

Convolutions binomiales et dérivation de fonctions discrètes bruitées

Florent Brunet

Rémy Malgouyres

Sébastien Fourey

*LAIC, Université d'Auvergne
Clermont-Ferrand*

*ENSICAEN, GREYC Image
Caen*

Journées Informatique et Géométrie 2007
Sophia Antipolis

- **Fonctions réelles**
 - Quelques définitions
 - Convergence
 - Extensions possibles
- **Courbes paramétrées**
- **Conclusion et perspectives**

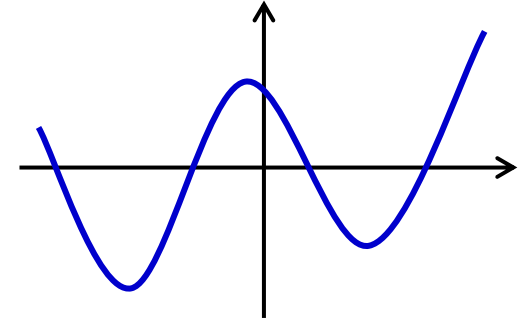
Motivations

- Traitement de l'image
- D'autres méthodes existent
- Données bruitées
- Précision des calculs

Fonctions

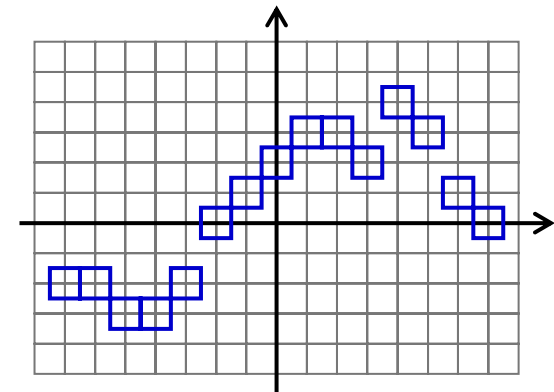
- Fonction réelle

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



- Fonction discrète

$$F : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

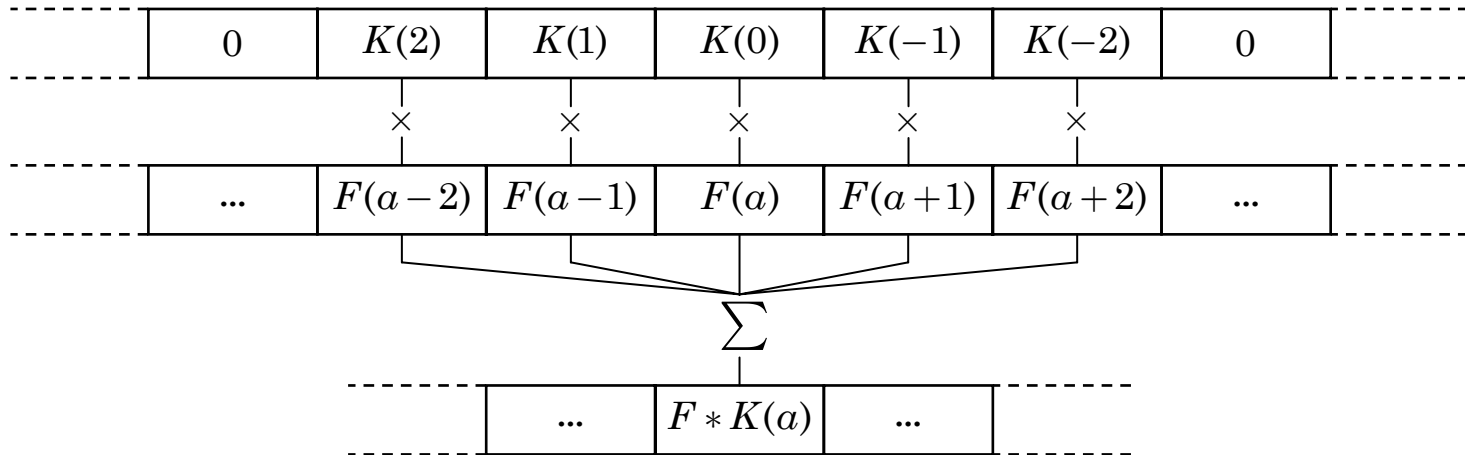


Produit de convolution discret

- $F : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \qquad K : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

- $F * K : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

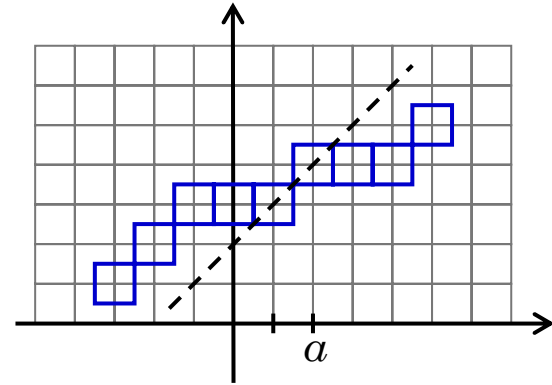
$$a \mapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} F(a - i)K(i)$$



