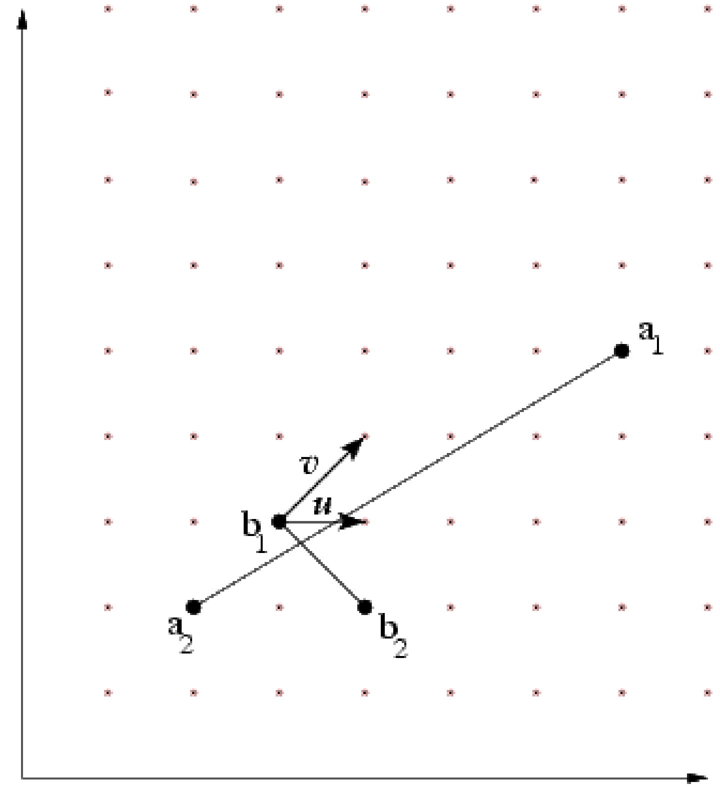



$v = b_1 P$

$u = bezout \ de \ v$

# SECONDE CONFIGURATION (2)

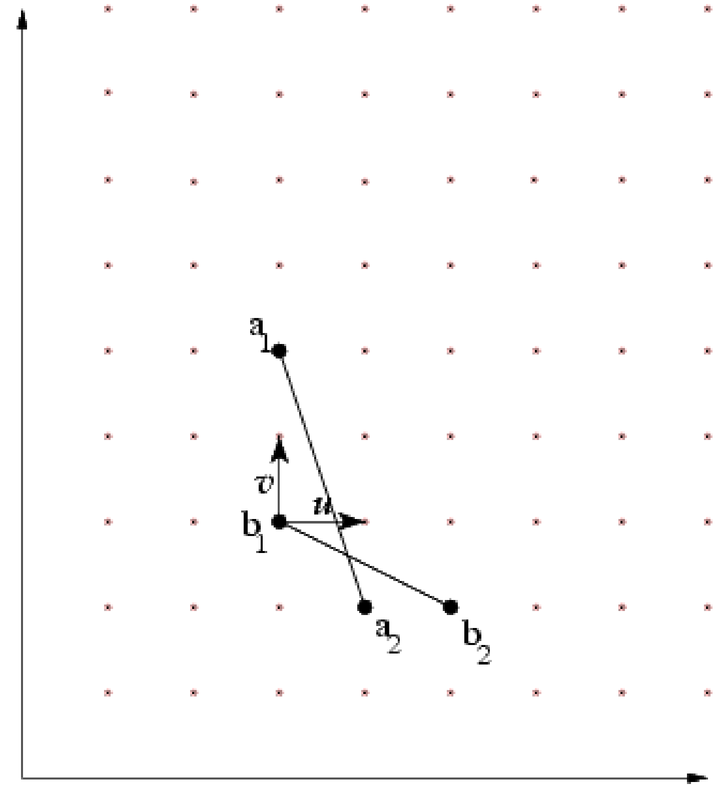
- $b_1 P$ approxime $a_2 a_1$
- *P* n'est que candidat pour faire partie de l'enveloppe convexe
- Relancer la recherche entre $b_1 P$ et $a_2 a_1$ (algorithme récursif)




*Transvection ramenant u à l'horizontale*

# SECONDE CONFIGURATION (2)

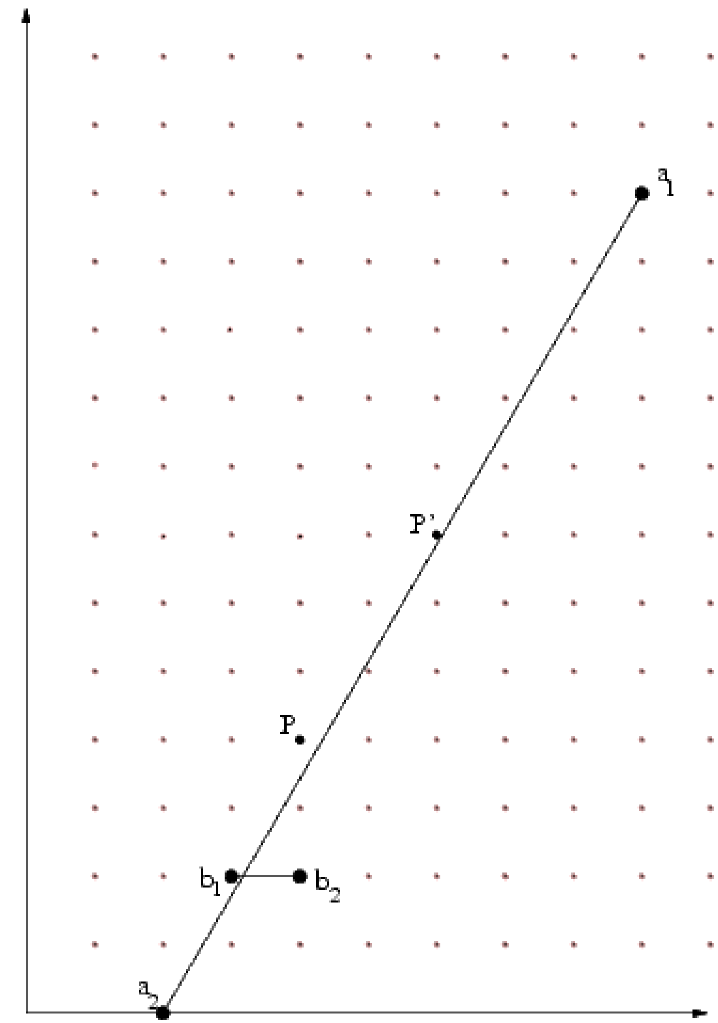
- $b_1P$ approxime $a_2a_1$
- *P* n'est que candidat pour faire partie de l'enveloppe convexe
- Relancer la recherche entre $b_1P$ et $a_2a_1$ (algorithme récursif)




*Transvection ramenant v à la verticale*

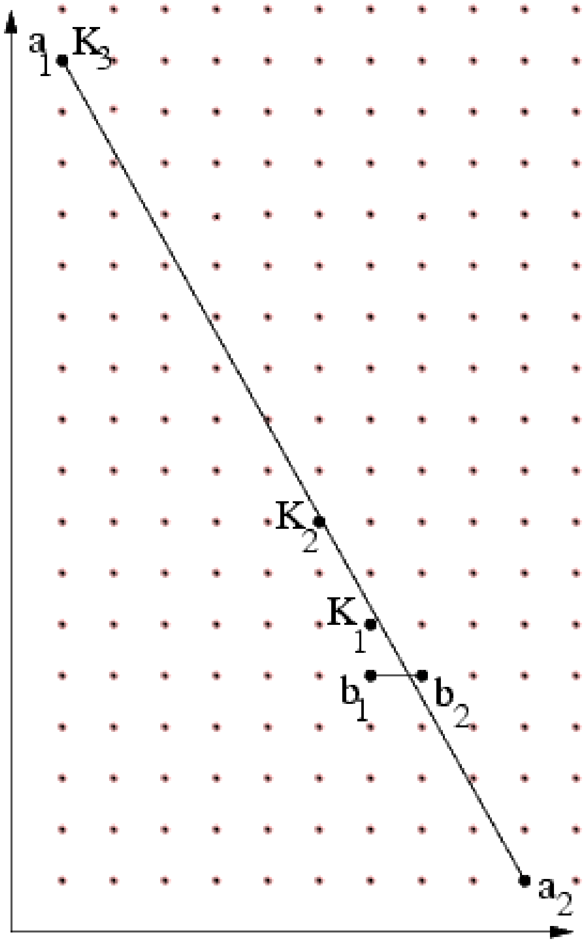
# SECONDE CONFIGURATION (3)

