

De la géométrie algorithmique

au calcul géométrique

l'exemple

de la triangulation de Delaunay

Définition, propriétés, premiers algorithmes



Géométrie algorithmique

Problème géométrique

Analyse des performances

Borne inférieure

Borne supérieure

Complexité asymptotique

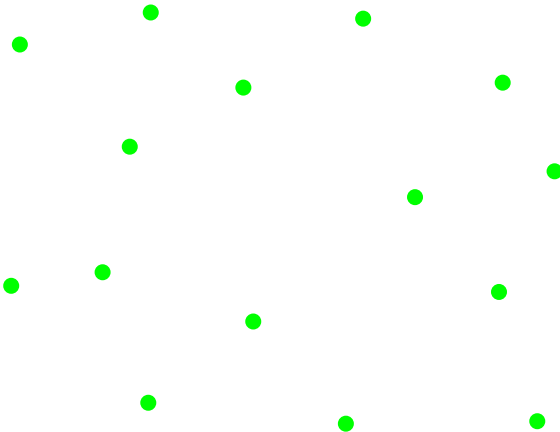
Analyse dans le cas le pire

Analyse en moyenne



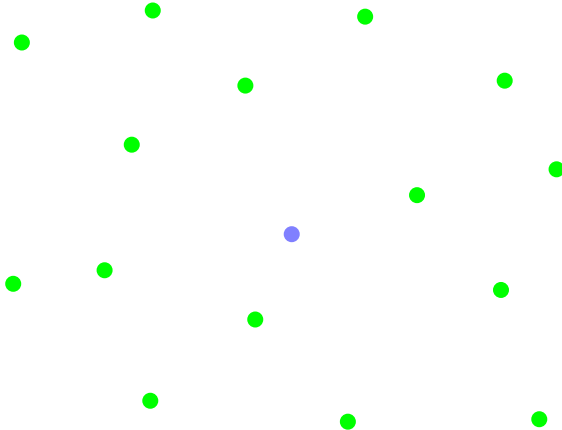
Definition de
la triangulation de Delaunay