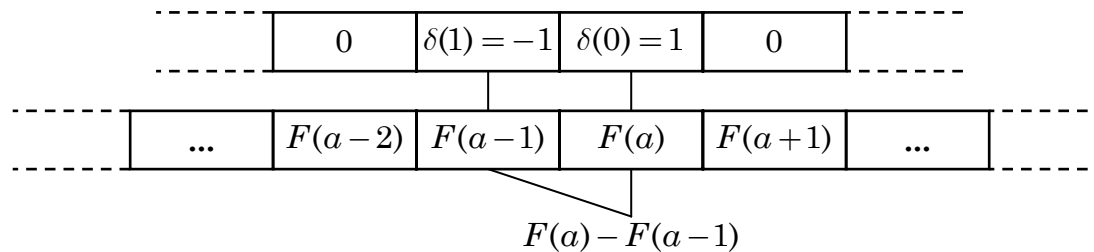
- $\Psi_K F(a) = F * K(a)$

Différences finies

- $F : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- $F(a) - F(a - 1)$



- $\Psi_\delta F(a)$ avec $\delta(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ -1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



Noyau moyennneur H_n

	1					
	1	1				
	1	2	1			
	1	3	3	1		
0	1	4	6	4	1	0
	1	5	10	10	5	1

$$H_n(a) = \begin{cases} \binom{n}{a + \frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ & \text{et si } a \in \left\{ -\frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2} \right\} \\ \binom{n}{a + \frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ & \text{et si } a \in \left\{ -\frac{n+1}{2}, \dots, \frac{n+1}{2} \right\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

0	$H_4(-2)$ 1	$H_4(-1)$ 4	$H_4(0)$ 6	$H_4(1)$ 4	$H_4(2)$ 1	0
...	$F(a-2)$	$F(a-1)$	$F(a)$	$F(a+1)$	$F(a+2)$...

$$\frac{1}{2^n} \Psi_{H_n} F(a)$$

Noyau dérivateur D_n

- $D_n = H_n * \delta$
- $\frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} F(\alpha)$

F

- Fonction discrète
- Éventuellement bruitée

$F * H_n$

- Lissage
- Atténuation du bruit

$F * H_n * \delta$

- Estimation de la dérivée

Remarques

- Coefficients binomiaux et gaussienne

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

- Différence de gaussienne et D_n
- Calculs en nombres entiers
- Complexité en $O(nm)$

Convergence

- $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

- ϕ'

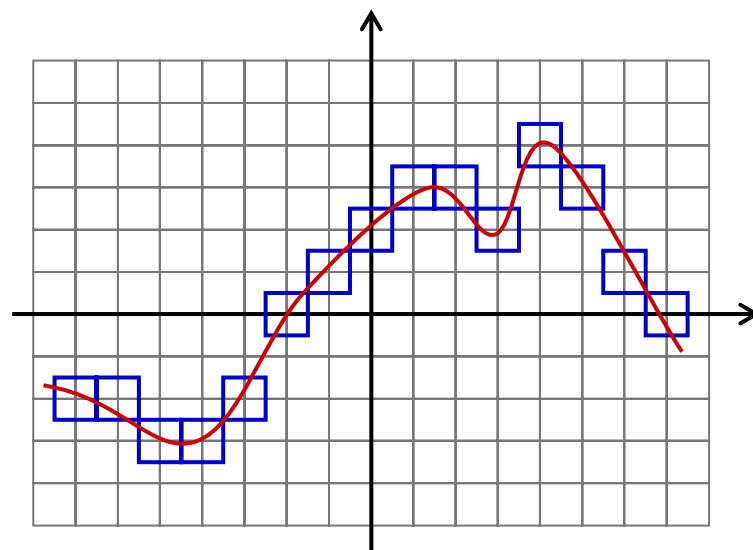
$$\frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma$$

- $|h\Gamma(\alpha) - \phi(h\alpha)| \leq Kh^\alpha$

- $h > 0$

- $0 < \alpha \leq 1$

- $K > 0$



Théorème de convergence

- **Si**
 - $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^3
 - $\phi^{(3)}$ bornée
 - $|h\Gamma(a) - \phi(ha)| \leq Kh^\alpha$
 - $n = \left\lfloor h^{\frac{2(\alpha-3)}{3}} \right\rfloor$
- **Alors** $\left| \frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma(a) - \phi'(ha) \right| \leq \sigma_{\phi,\alpha}(h)$
- **Avec** $\sigma_{\phi,\alpha}(h) \in \mathcal{O}\left(h^{\frac{2}{3}\alpha}\right)$

Idée de la preuve (prérequis)

- Approximation de Bernstein

$$f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$B_n f(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) p_{n,i}(x) \quad p_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

- Théorème de Floater (2005)

$$f \in C^{k+2}$$

$$\left| (B_n f)^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) \right| \leq \frac{1}{2n} \left(k(k-1) \|f^{(k)}\|_\infty + k|1-2x| \|f^{(k+1)}\|_\infty + x(1-x) \|f^{(k+2)}\|_\infty \right)$$