- Chaque *P* trouvé "meilleur" que le précédent
- En un nombre fini d'itérations → première configuration



# FIN DE L'ALGORITHME

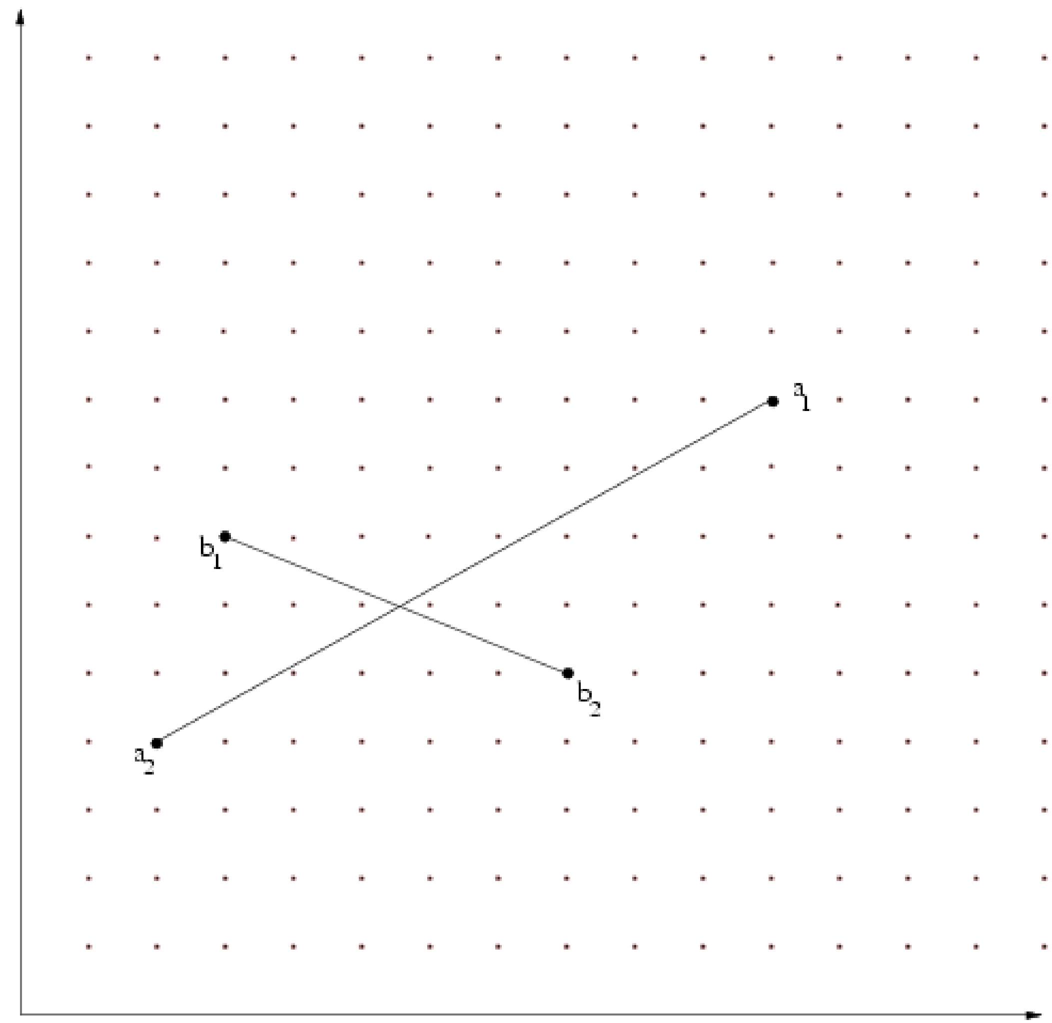
- Construction de l'enveloppe convexe: déterminations successives du point *K*
- Reconstruction terminée quand $K = a_1$



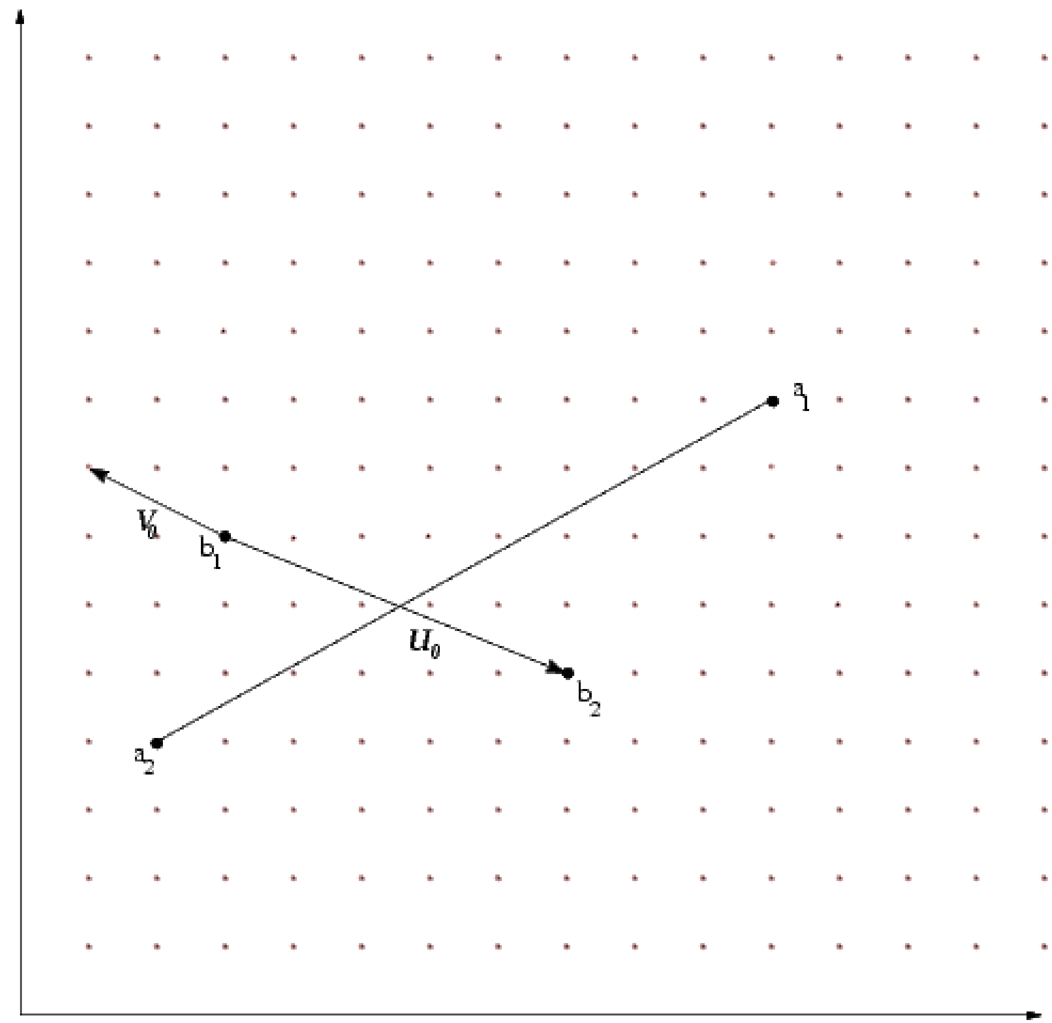
# PLAN

- Rappels de théorie des nombres
- Historique: voiles de Klein
- Étude du problème dans le cas général
- Algorithme de reconstruction
- **Exemple et complexité de l'algorithme**
- Conclusion