L'exemple



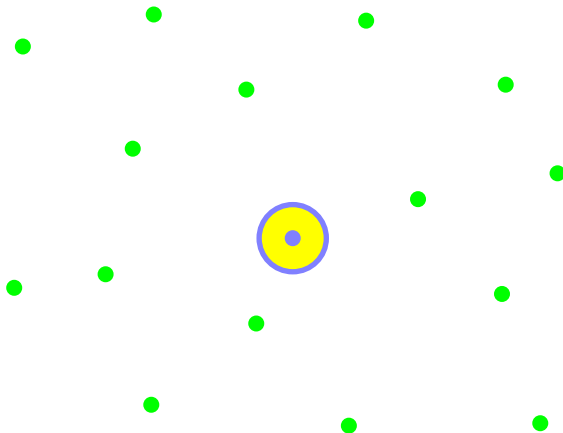
L'exemple

recherche de plus proche voisin



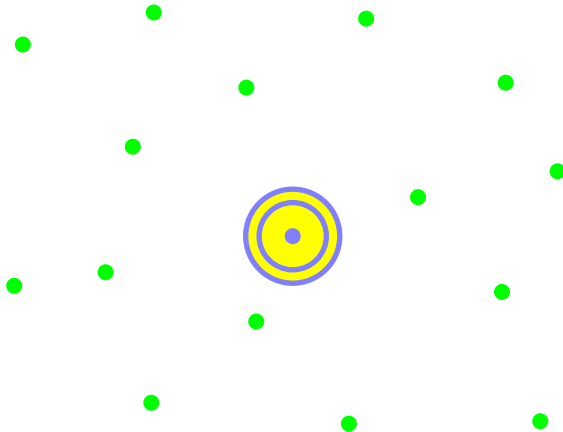
L'exemple

recherche de plus proche voisin



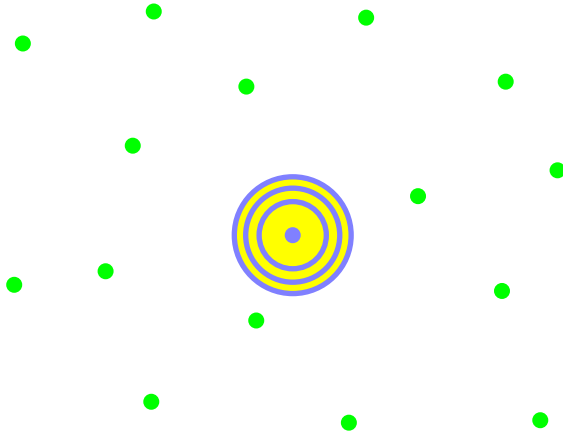
L'exemple

recherche de plus proche voisin



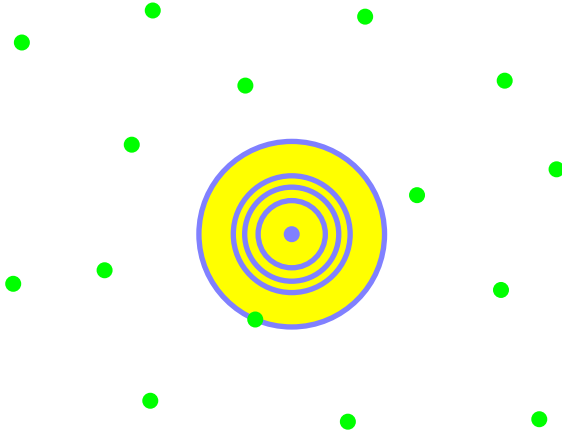
L'exemple

recherche de plus proche voisin



L'exemple

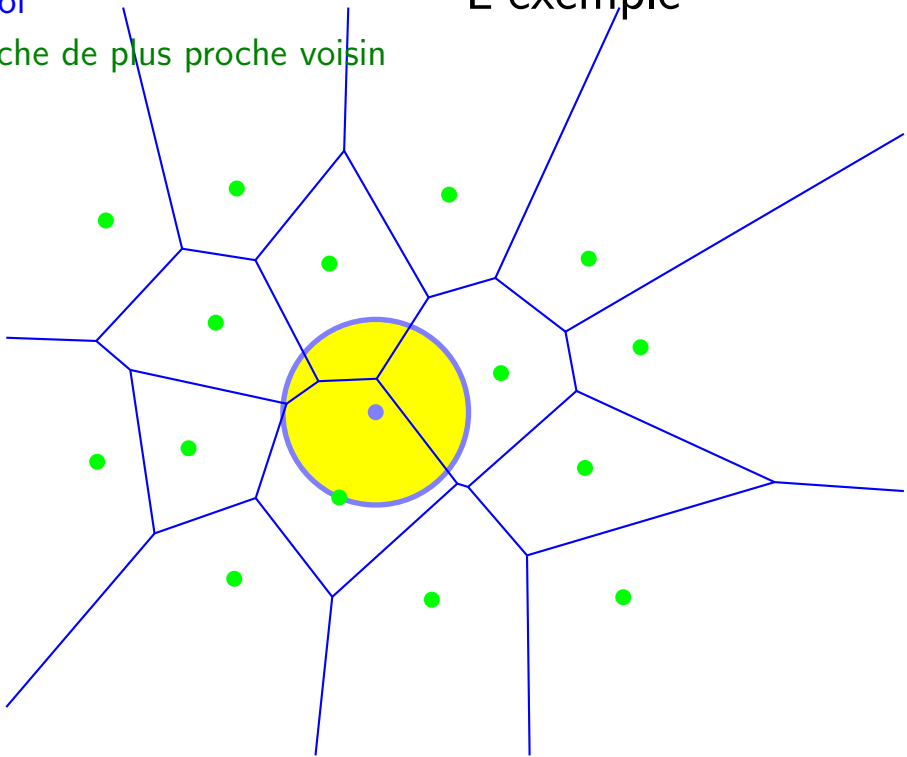
recherche de plus proche voisin



Voronoi

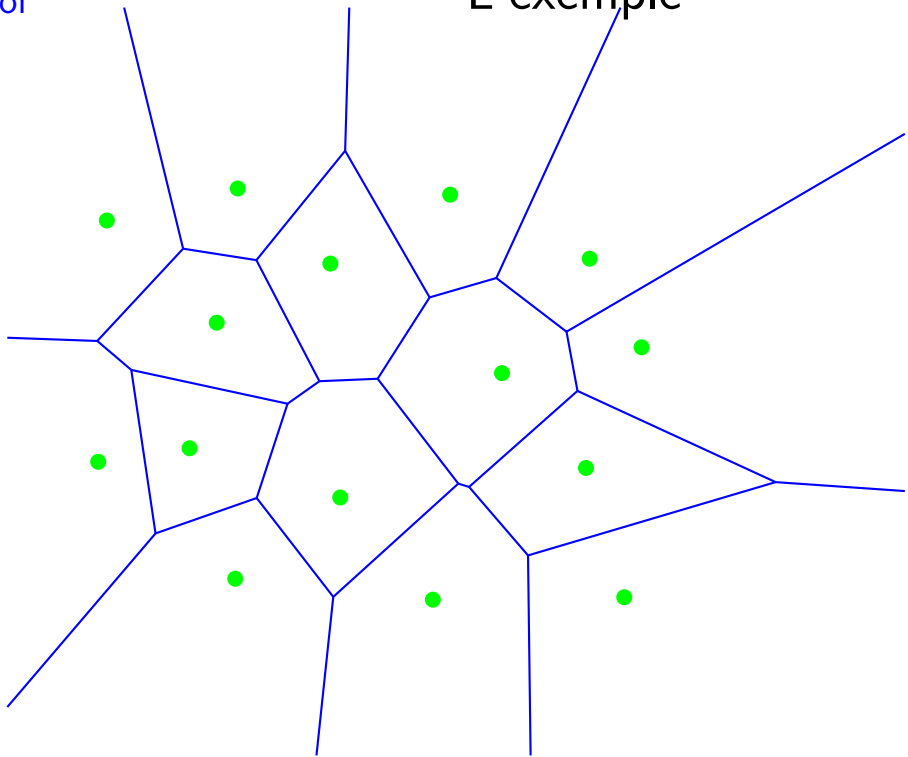
recherche de plus proche voisin

L'exemple



Voronoi

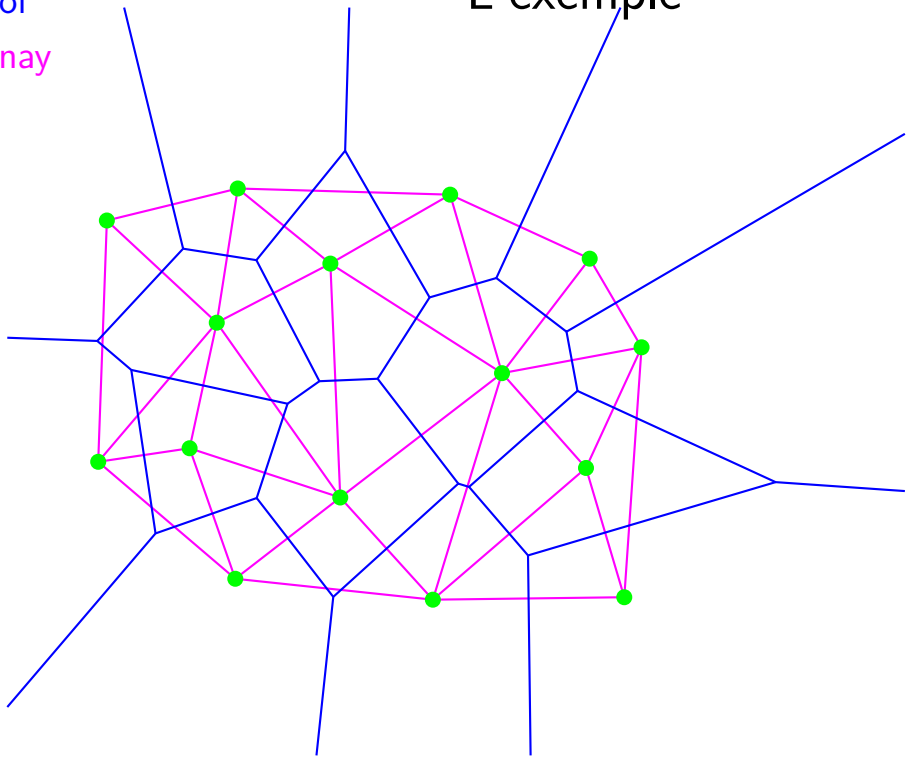
L'exemple



Voronoi

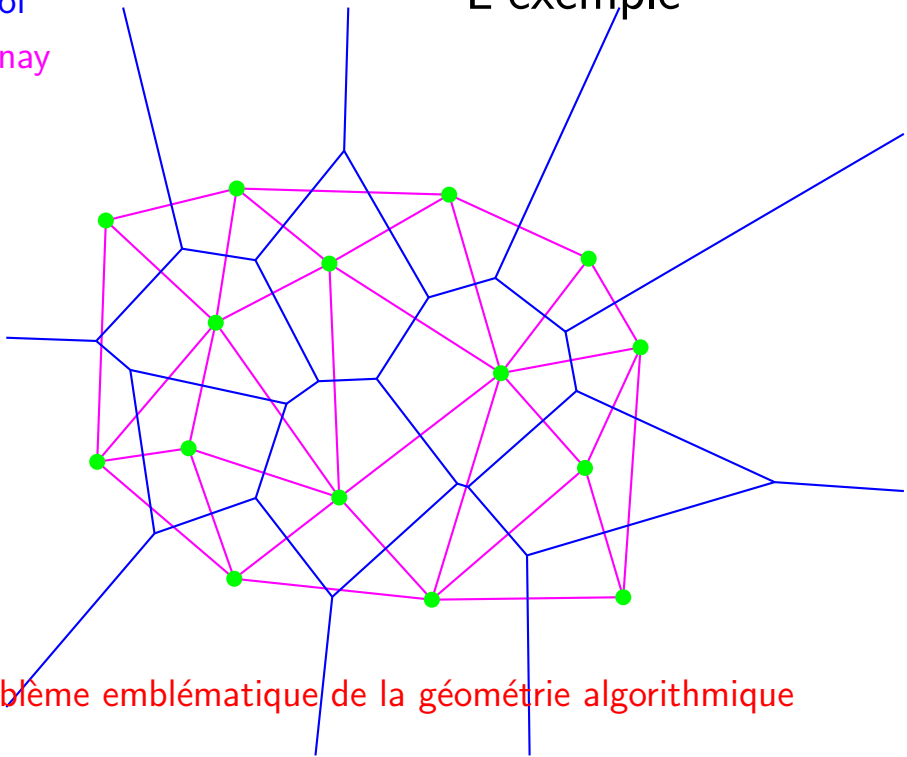
Delaunay

L'exemple



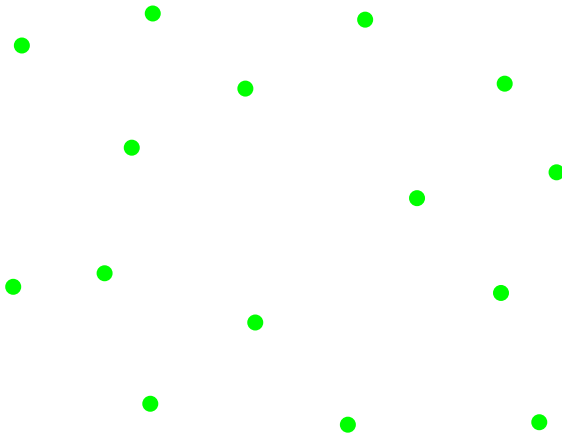
Voronoi
Delaunay

L'exemple



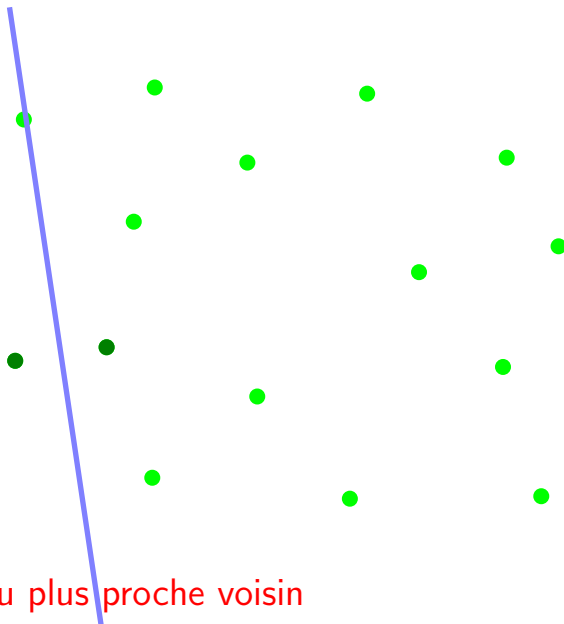
Le problème emblématique de la géométrie algorithmique