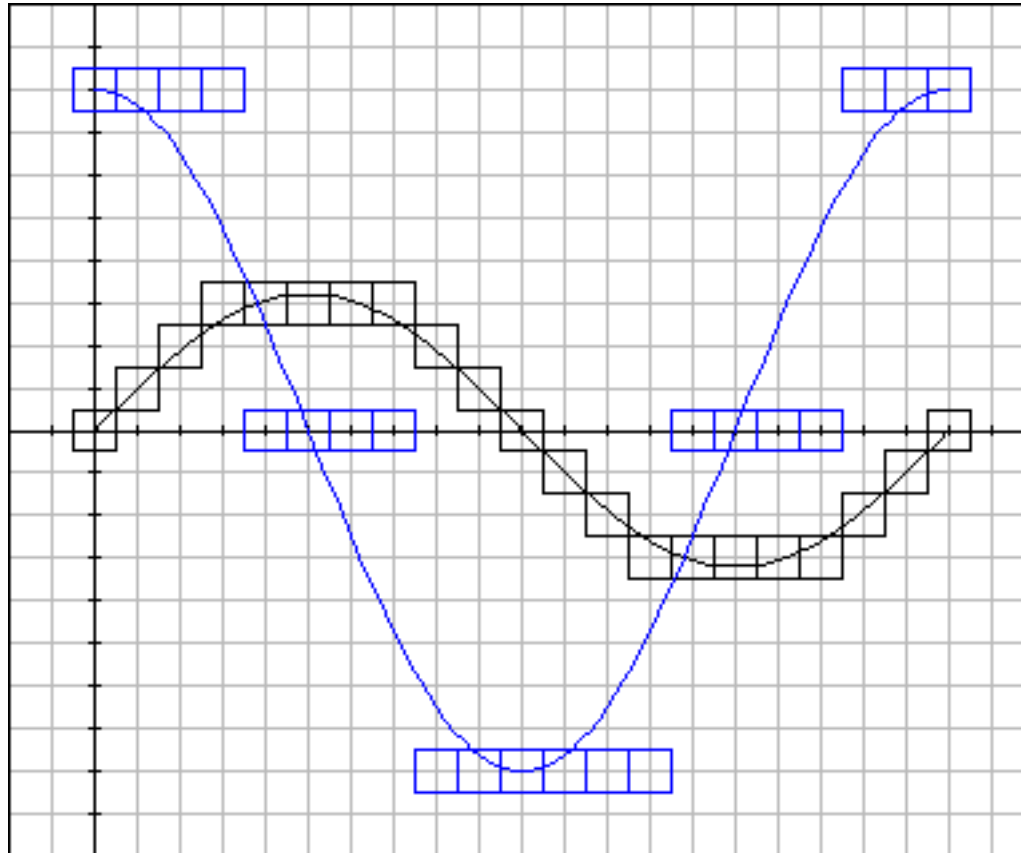
Idée de la preuve

- $$\left\| \frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma(\alpha) - \phi'(ha) \right\| \leq \underbrace{\left| (B_{n+1}f)' \left(\frac{1}{2} \right) - f' \left(\frac{1}{2} \right) \right|}_{\leq \frac{(n+1)h^2}{8} \|\phi^{(3)}\|_\infty} + \underbrace{K \frac{h^{\alpha-1}}{n+1} s_{n+1}}_{s_n \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}}$$

- Minimum de la majoration $\Rightarrow n = \left\lfloor h \frac{2(\alpha-3)}{3} \right\rfloor$

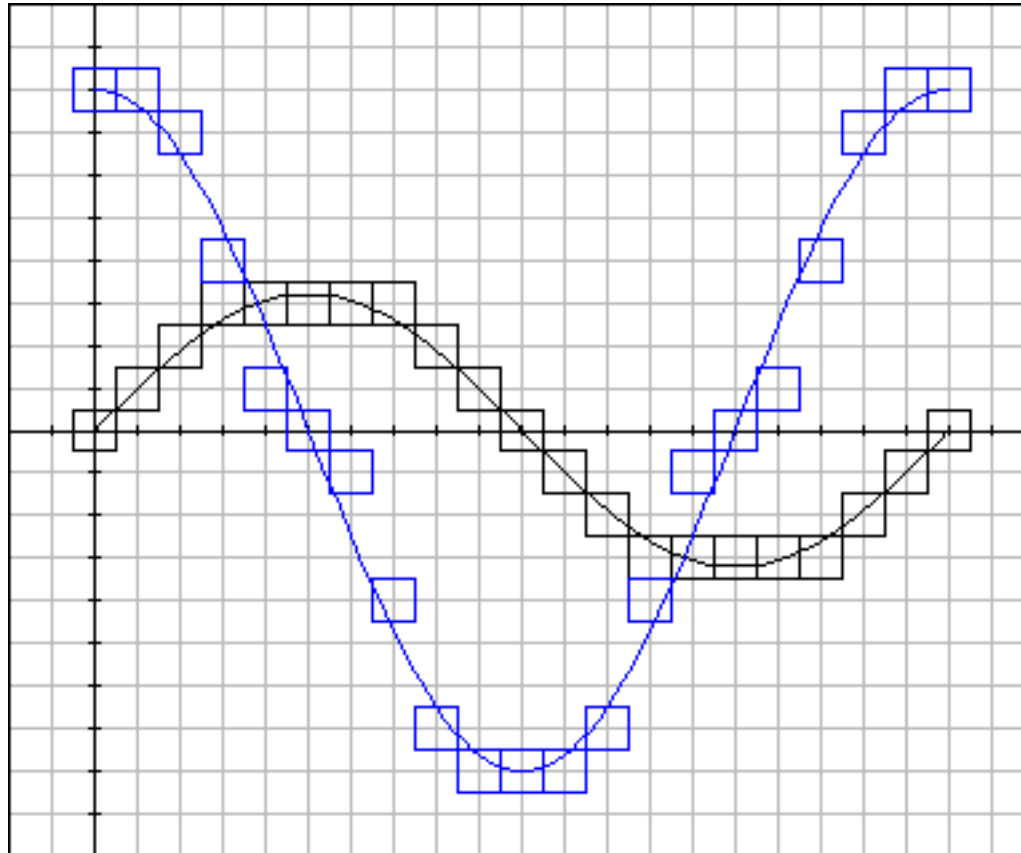
- En remplaçant dans la majoration $\Rightarrow O\left(h^{\frac{2}{3}\alpha}\right)$