# EXEMPLE



# EXEMPLE

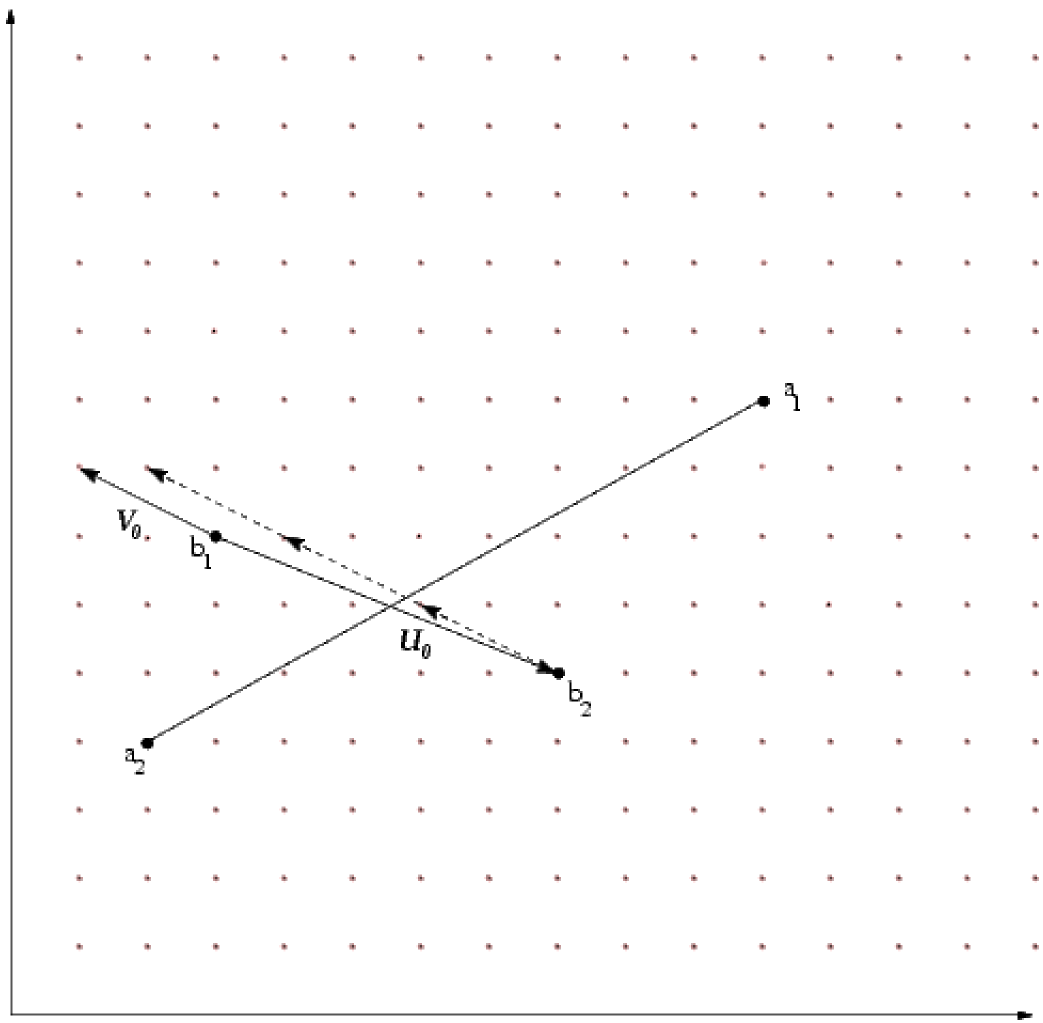



*Par transvections*

$$u_0 \Leftrightarrow (1,0)$$

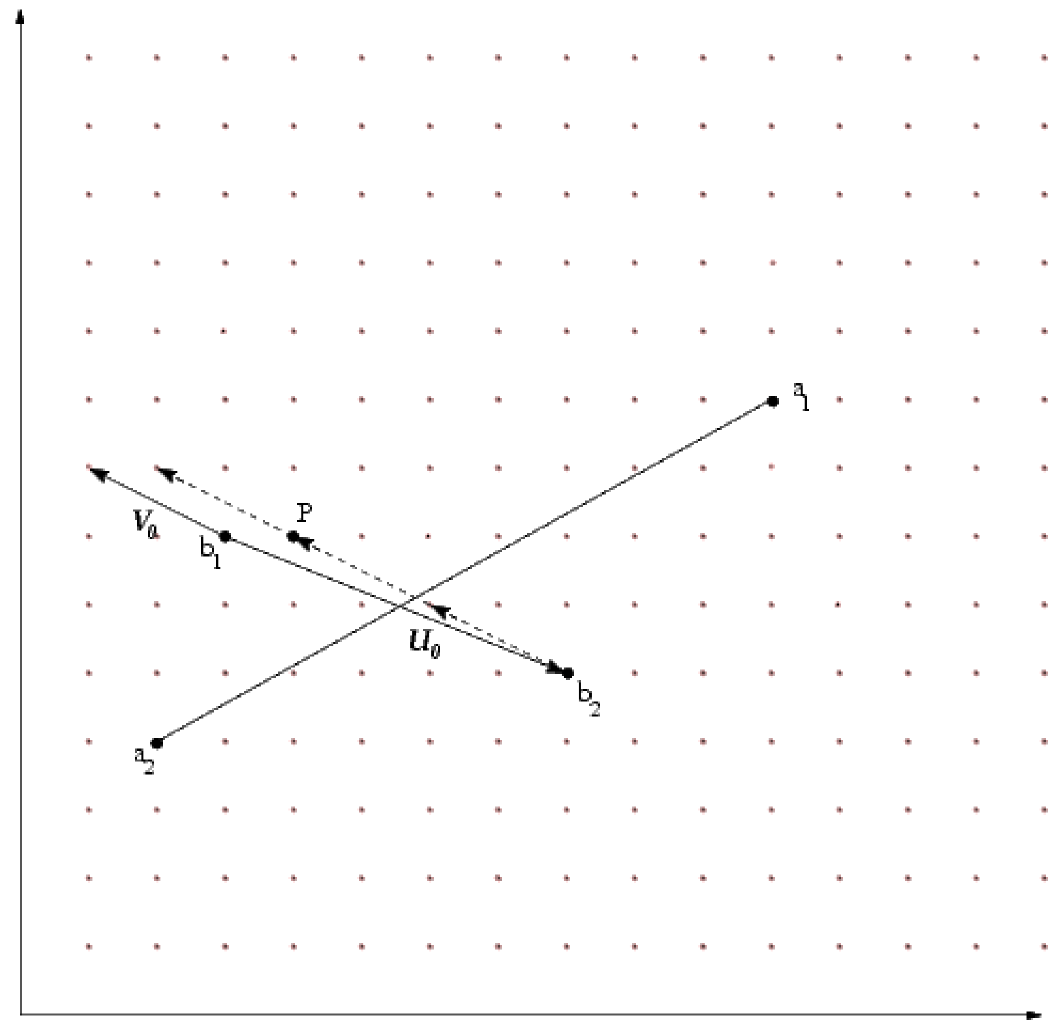
$$v_0 \Leftrightarrow (0,1)$$

# EXEMPLE



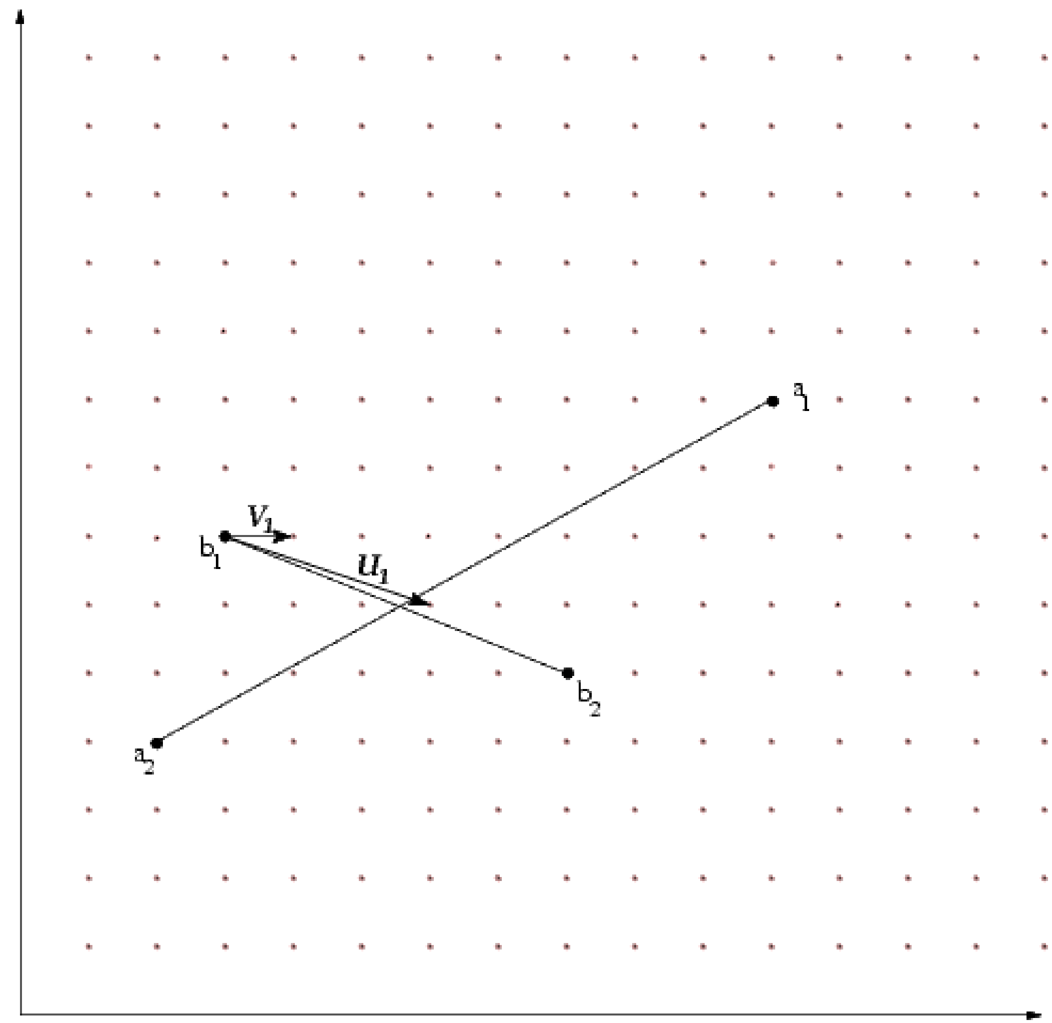

*Seconde configuration*

# EXEMPLE




$$P = b_2 + 2v_0$$