Voronoi



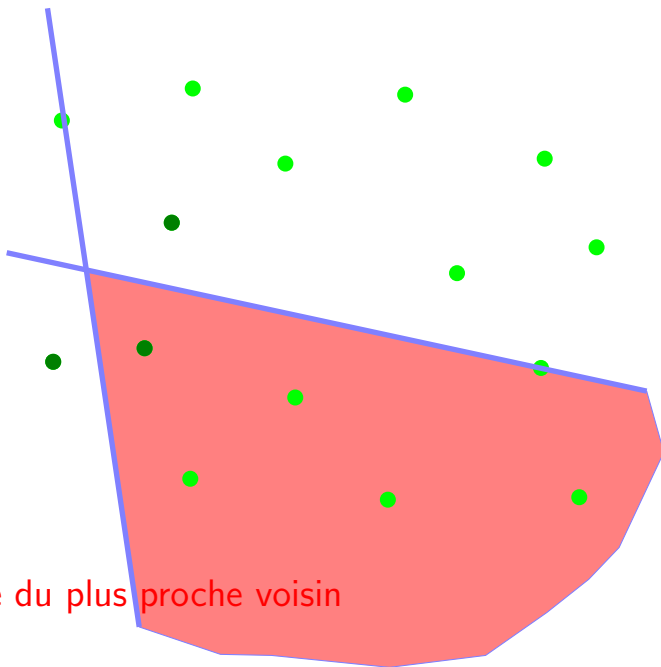
Problème du plus proche voisin

Voronoi



Problème du plus proche voisin

Voronoi

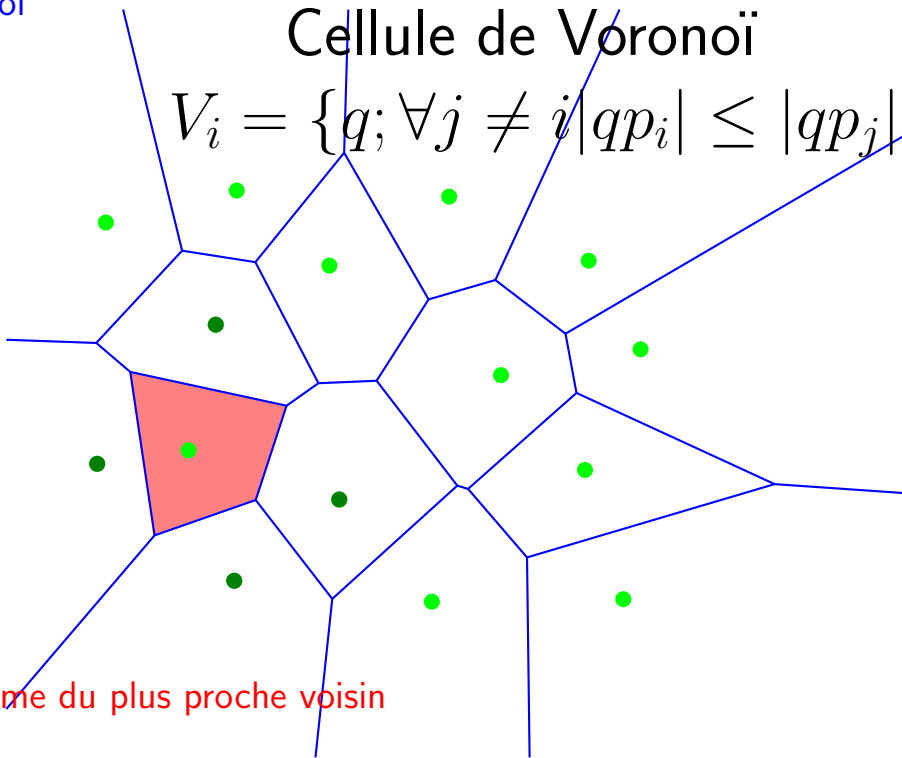


Problème du plus proche voisin

Voronoi

Cellule de Voronoï

$$V_i = \{q; \forall j \neq i |qp_i| \leq |qp_j|\}$$

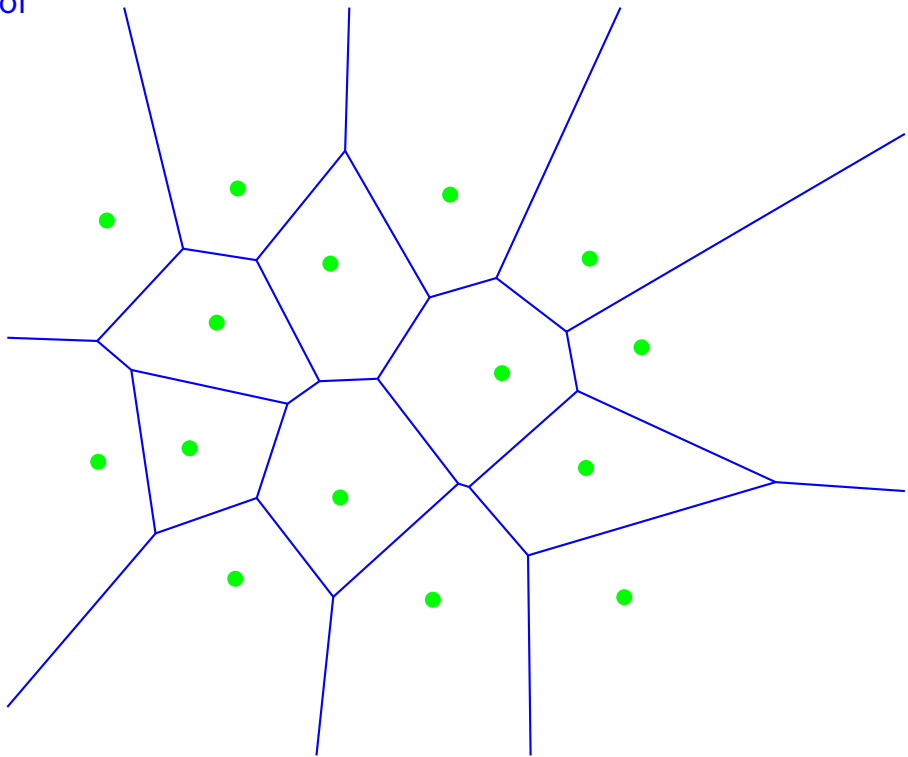


Problème du plus proche voisin

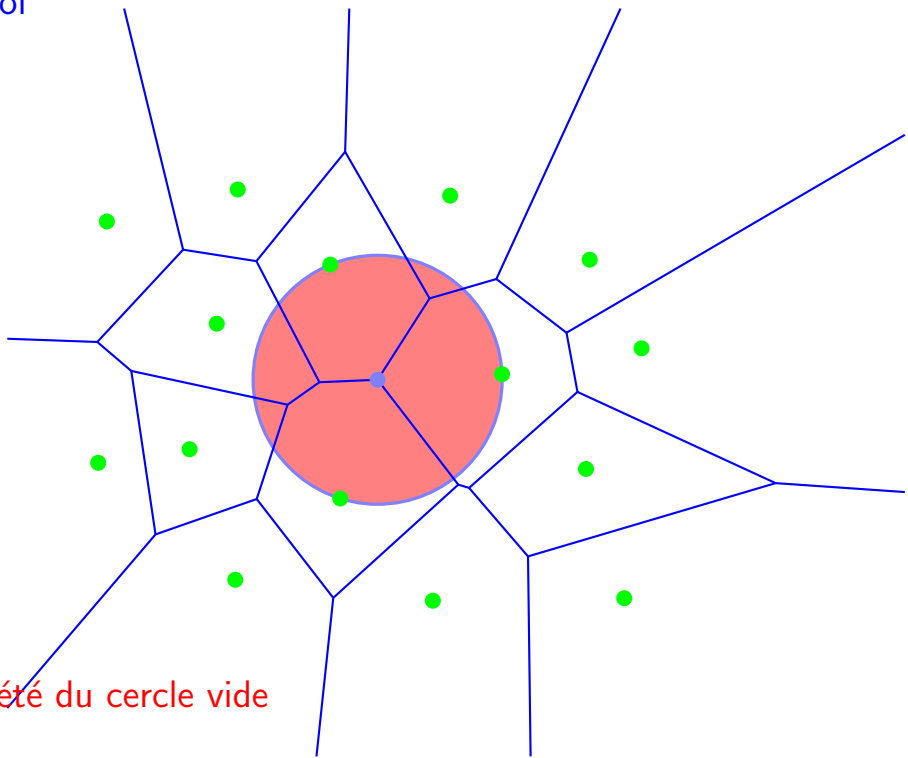


LA propriété de
la triangulation de Delaunay

Voronoi

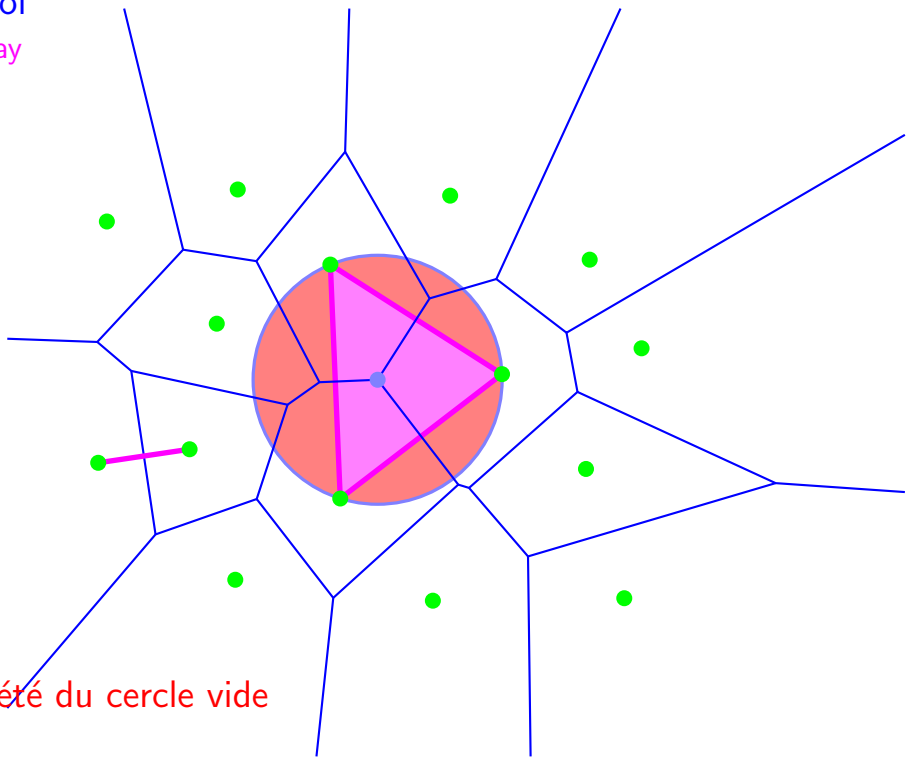


Voronoi



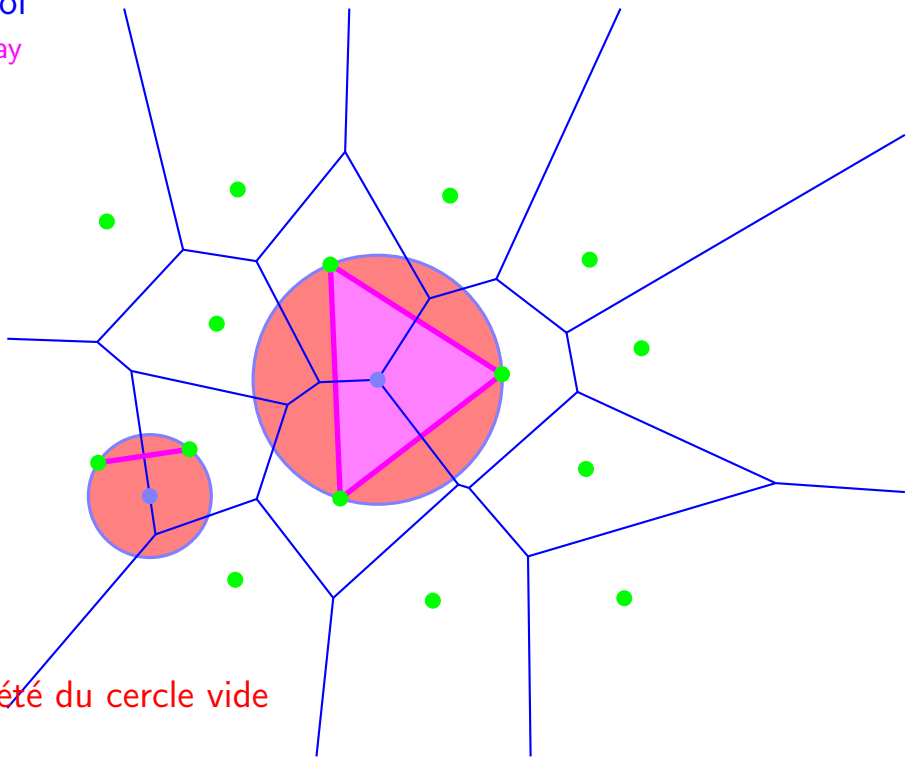
Propriété du cercle vide

Voronoi
Delaunay




Propriété du cercle vide

Voronoi
Delaunay



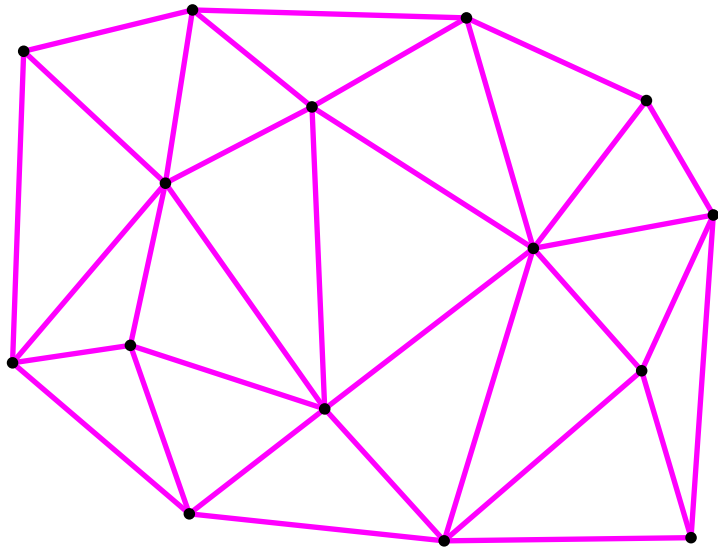
Propriété du cercle vide



Quelques applications de
la triangulation de Delaunay

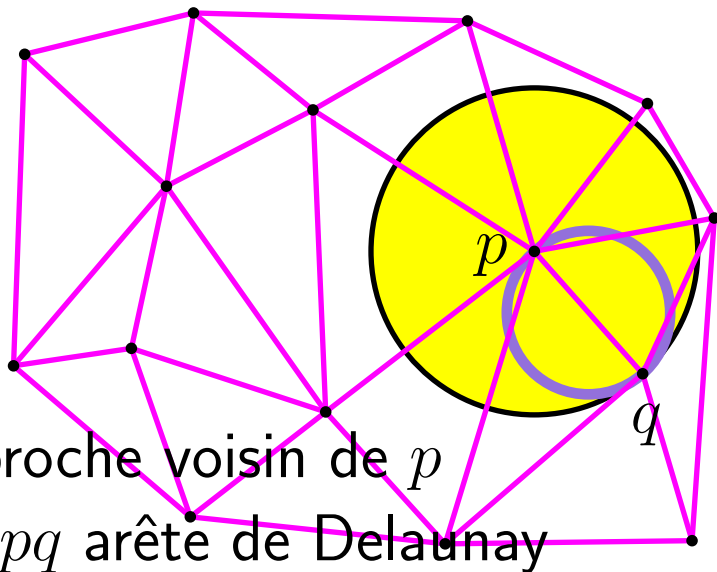
Applications “théoriques”

graphe des plus proche voisins



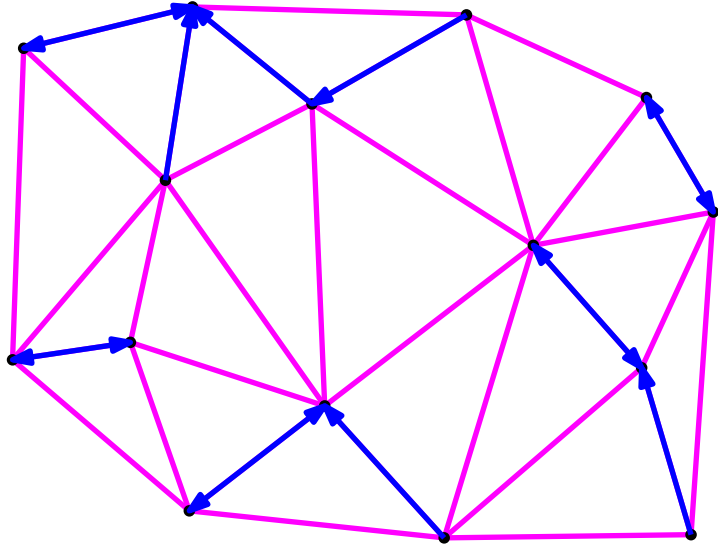
Applications "théoriques"

graphe des plus proche voisins



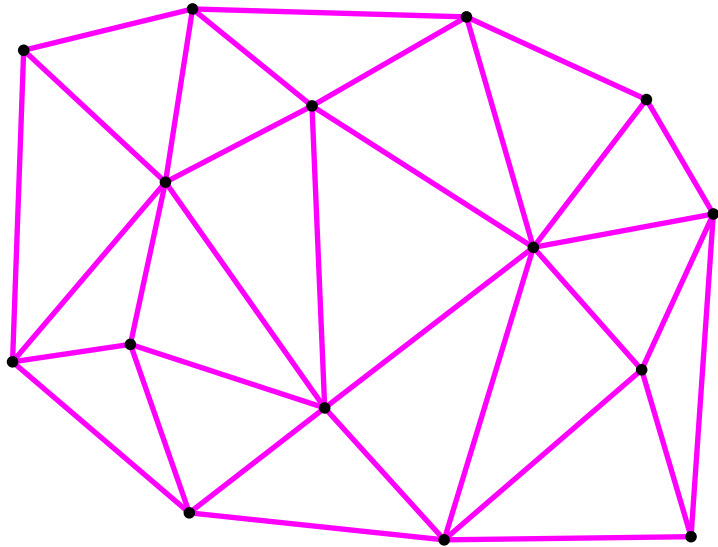
Applications “théoriques”