Illustration



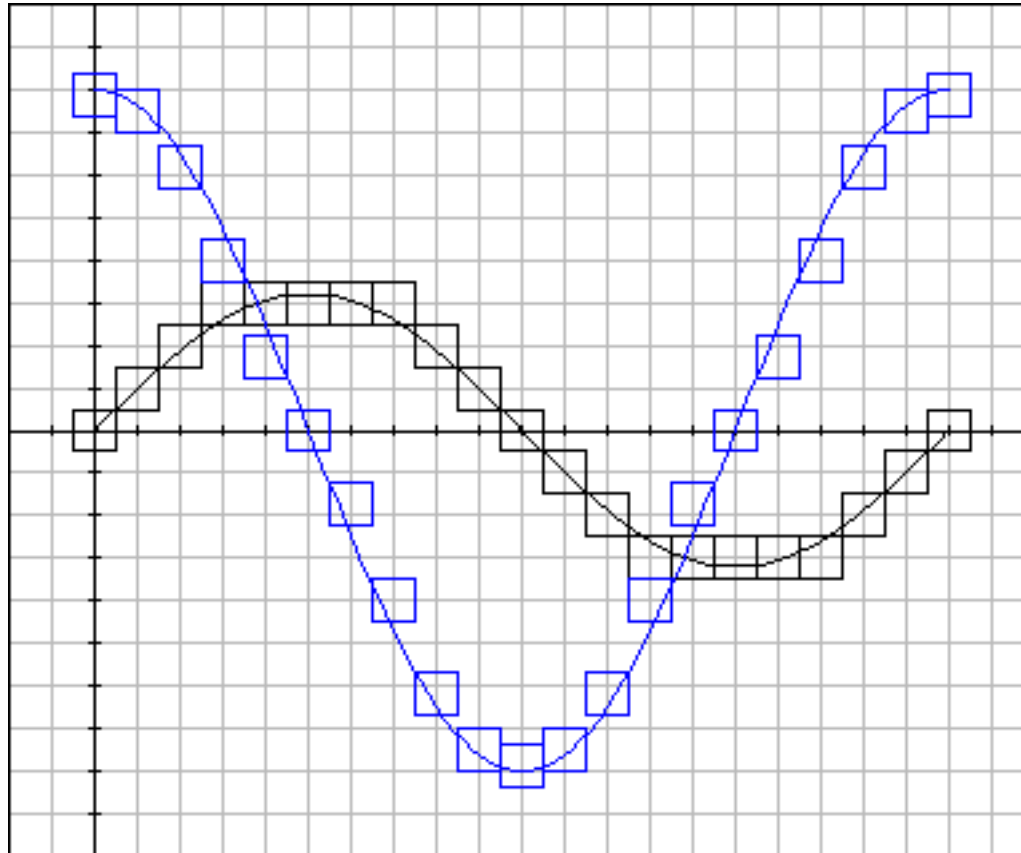
$$\frac{1}{2^n} \Psi_{D_0}$$

Illustration



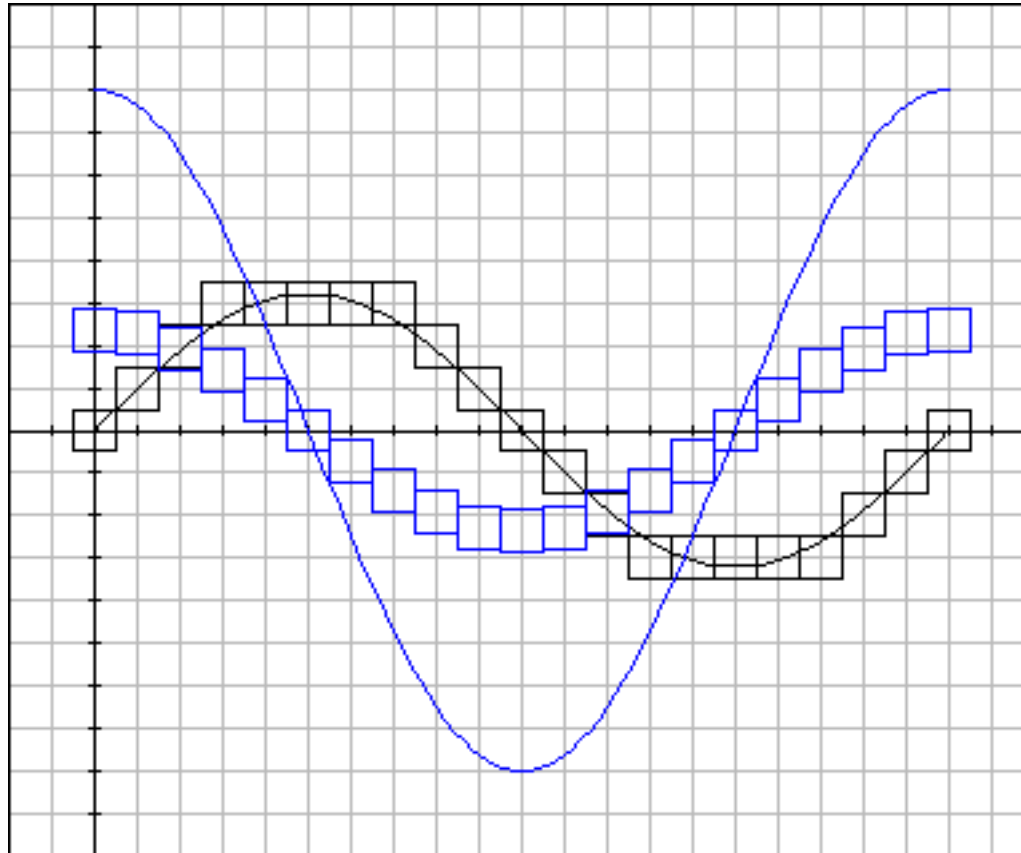
$$\frac{1}{2^n} \Psi_{D_3}$$

Illustration



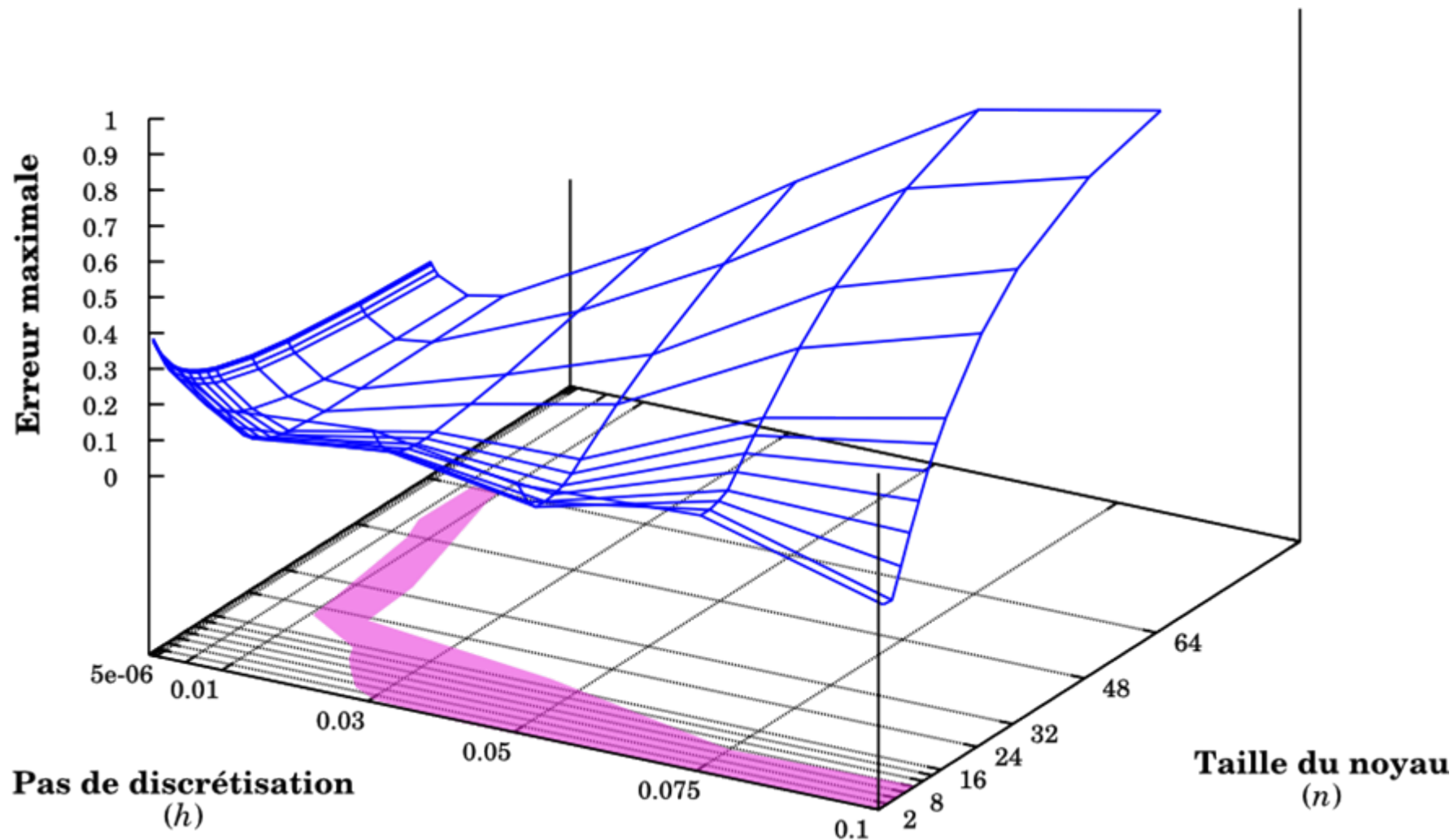
$$\frac{1}{2^n} \Psi_{D_7}$$

Illustration



$$\frac{1}{2^n} \Psi_{D_{101}}$$

Illustration



Dérivées d'ordre supérieur

$$\Psi_{D_n} \circ \dots \circ \Psi_{D_n} \Gamma$$

$$D_n * \dots * D_n * \Gamma$$

$$H_n * \delta * \dots * H_n * \delta * \Gamma$$

$$H_n * (\delta * \dots * \delta) * \Gamma$$

$$H_n * \delta^k * \Gamma$$