# EXEMPLE

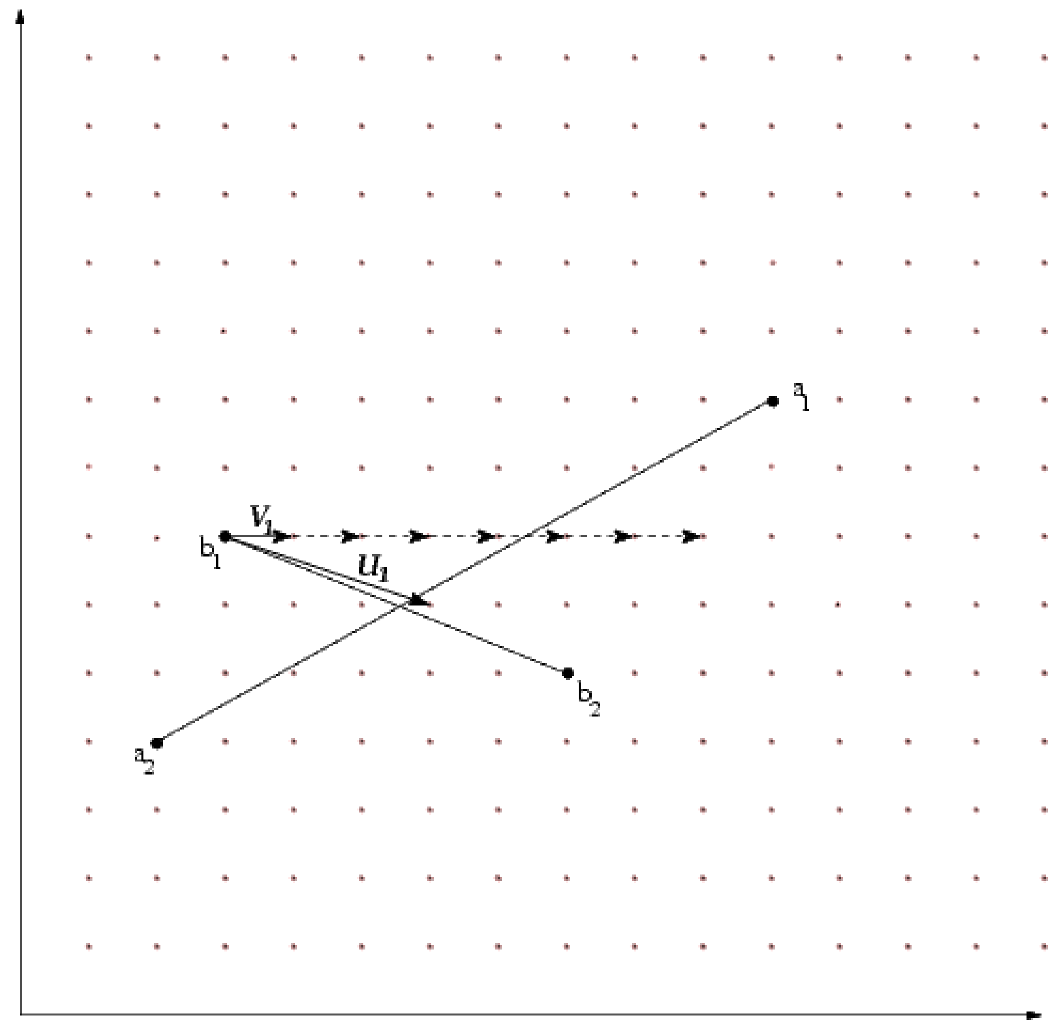



*Par transvections*

$$u_1 \Leftrightarrow (1,0)$$

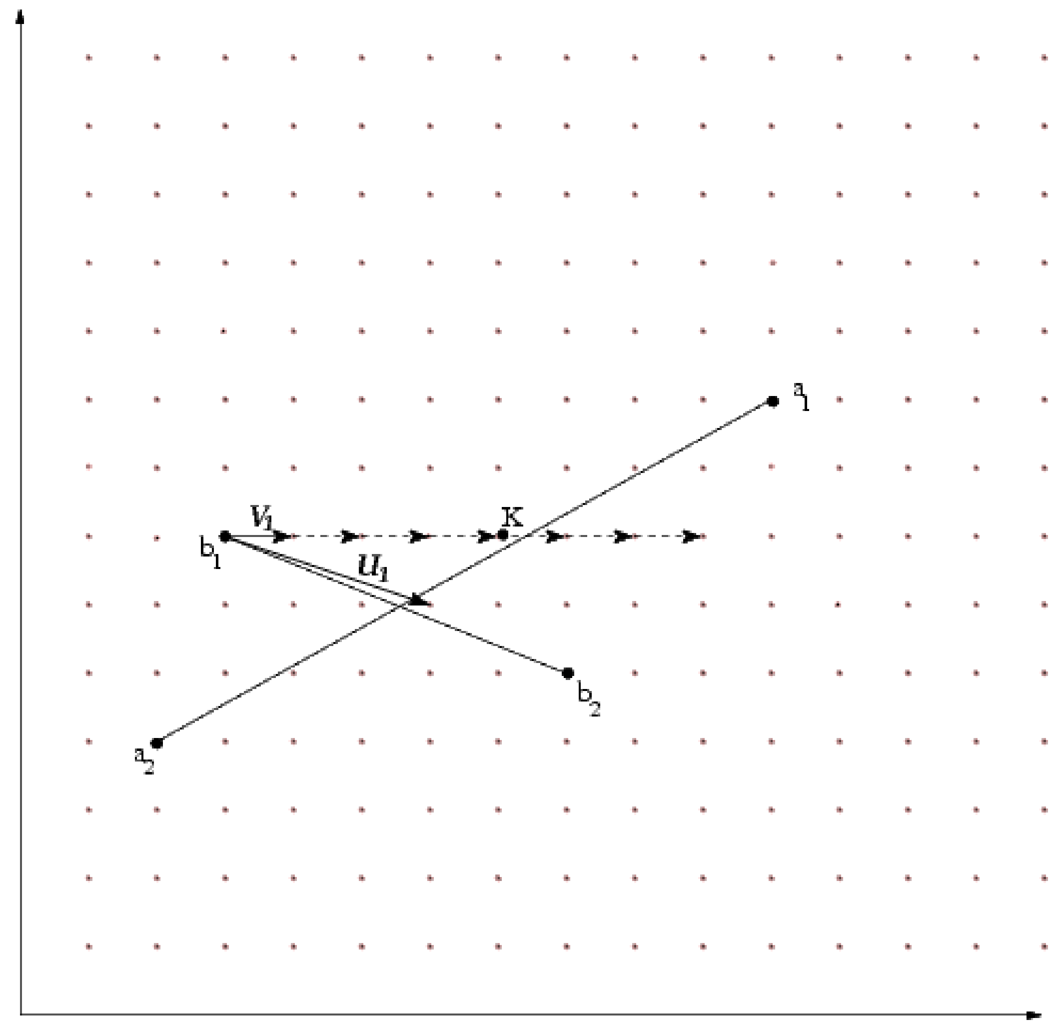
$$v_1 \Leftrightarrow (0,1)$$

# EXEMPLE



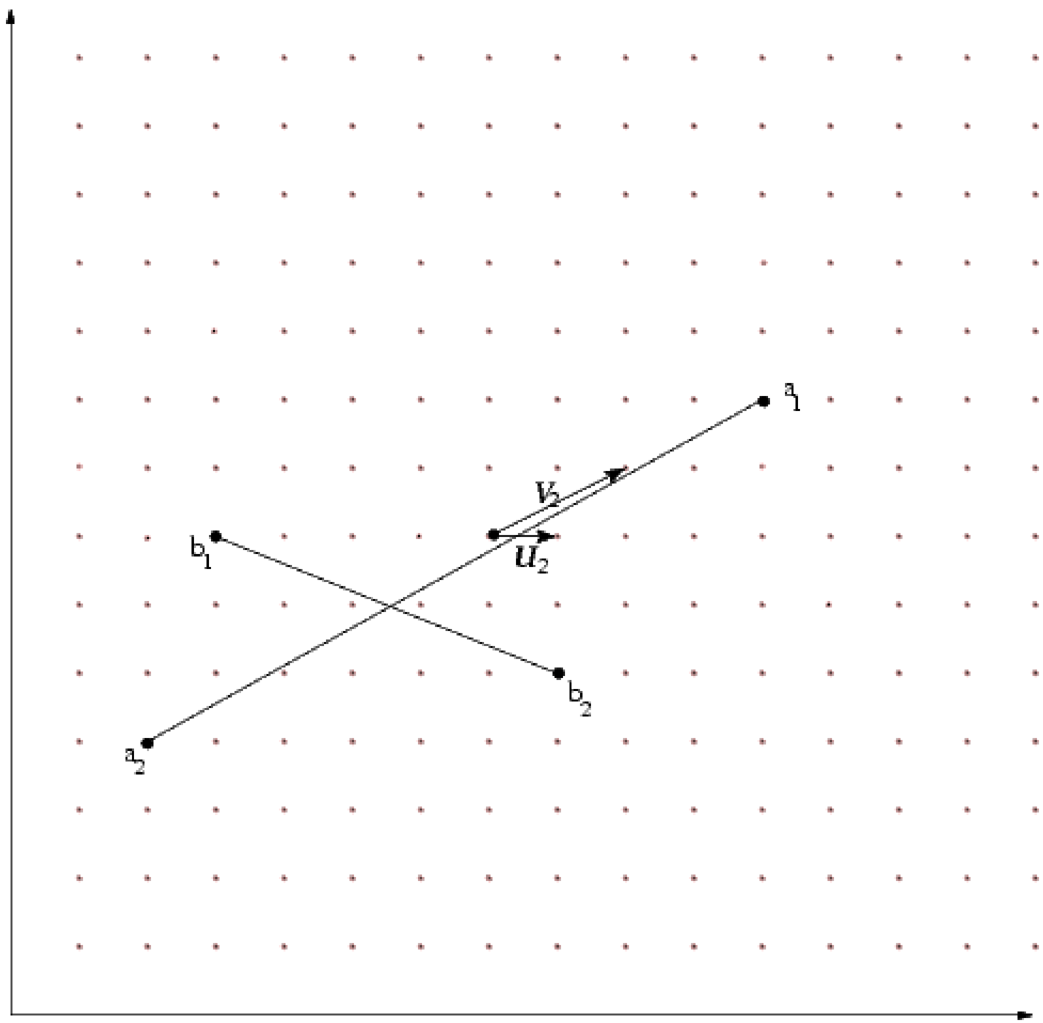

*Première configuration*

# EXEMPLE




$$K = b_1 + 4v_1$$