graphe des plus proche voisins



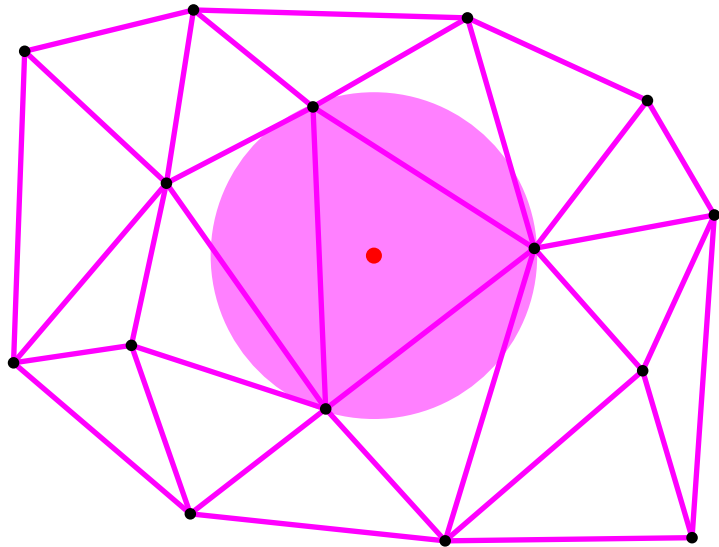
Applications "théoriques"

plus grand cercle vide



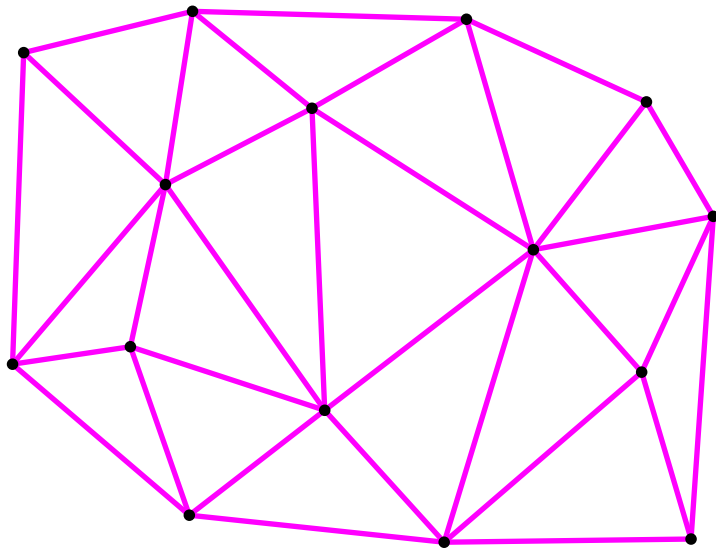
Applications "théoriques"

plus grand cercle vide



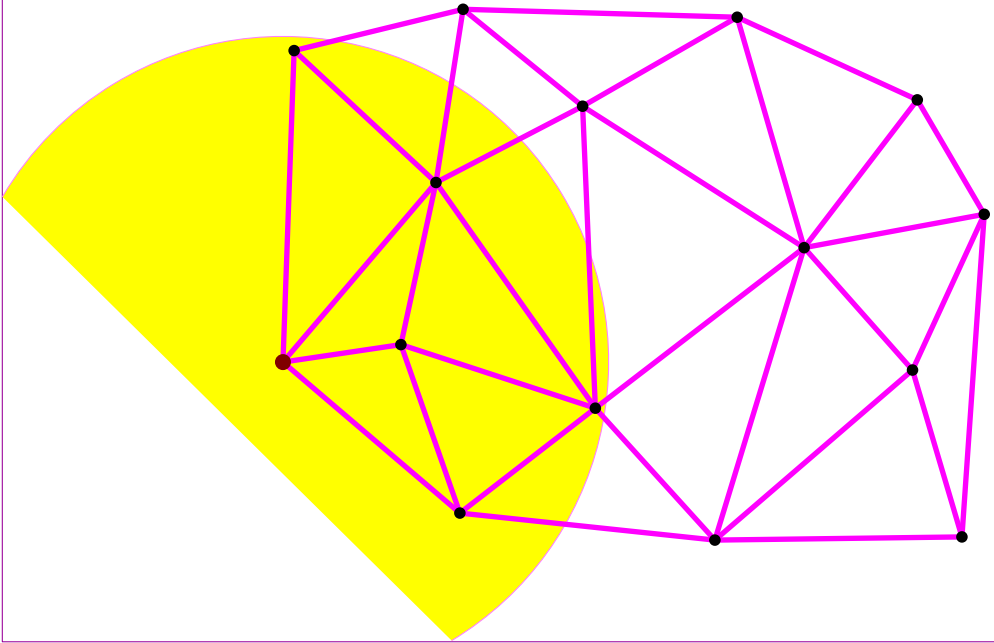
Applications “théoriques”

Recherche à rayon fixé



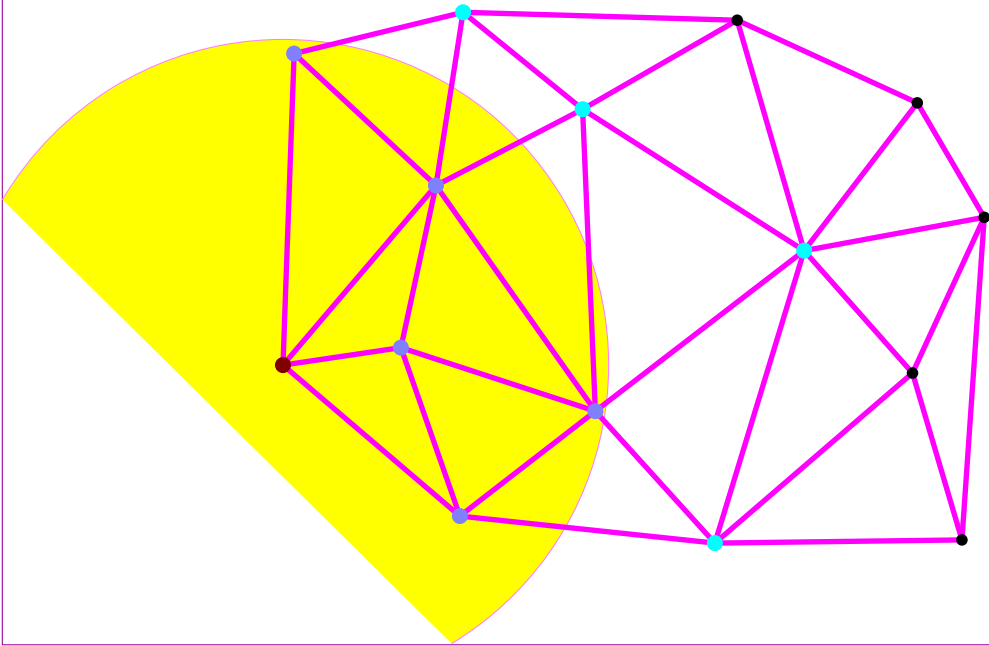
Applications “théoriques”

Recherche à rayon fixé



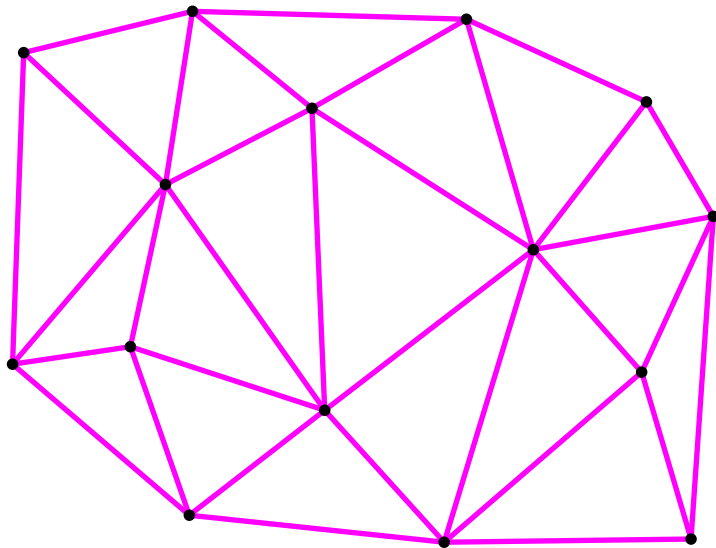
Applications “théoriques”

Recherche à rayon fixé



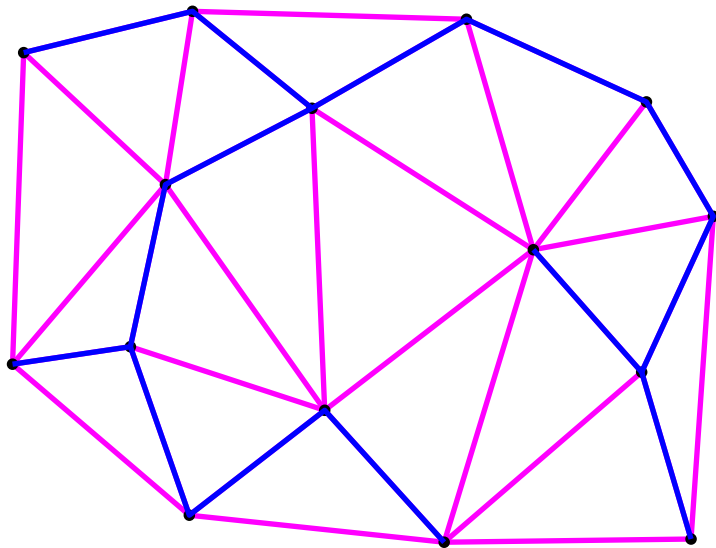
Applications "théoriques"

Arbre couvrant de longueur minimale



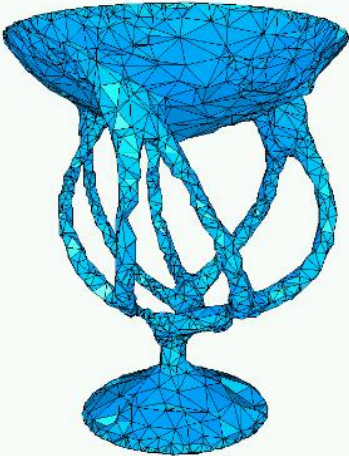
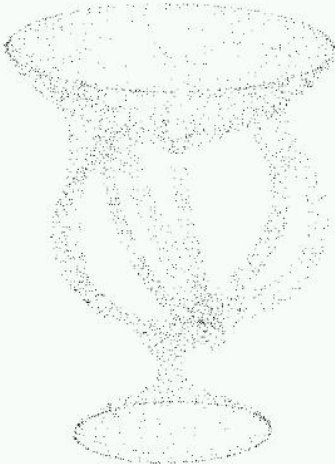
Applications "théoriques"