$$\Psi_{D_n^k} \Gamma$$

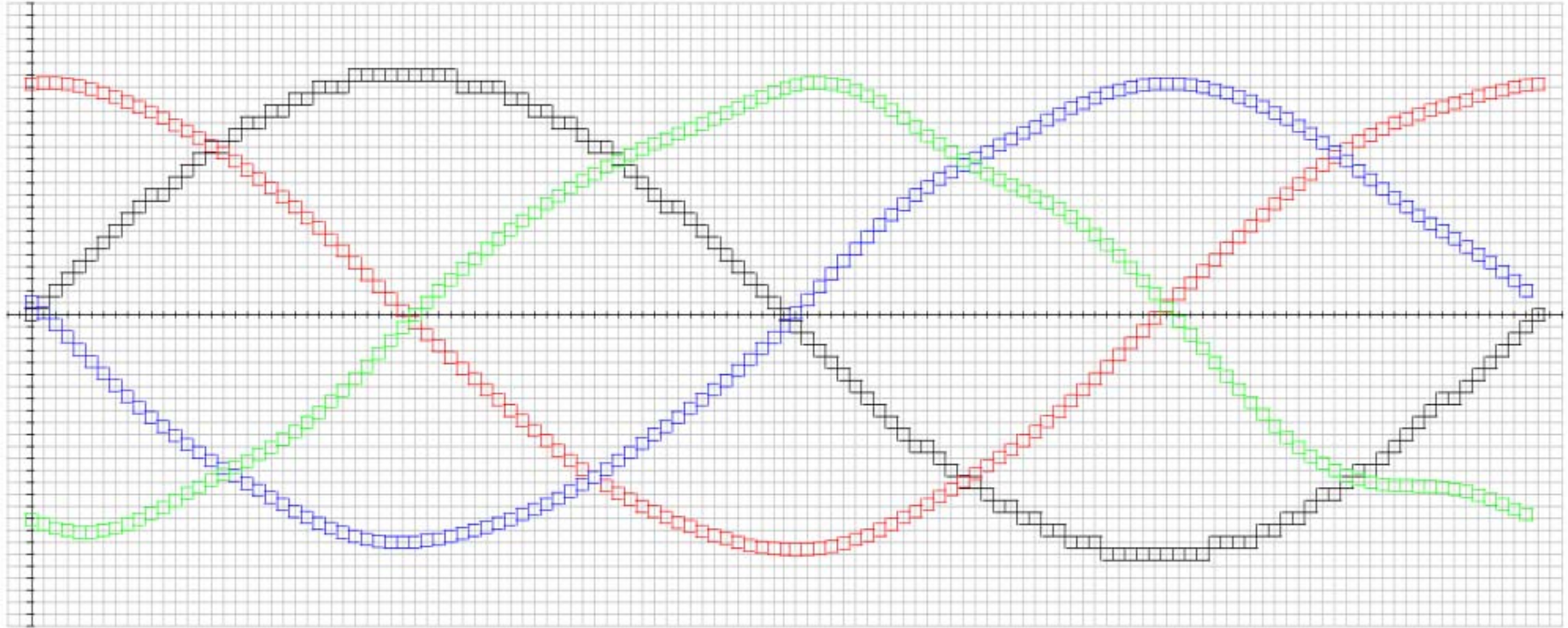
Théorème de convergence

- **Si**
 - $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^{k+2}
 - $\phi^{(r)}$ bornée pour $r \in \{3, \dots, k+2\}$
 - $|h\Gamma(a) - \phi(ha)| \leq Kh^\alpha$
 - $n = \sum_{l=0}^{k-1} \left\lfloor h^{\frac{2(\alpha_l-3)}{3}} \right\rfloor \quad \alpha_r = \left(\frac{2}{3} \right)^r \alpha$
- **Alors** $\left| \frac{h^{-k+1}}{2^n} \Psi_{D_n^k} \Gamma(a) - \phi^{(k)}(ha) \right| \leq \sigma_{\phi, \alpha, k}(h)$