# EXEMPLE

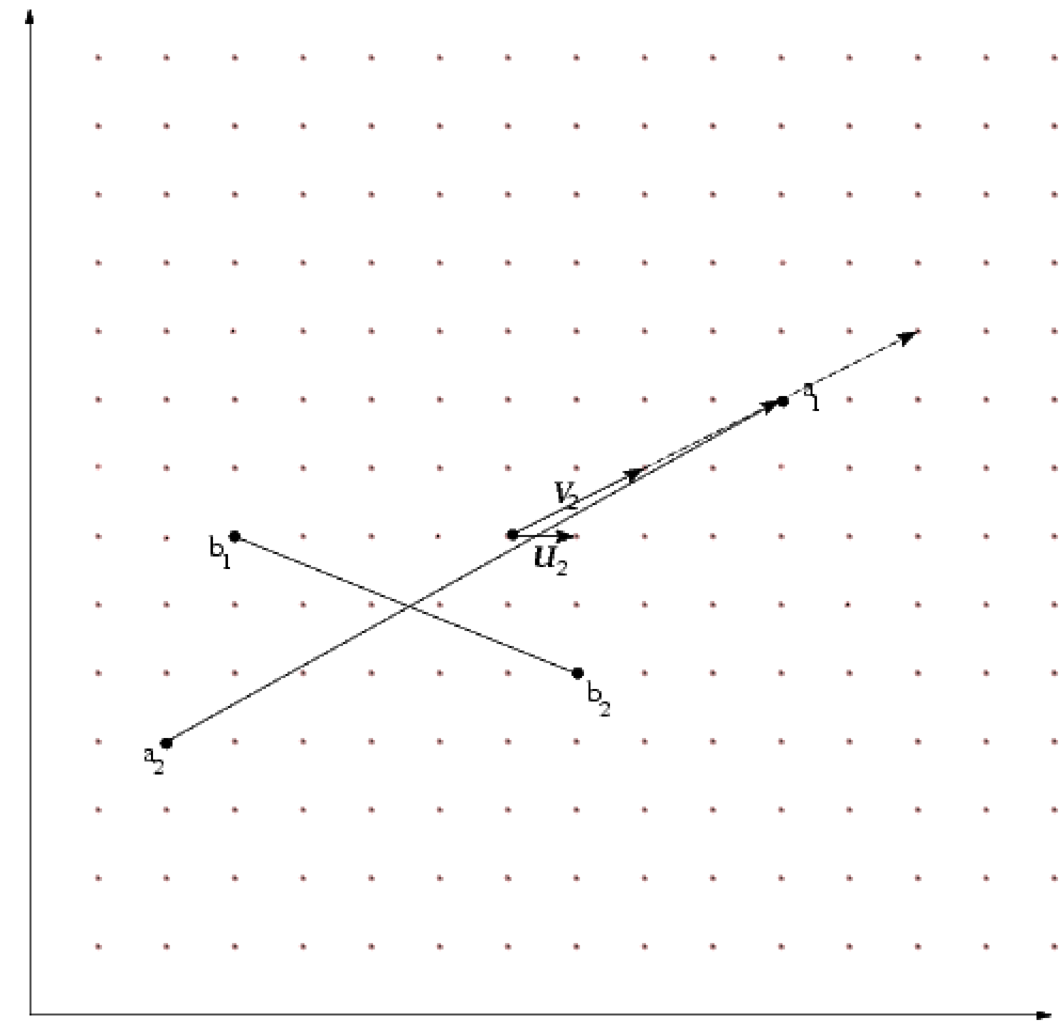



*Par transvections*

$$u_2 \Leftrightarrow (1,0)$$

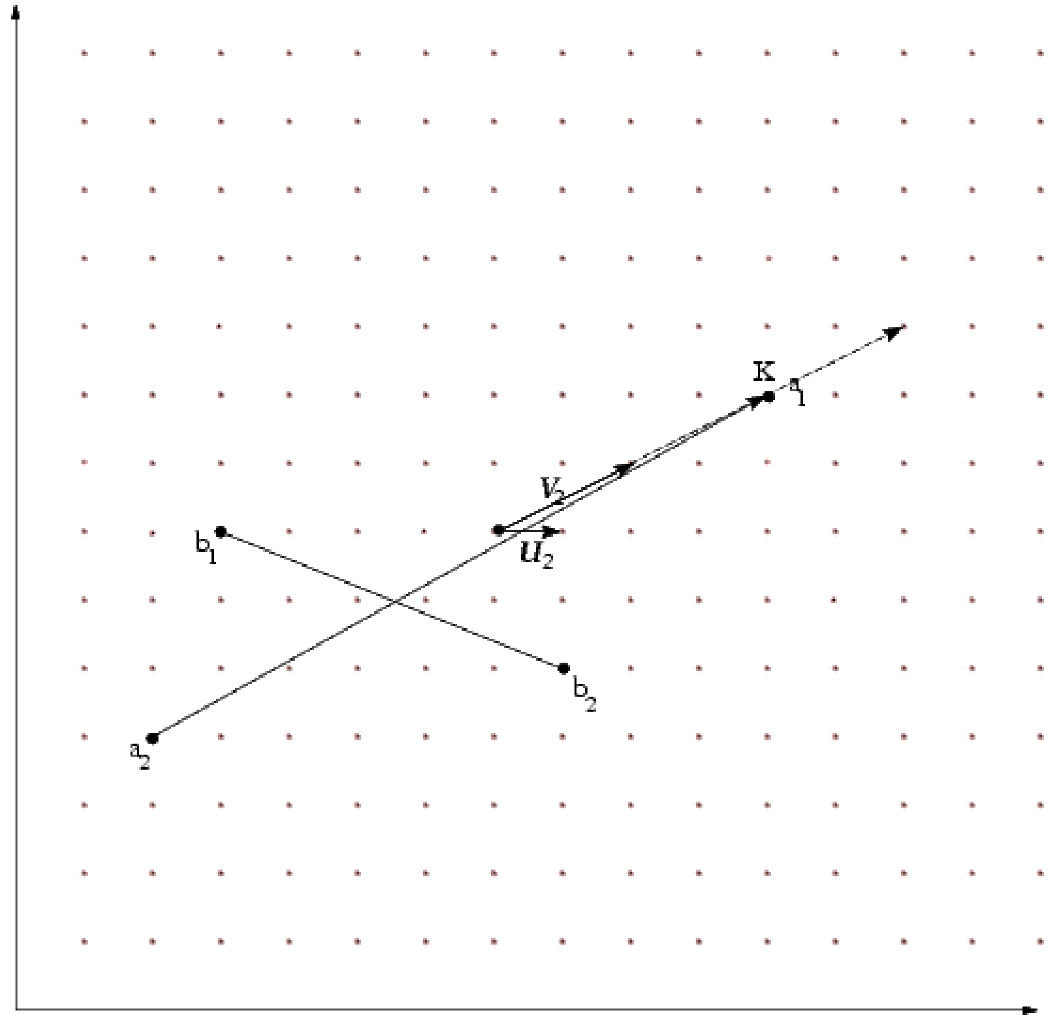
$$v_2 \Leftrightarrow (0,1)$$

# EXEMPLE



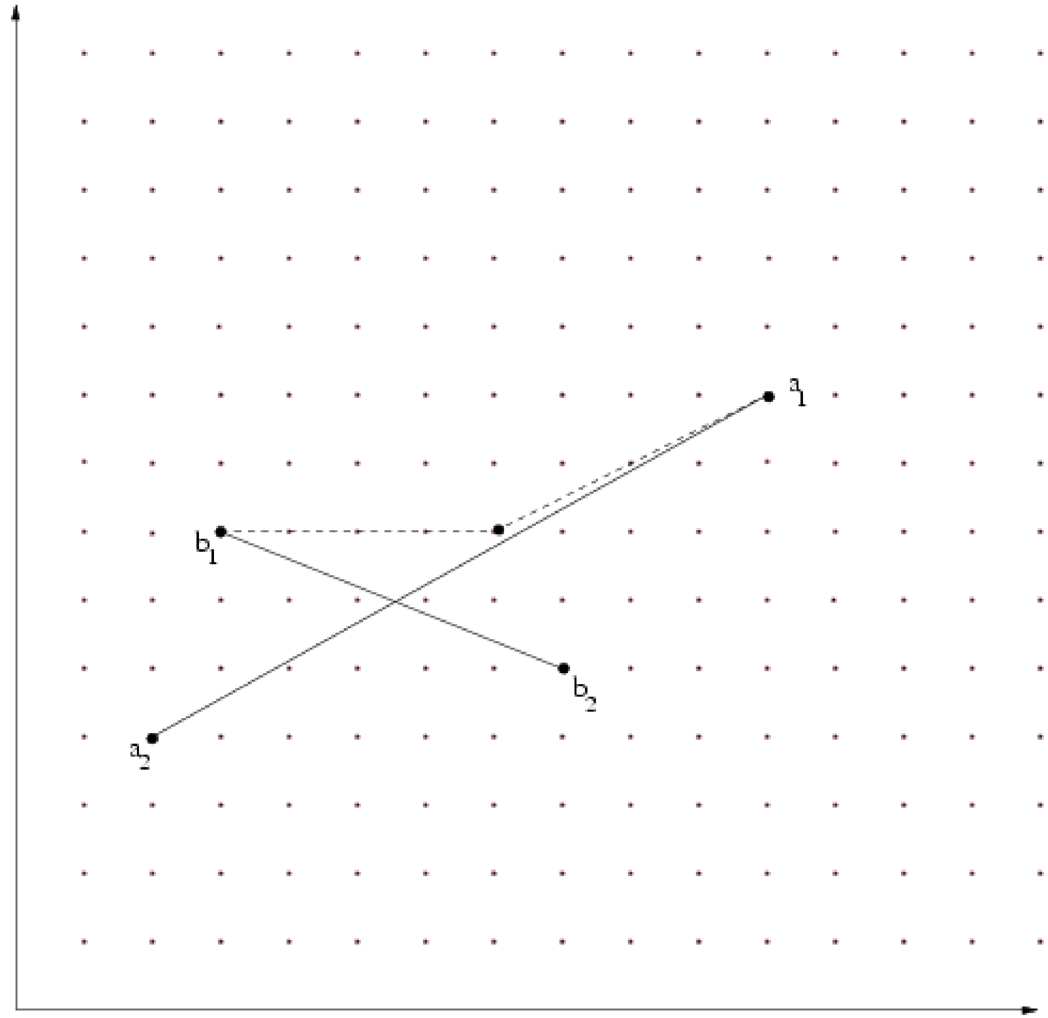

*Première configuration*

# EXEMPLE




$K = a_1$

# EXEMPLE




*Reconstruction terminée*