Arbre couvrant de longueur minimale



Applications

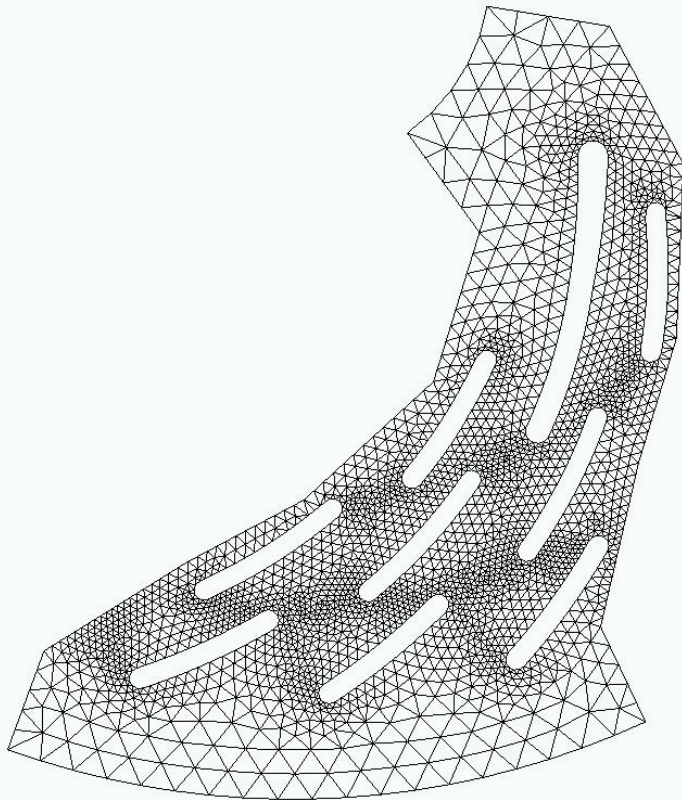
Reconstruction



Applications

Reconstruction

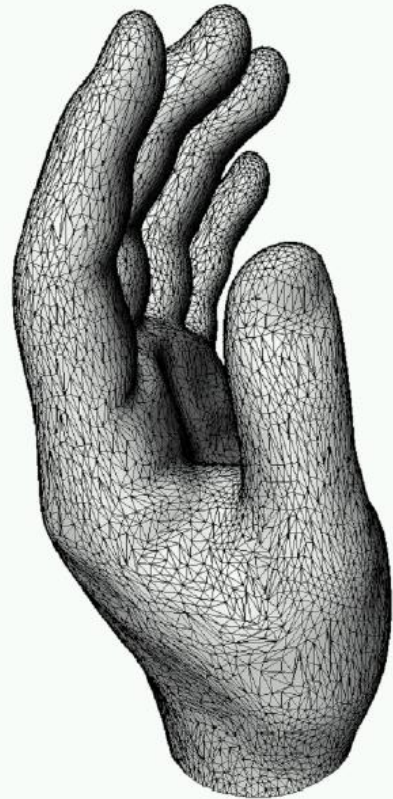
Maillage



Applications

Reconstruction

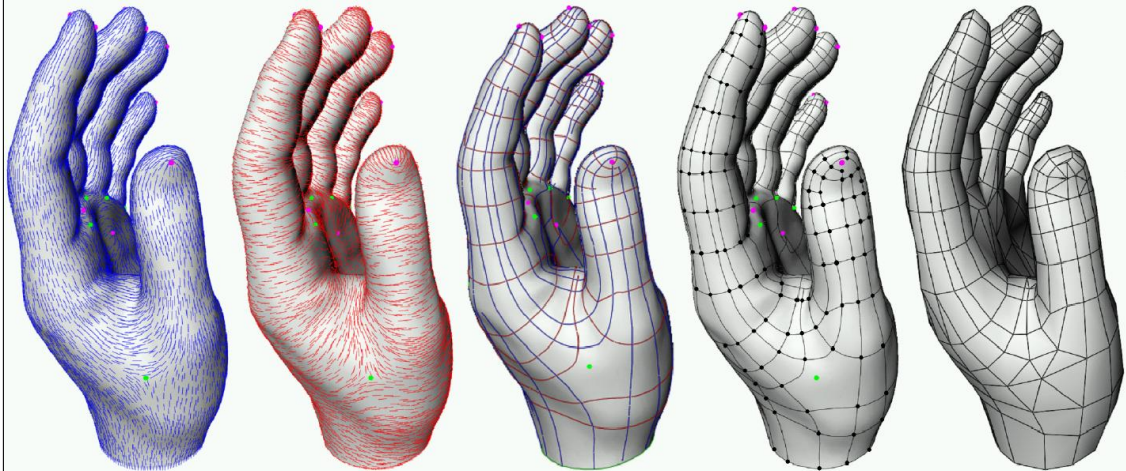
Maillage / Remaillage



Applications

Reconstruction

Maillage / Remaillage

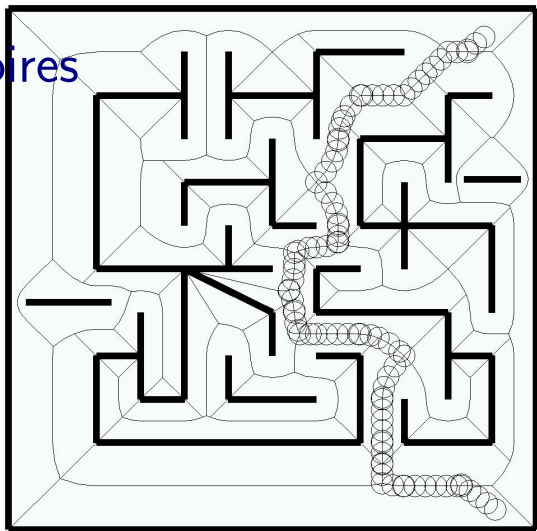


Applications

Reconstruction

Maillage / Remaillage

Plainification de trajectoires





Propriétés de
la triangulation de Delaunay

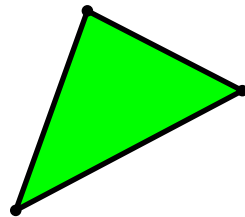
Relation d'Euler

c : nombre de cellules (inclus ∞)

a : nombre d'arêtes

n : nombre de sommets

$$n - a + s = 2$$



Relation d'Euler

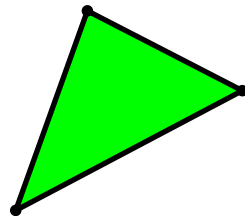
c : nombre de cellules (inclus ∞)

a : nombre d'arêtes

n : nombre de sommets

$$n - a + s = 2$$

$$1 - 3 + 3 = 2$$



Relation d'Euler

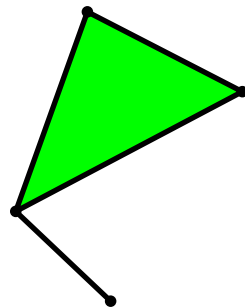
c : nombre de cellules (inclus ∞)

a : nombre d'arêtes

n : nombre de sommets

$$n - a + s = 2$$

$$0 - 1 + 1 = 0$$



Relation d'Euler

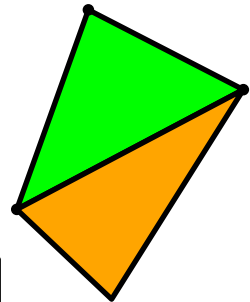
c : nombre de cellules (inclus ∞)

a : nombre d'arêtes

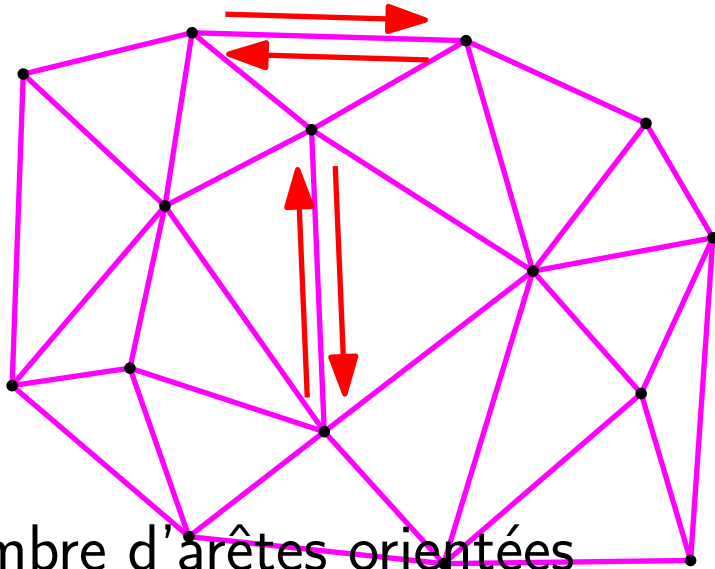
n : nombre de sommets

$$n - a + s = 2$$

$$1 - 1 + 0 = 0$$



k : taille cellule ∞



Nombre d'arêtes orientées
dans une triangulation

$$2a = 3c + k$$

Relation d'Euler

$$c - a + n = t + 1 - a + n = 2$$

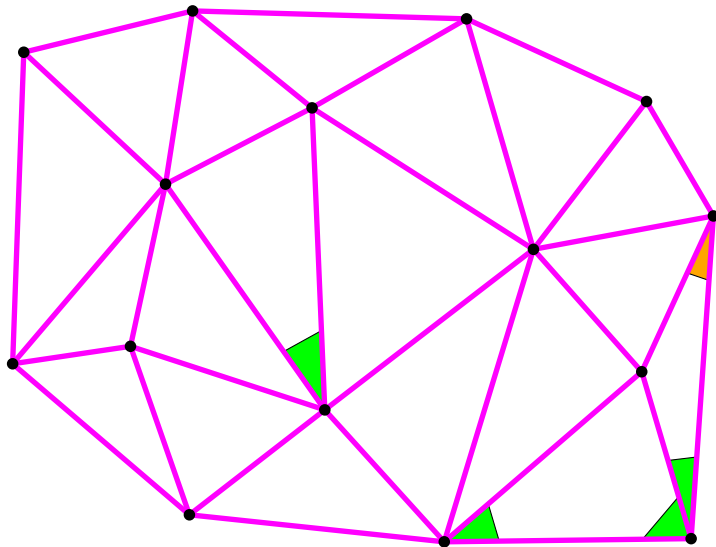
Triangulation

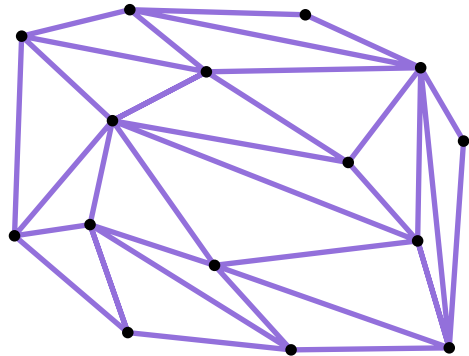
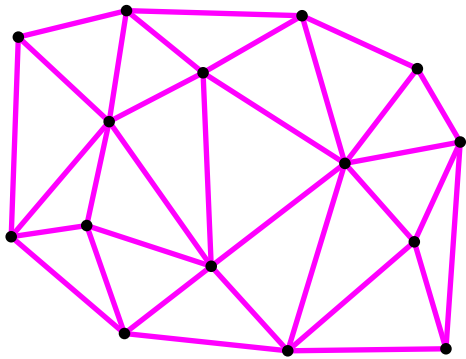
$$2a = 3t + k$$