- **Avec** $\sigma_{\phi, \alpha, k}(h) \in \mathcal{O}\left(h^{(2/3)^k \alpha}\right)$

Principe de la preuve

- Par récurrence
- En itérant le théorème de convergence pour la dérivée première

Illustration



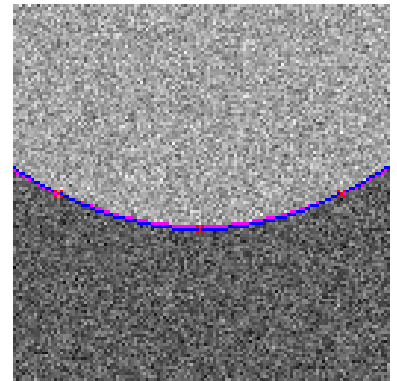
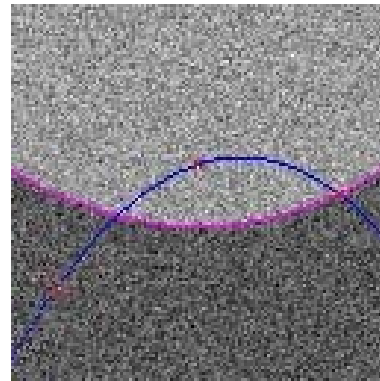
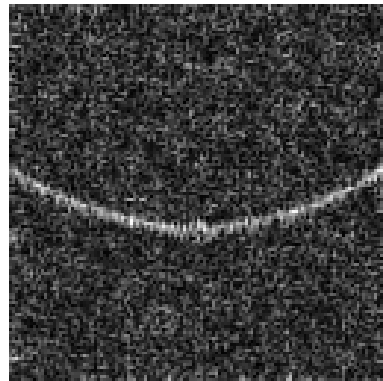
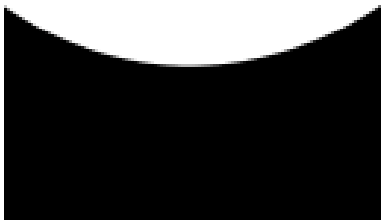
$$\Psi_{D_{99}}$$

$$\Psi_{D_{199}^2}$$

$$\Psi_{D_{299}^3}$$

Fonctions à plusieurs variables

- Image numérique $\equiv \Gamma : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$
- Dérivées partielles