# COMPLEXITÉ DE L'ALGORITHME

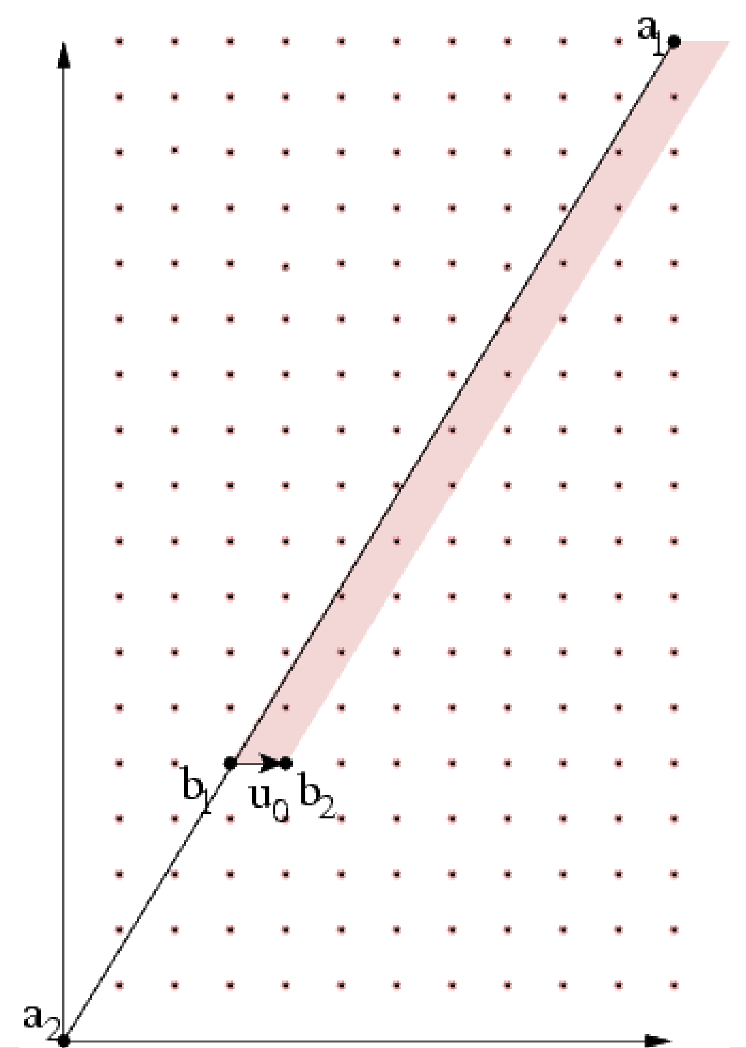
- Première configuration: détermination immédiate d'un point *K* de l'enveloppe
- Seconde configuration: détermination d'un point candidat *P* $\longrightarrow$ réitération de l'algorithme
- Estimer le nombre maximum d'itérations