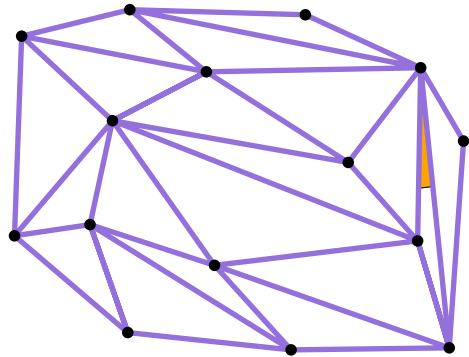
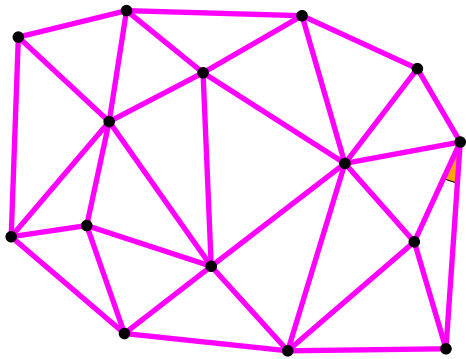
$$t = 2n - 2 - k$$

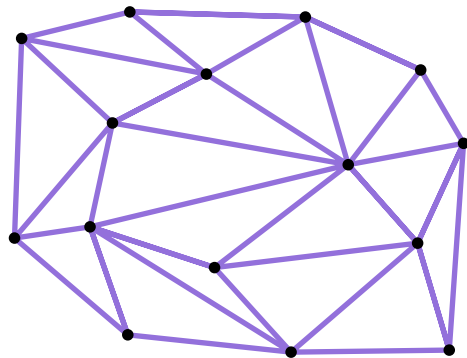
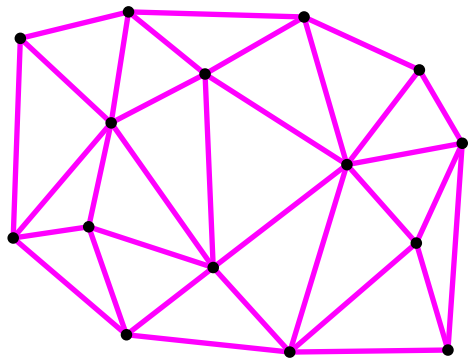
$$a = 3n - 3 - k$$

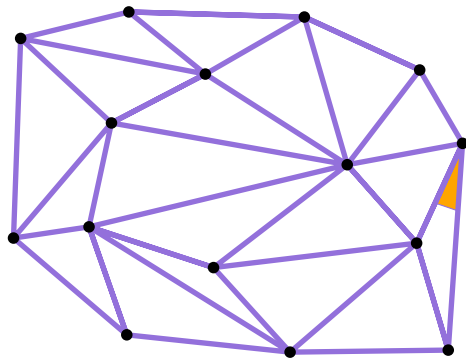
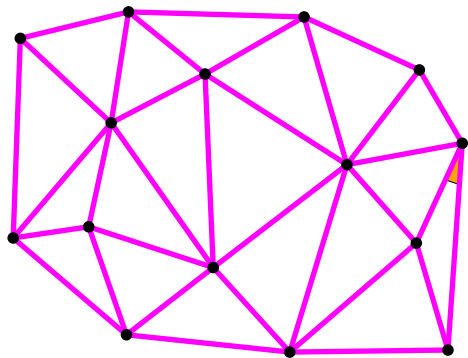
Propriété : le plus petit angle est maximal

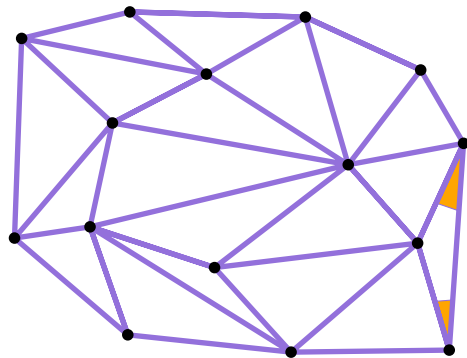
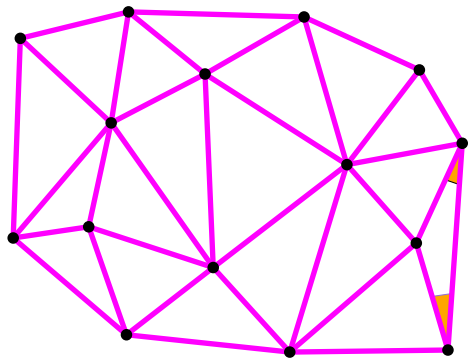


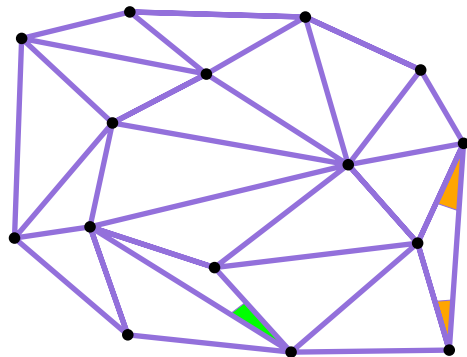
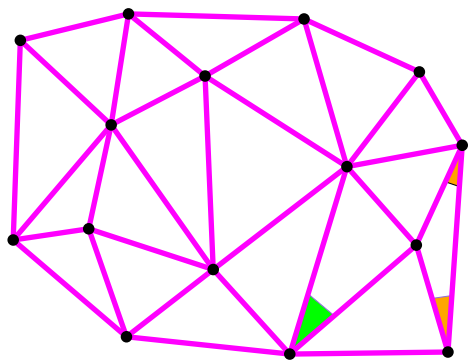






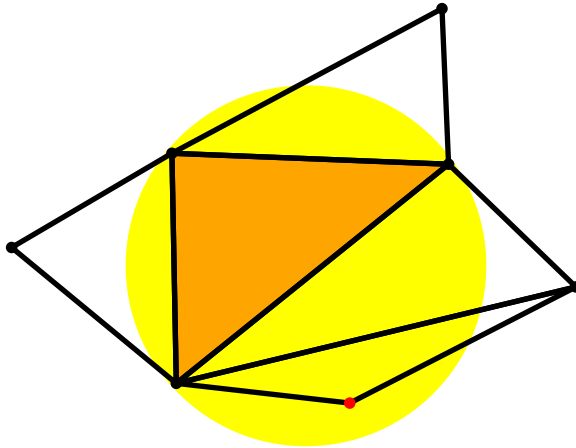






Maximise dans l'ordre lexicographique

Optimalité locale vs globale

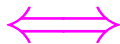


localement
Delaunay

mais pas globalement
Delaunay

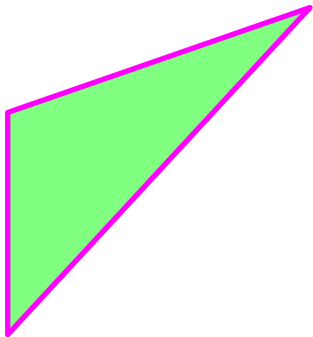
Théorème

Localement Delaunay partout



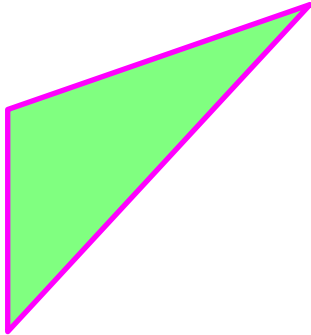
Globalement Delaunay

Démonstration:



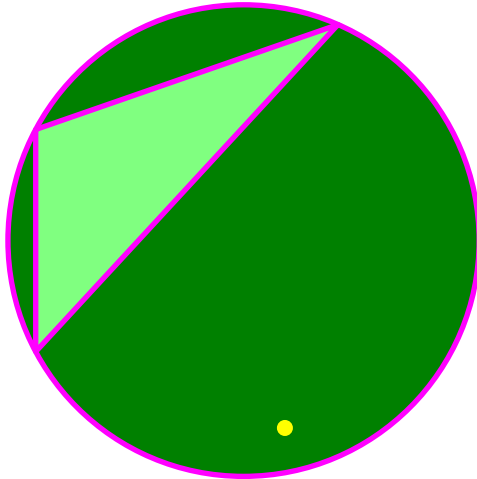
Démonstration:

Soit t localement mais pas globalement Delaunay



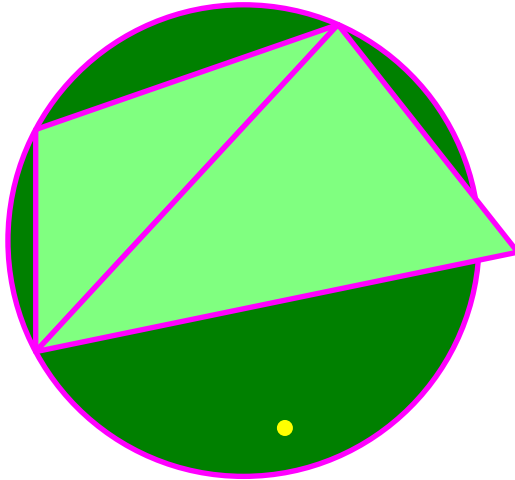
Démonstration:

Soit t localement mais pas globalement Delaunay



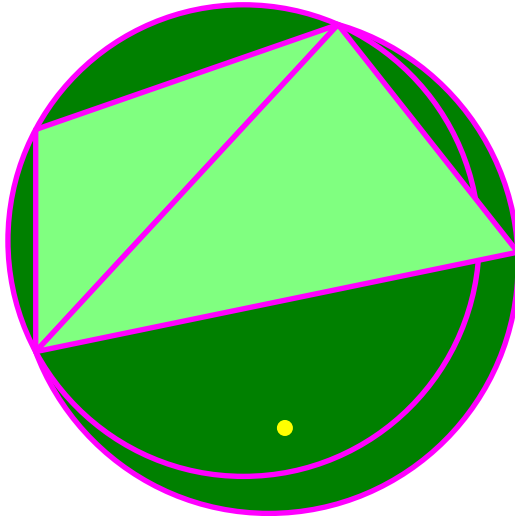
Démonstration:

Soit t localement mais pas globalement Delaunay



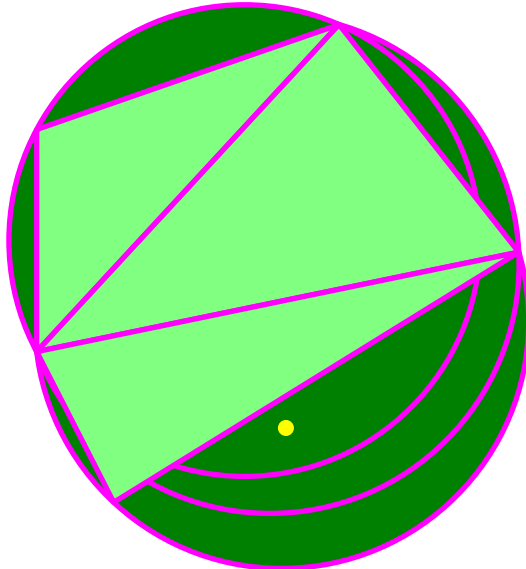
Démonstration:

Soit t localement mais pas globalement Delaunay



Démonstration:

Soit t localement mais pas globalement Delaunay



Comme le nombre de points est fini

Optimalité locale et plus petit angle

Cas de 4 points

Optimalité locale et plus petit angle

Cas de 4 points

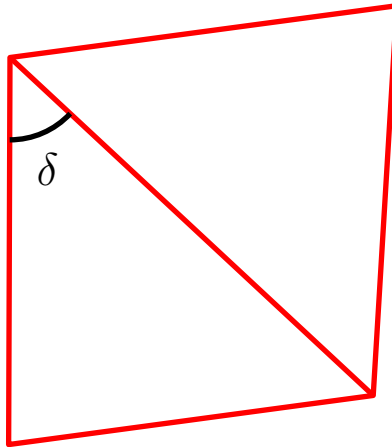
Lemme:

Pour 4 points en position convexe

Delaunay \iff maximise le plus petit angle

Optimalité locale et plus petit angle

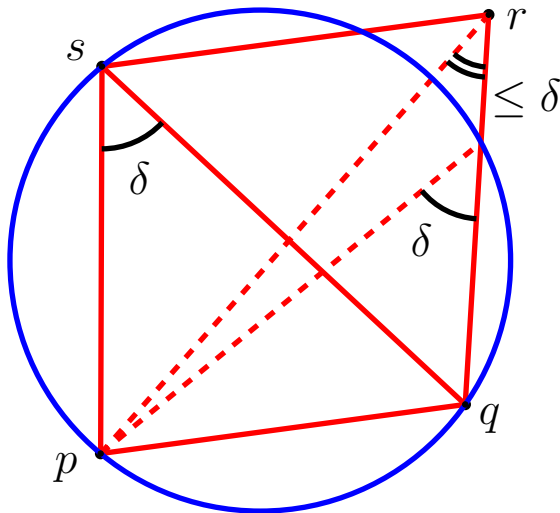
Cas de 4 points



δ le plus petit angle

Optimalité locale et plus petit angle

Cas de 4 points



Optimalité locale et plus petit angle

Théorème

Delaunay \iff maximise le plus petit angle

Démonstration:

Optimalité locale et plus petit angle

Théorème

Delaunay \iff maximise le plus petit angle

Démonstration:

Triangulation max pour ordre des angles

Optimalité locale et plus petit angle

Théorème

Delaunay \iff maximise le plus petit angle

Démonstration:

Triangulation max pour ordre des angles

\implies Max dans chaque quadrilatère

Optimalité locale et plus petit angle

Théorème

Delaunay \iff maximise le plus petit angle

Démonstration:

Triangulation max pour ordre des angles

\implies Max dans chaque quadrilatère

\implies localement Delaunay

Optimalité locale et plus petit angle

Théorème

Delaunay \iff maximise le plus petit angle

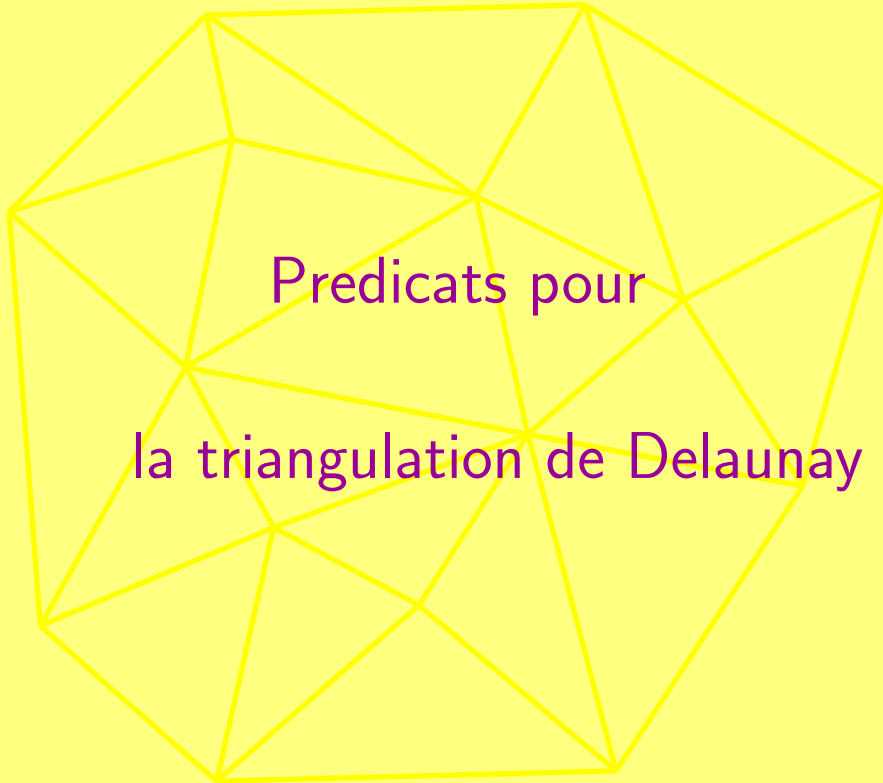
Démonstration:

Triangulation max pour ordre des angles

\implies Max dans chaque quadrilatère

\implies localement Delaunay

\implies globalement Delaunay



Predicats pour

la triangulation de Delaunay

Prédicats

Algorithmes géométriques

Prendre des décisions

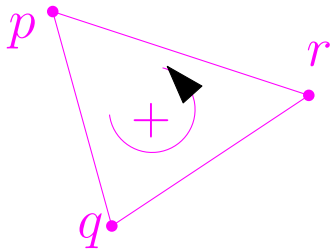
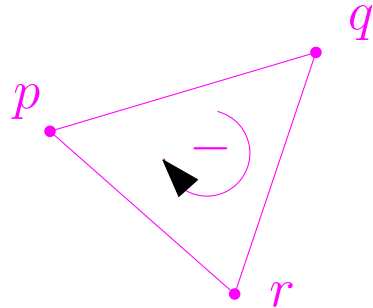
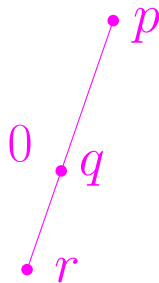
repose sur des prédicats géométriques

Entrée de taille constante

Sortie discrète (signe)

Prédicats

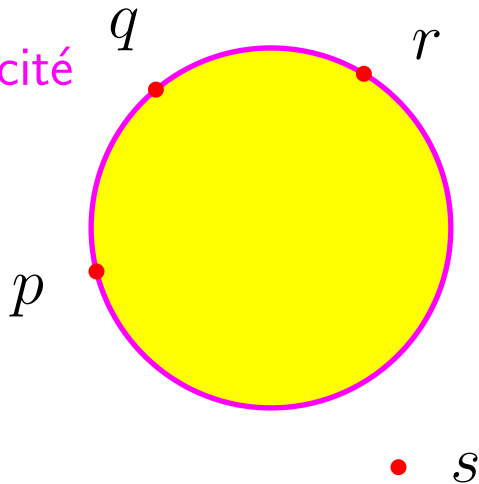
Prédicat d'orientation



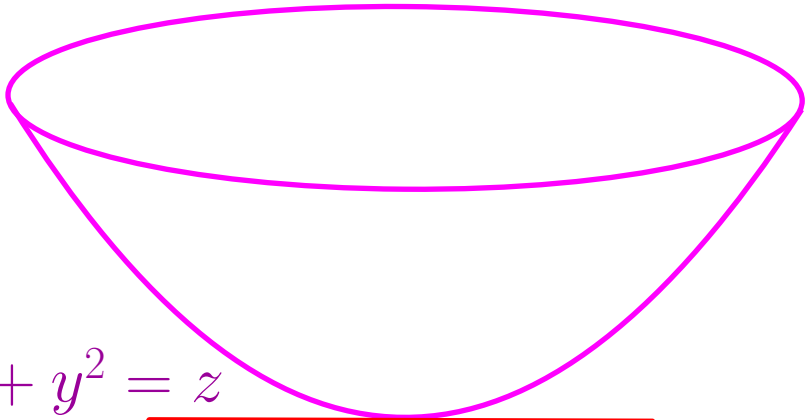
$$\begin{vmatrix} x_q - x_p & x_r - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p \end{vmatrix}$$

Prédicats

Prédicat de cocyclicité

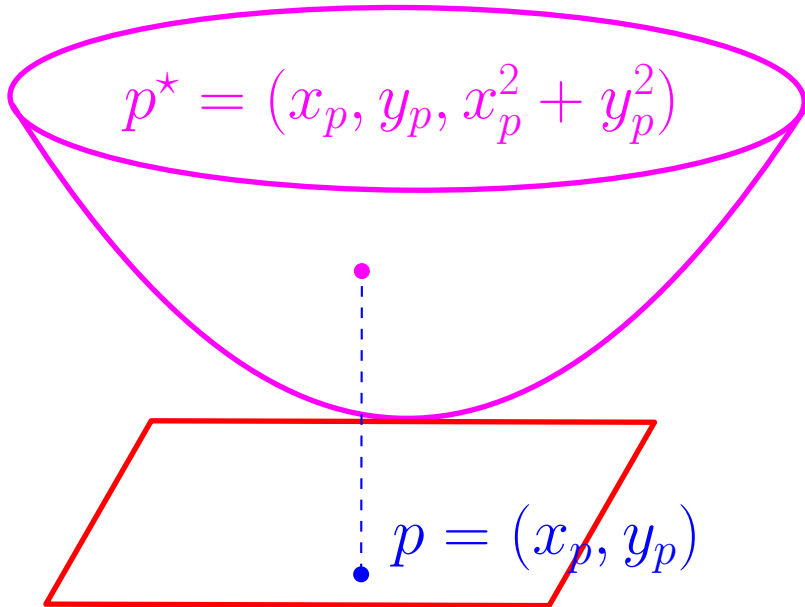


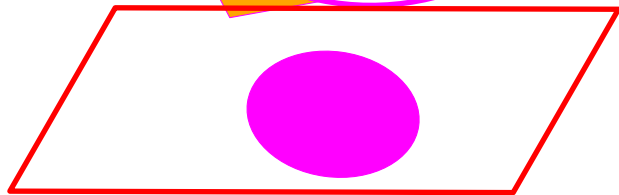
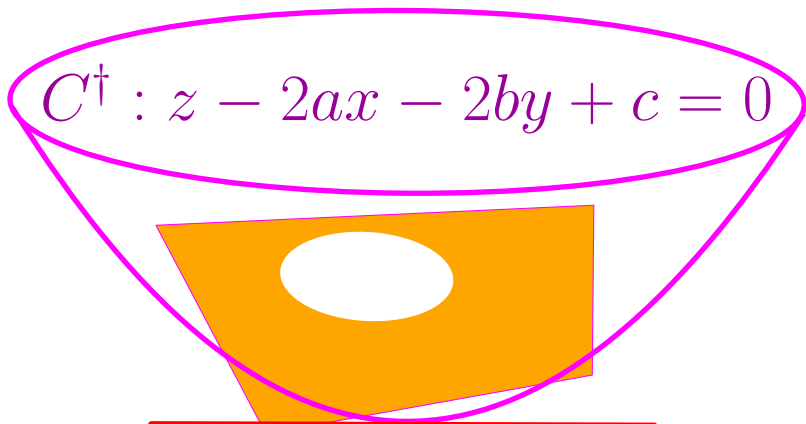
$$\left| \begin{array}{ccc} x_q - x_p & x_r - x_p & x_s - x_p \\ y_q - y_p & y_r - y_p & y_s - y_p \\ (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 & (x_r - x_p)^2 + (y_r - y_p)^2 & (x_s - x_p)^2 + (y_s - y_p)^2 \end{array} \right|$$