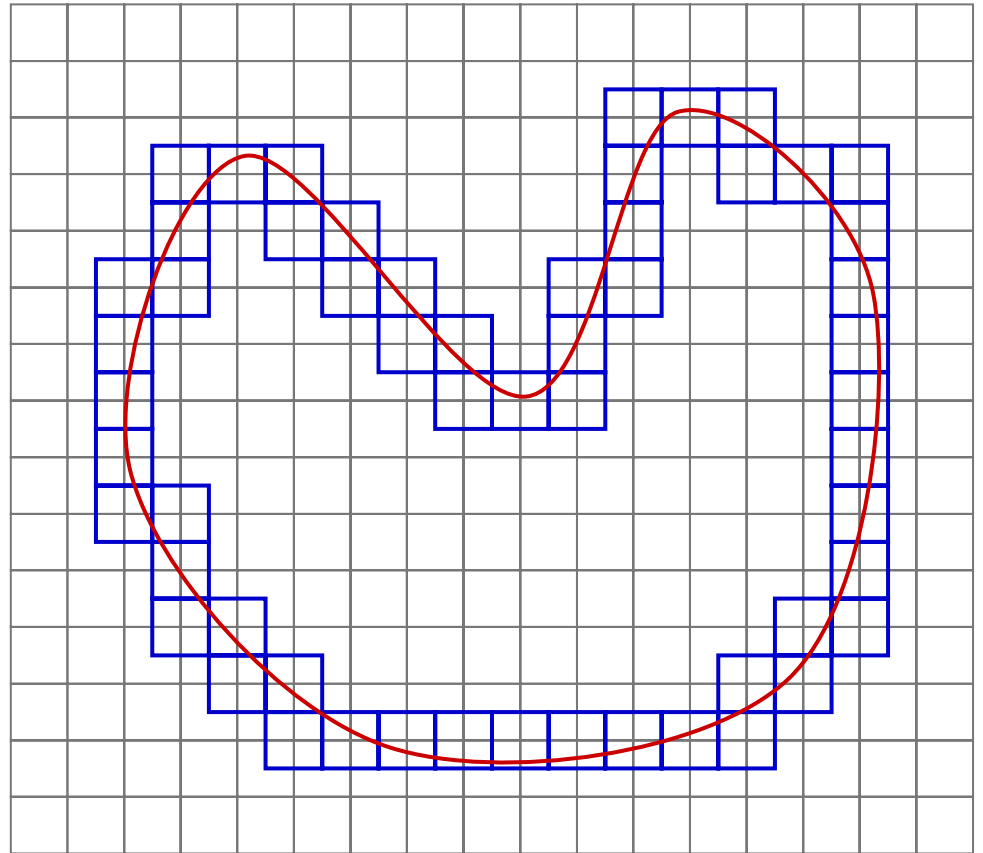
Courbes paramétrées

- $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

- $\Gamma : \{0, \dots, q\} \rightarrow \mathbb{Z}^2$

$$a \mapsto \begin{pmatrix} \Gamma_x(a) \\ \Gamma_y(a) \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma_x(a) \\ \frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} \Gamma_y(a) \end{pmatrix}$$