# EN SECONDE CONFIGURATION...

- Itérations successives de l'algorithme en seconde configuration

$u_0 = b_1 b_2$

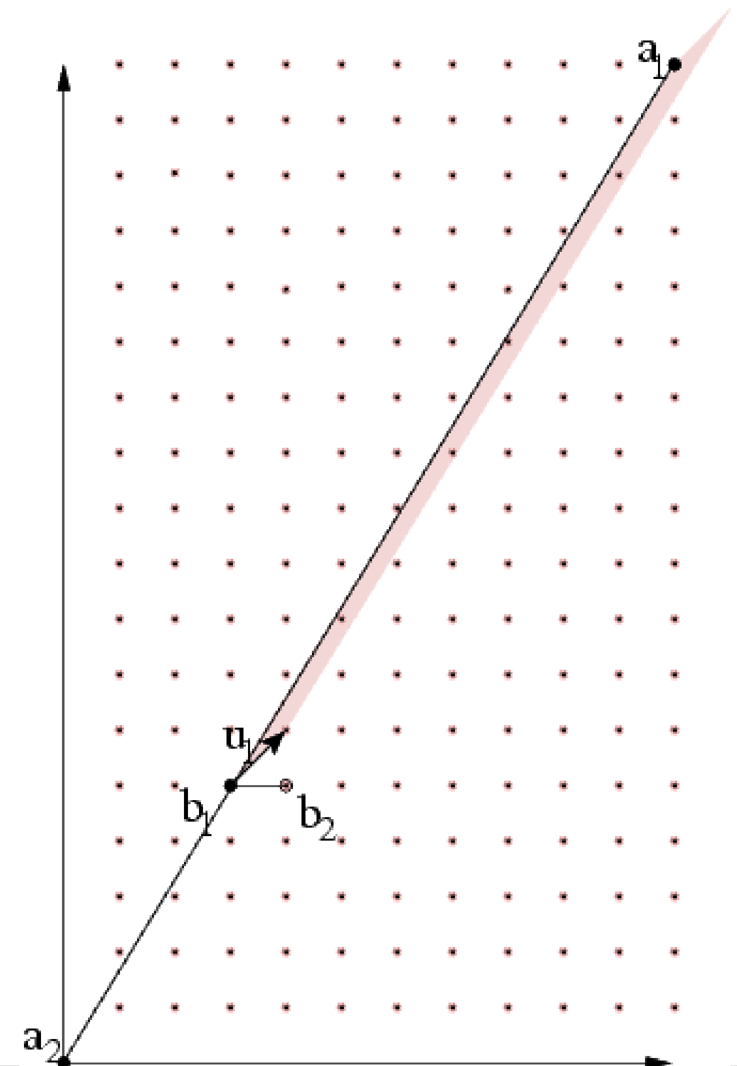
$A_0 = u_0 \wedge b_1 a_1$



# EN SECONDE CONFIGURATION...

- Itérations successives de l'algorithme en seconde configuration

$$A_1 = u_1 \wedge b_1 \; a_1 \leq \frac{A_0}{2}$$

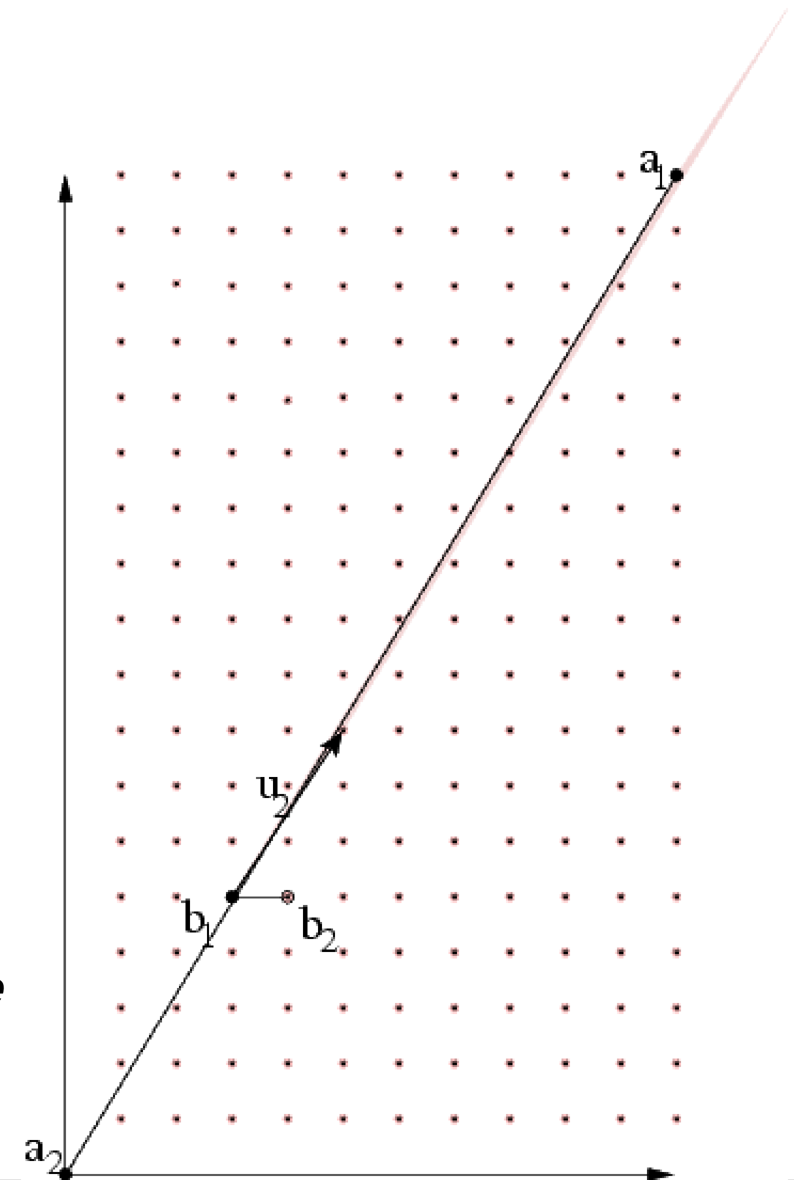


# EN SECONDE CONFIGURATION...

- Itérations successives de l'algorithme en seconde configuration

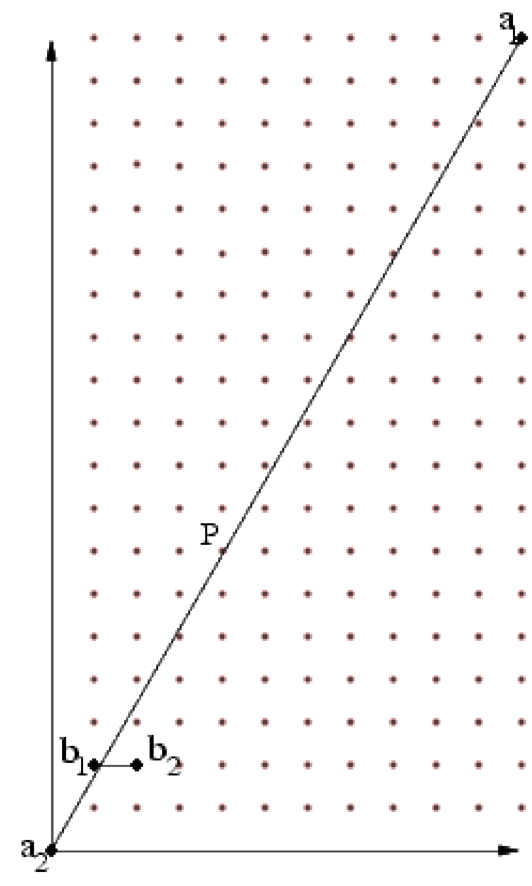
$$A_2 = u_2 \wedge b_1 a_1 \leq \frac{A_1}{2}$$

$\Rightarrow$ *convergence logarithmique*



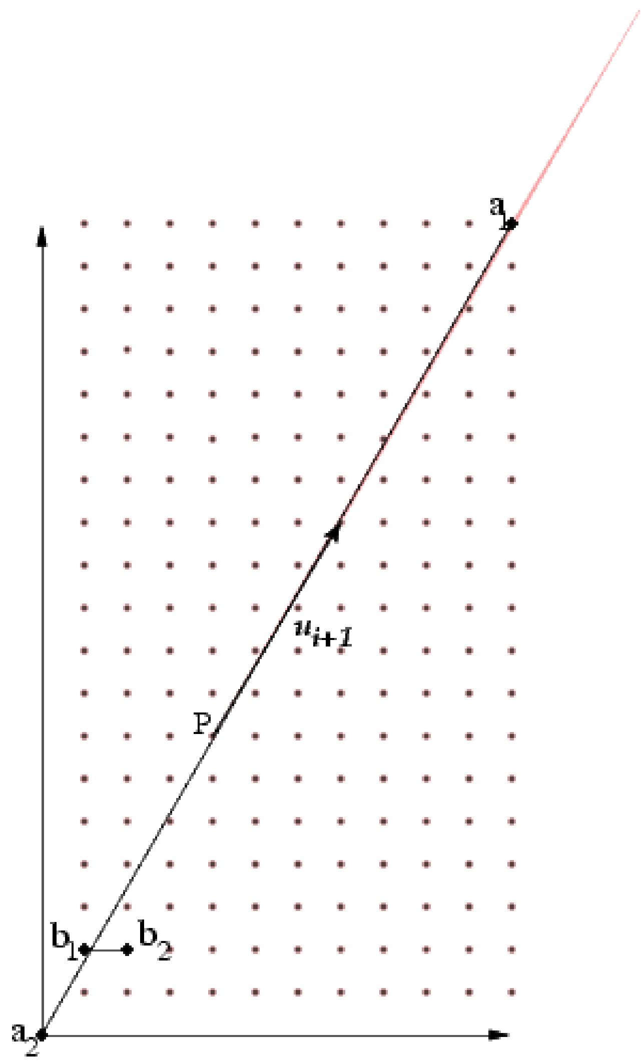
# PASSAGE À LA PREMIÈRE CONFIGURATION

- Passage de la seconde à la première configuration: *P* candidat



# PASSAGE À LA PREMIÈRE CONFIGURATION

- Passage de la seconde à la première configuration: *P* candidat
  $u_{i+1} \wedge Pa_1 = A_{i+1}$

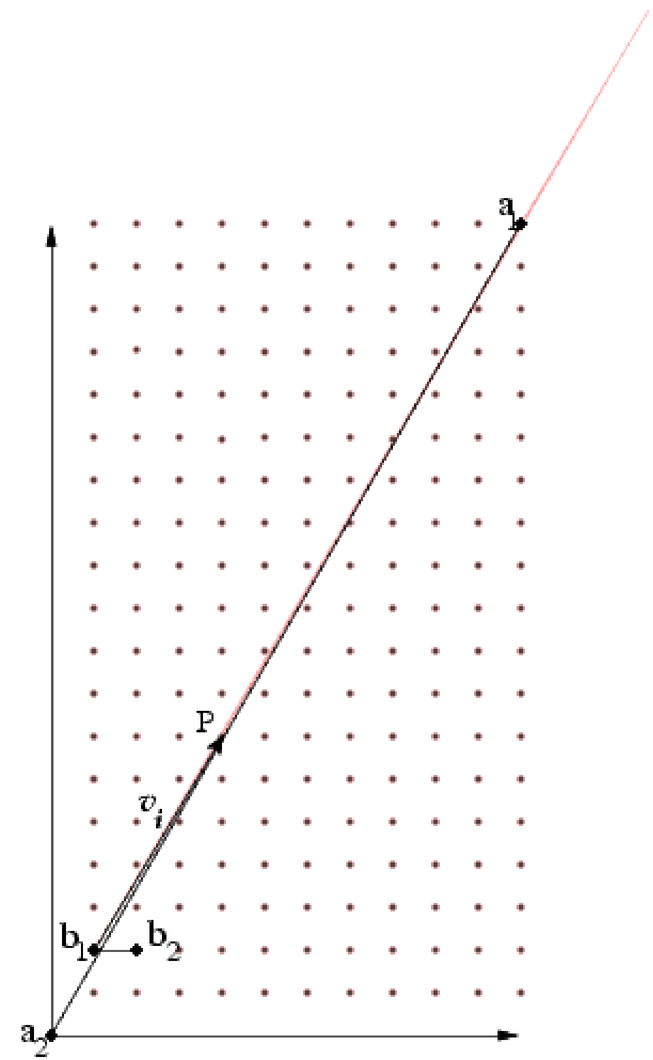


# PASSAGE À LA PREMIÈRE CONFIGURATION

- Passage de la seconde à la première configuration: *P* candidat

$$u_{i+1} \wedge Pa_1 = A_{i+1}$$

$$comme \quad u_{i+1} = v_i \quad et \quad Pa_1 = b_1 a_1 - v_i$$
$$alors \quad A_{i+1} = v_i \wedge b_1 a_1$$



# PASSAGE À LA PREMIÈRE CONFIGURATION

- Passage de la seconde à la première configuration: *P* candidat

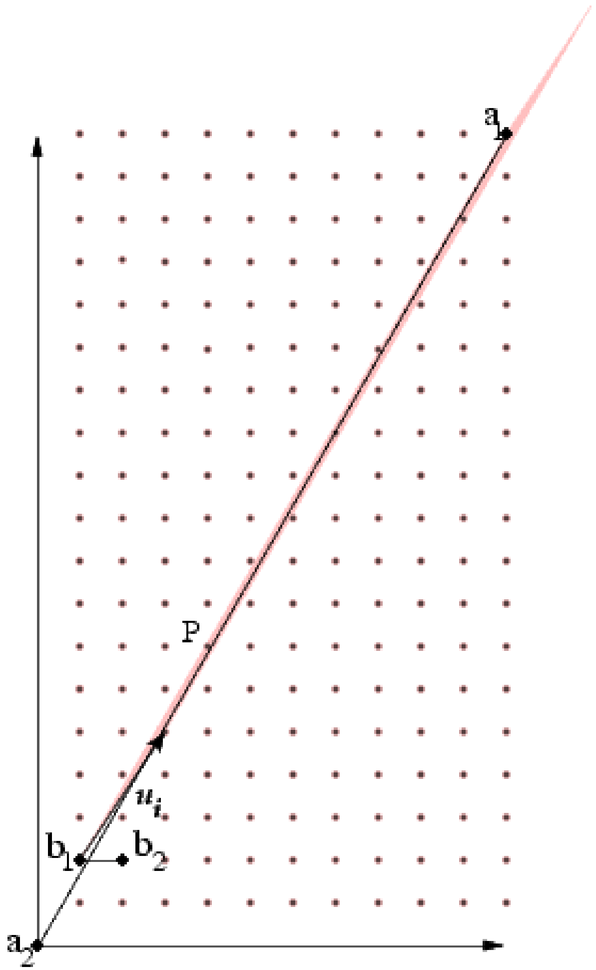
$$u_{i+1} \wedge Pa_1 = A_{i+1}$$

$$comme \;\; u_{i+1} = v_i \;\; et \;\; Pa_1 = b_1 a_1 - v_i$$

$$alors \;\; A_{i+1} = v_i \wedge b_1 a_1$$

$$cependant \;\; v_i \wedge b_1 a_1 \leq u_i \wedge b_1 a_1$$

$$donc \;\; A_{i+1} \leq A_i$$



# COMPLEXITÉ DE L'ALGORITHME

- À chaque itération:
  - Soit détermination d'un sommet de l'enveloppe convexe (au plus *log*( $b_1 b_2 + a_1 a_2$))
  - Soit détermination d'un candidat et espace de recherche divisé par 2
- Description de l'enveloppe convexe en temps logarithmique

# PLAN

- Rappels de théorie des nombres
- Historique: voiles de Klein
- Étude du problème dans le cas général
- Algorithme de reconstruction
- Exemple et complexité de l'algorithme
- **Conclusion**

# CONCLUSION

- Notre problématique VS voiles de Klein
- Algorithme proposé comme un automate à nombre réduit d'états (par transvections)
- Reconstruction efficace du polygone (logarithmique)