$$\|h\Gamma(a) - \bar{\phi}(ha)\| \leq \varepsilon$$

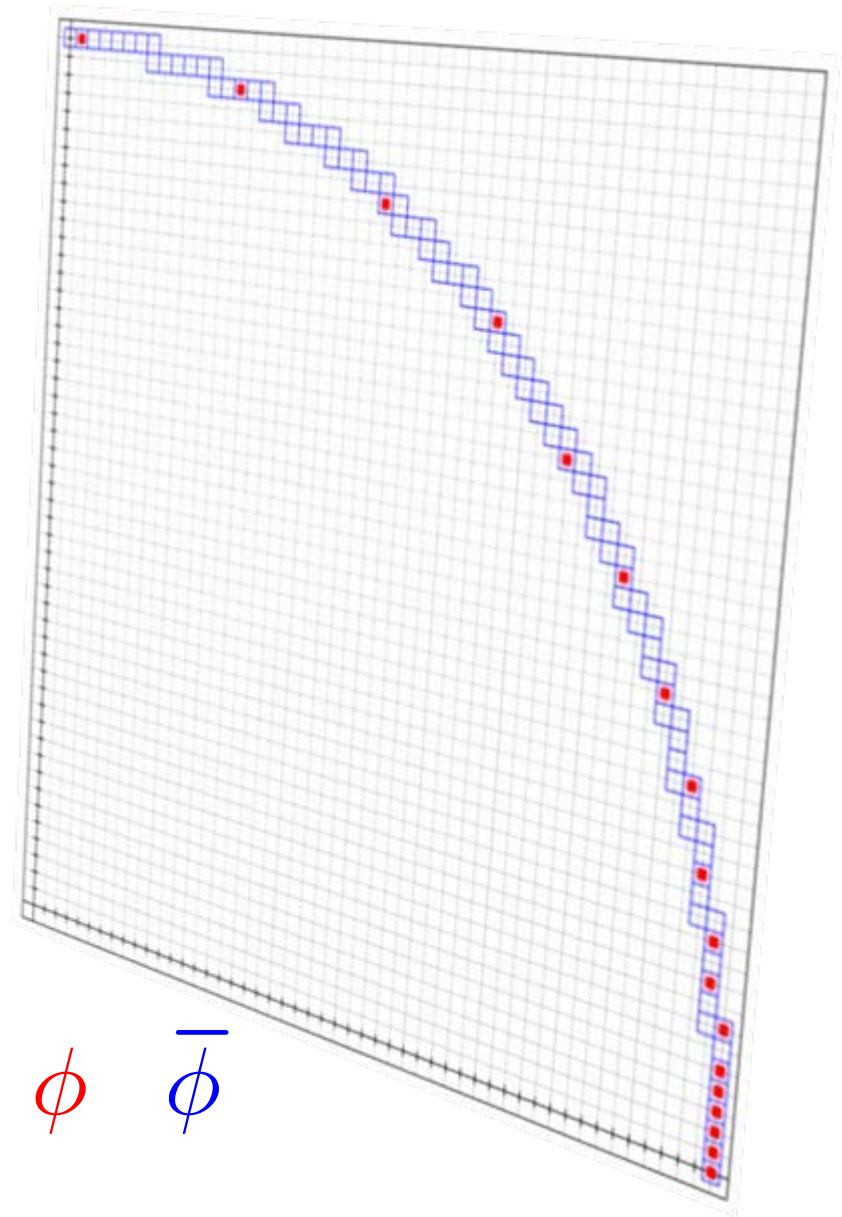
Reparamétrisation pixiligne

- $\phi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$
- $L(u) = \int_0^u \|\phi'(t)\|_1 dt$
- $\bar{\phi} : L([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto \phi(L^{-1}(t))$
- $\|\bar{\phi}'(t)\|_1 = 1$

Illustration

$$\|h\Gamma(a) - \phi(ha)\| \leq \varepsilon$$
$$\Rightarrow \Gamma(a) = \text{round}\left(\frac{\phi(ha)}{h}\right)$$

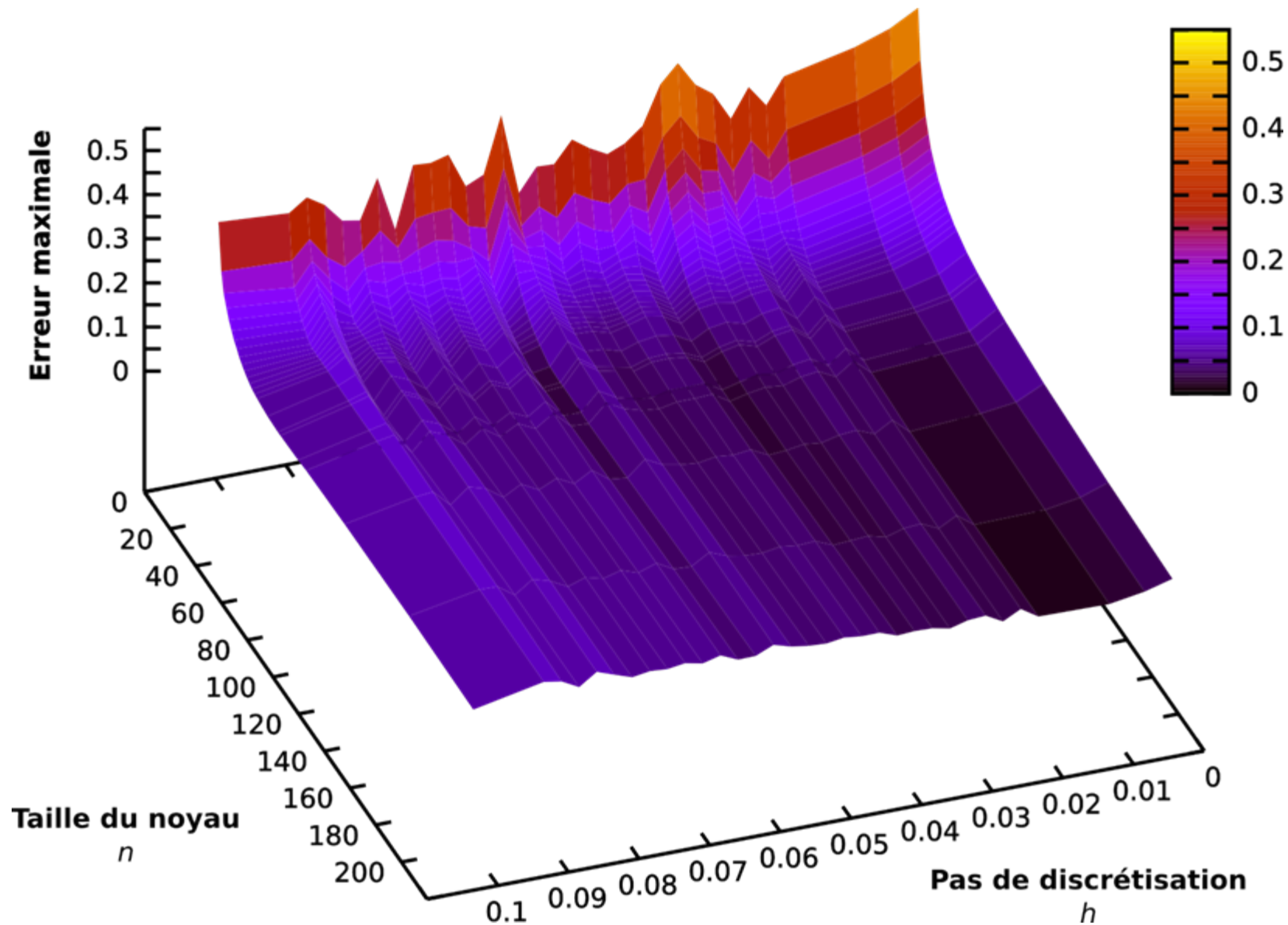
$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t^8) \\ \sin(2\pi t^8) \end{pmatrix}$$



Convergence de la méthode

- Théorème de convergence
- $\bar{\phi}$ n'est que C^3 par morceaux
- C^1 tangentes horizontales et verticales
- Une preuve existe...

Et pourtant...



Conclusion

- Estimateur performant

- Calcul de primitives $\frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} G = F$

- Résolution d'ED $\frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} F - F = 0$

- Analyse dans \mathbb{Z} adaptée à Ψ_{D_n}

Questions