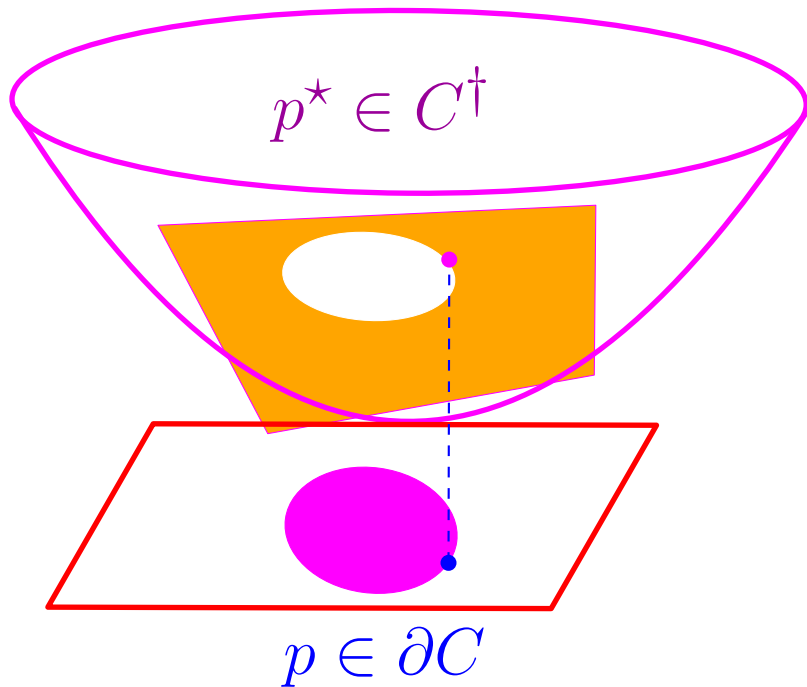
$$\Pi : x^2 + y^2 = z$$

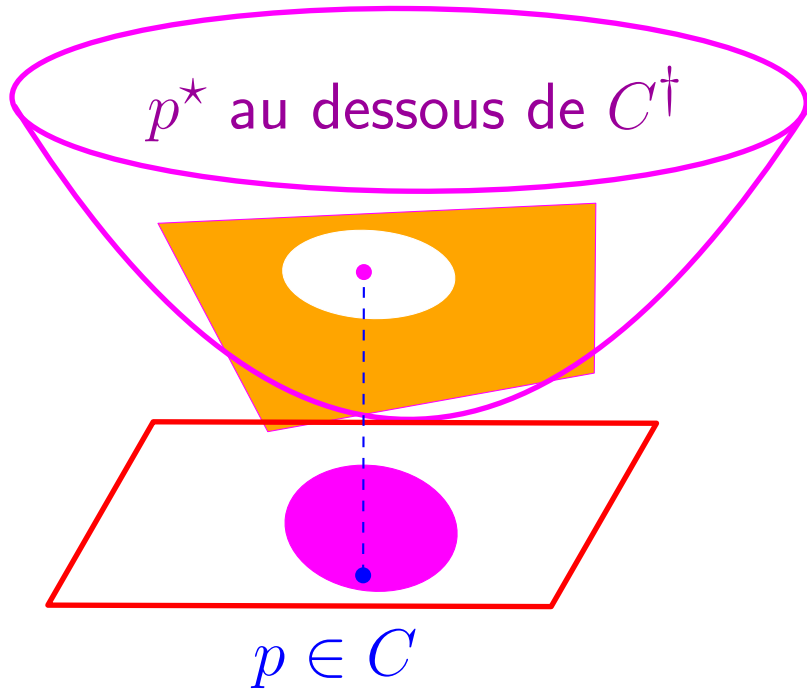


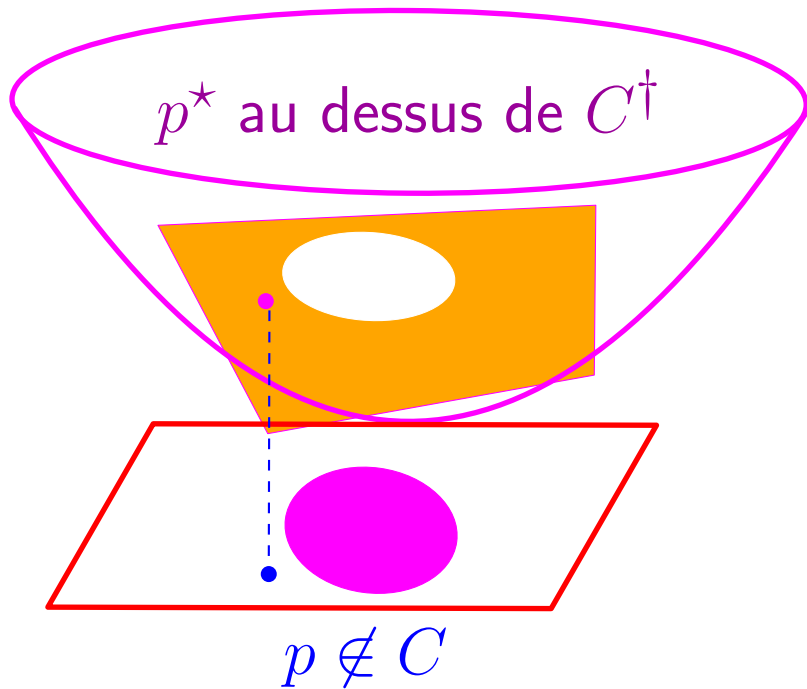




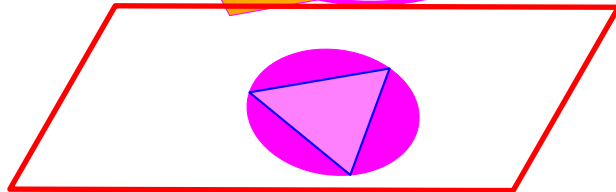
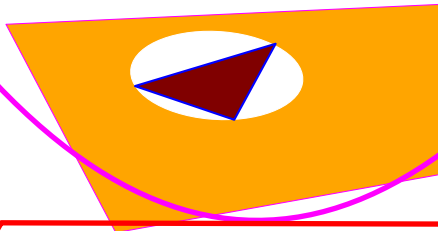
$$C : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$







Prédicat d'orientation 3D



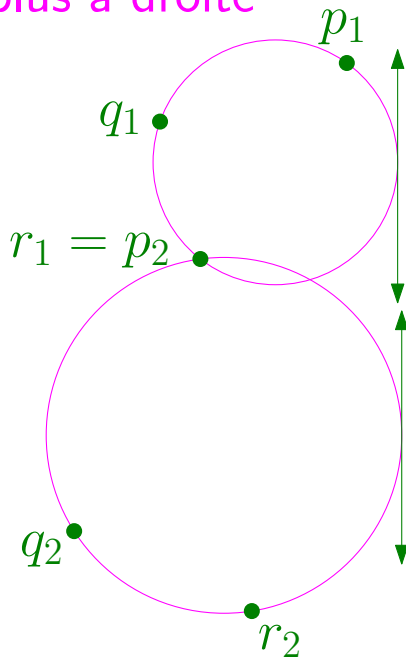
Prédicat de cocyclicité

Prédicats

Prédicat : cercle le plus à droite

6 points

polynôme de degré 24



Prédicats

Problèmes de robustesse

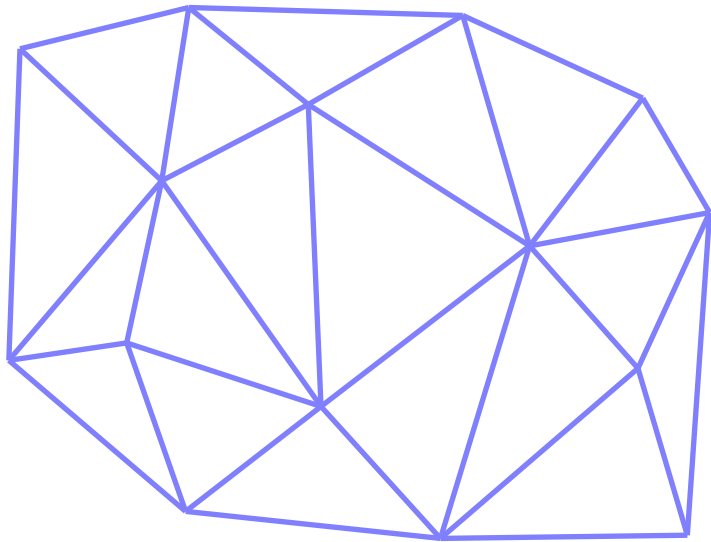
Arithmétique arrondie

—► Pas de cohérence entre les résultats arrondis

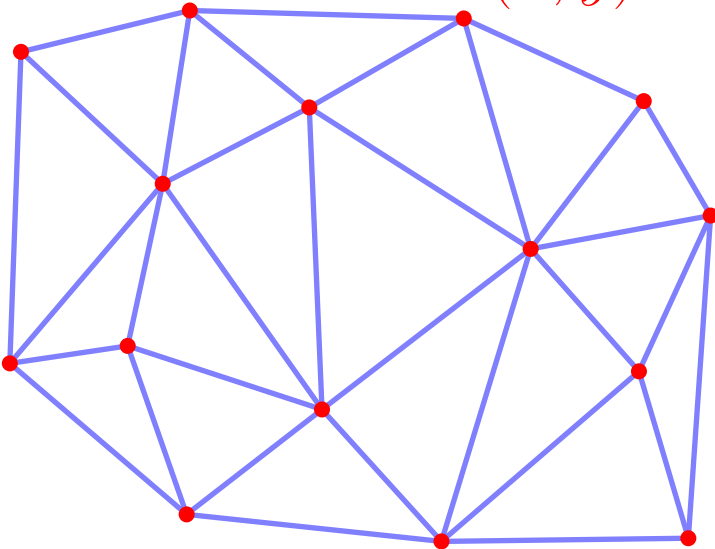
Paradigme du calcul exact



Structures de données pour
la triangulation (de Delaunay)

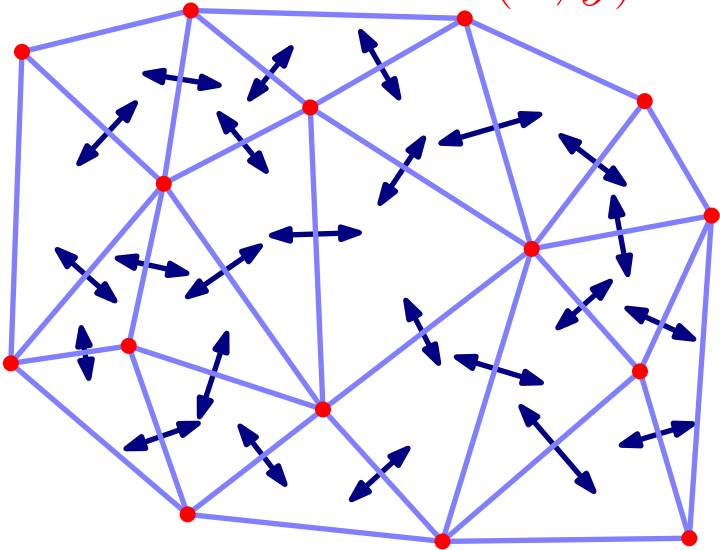


(x, y)



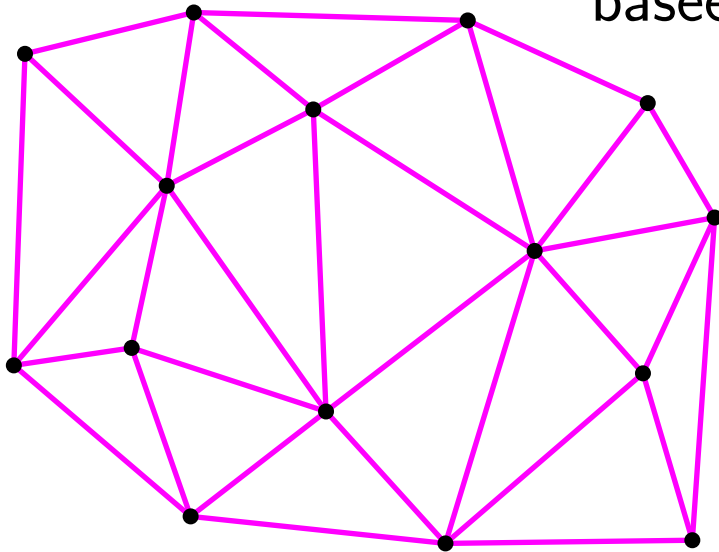
Géométrie

(x, y)

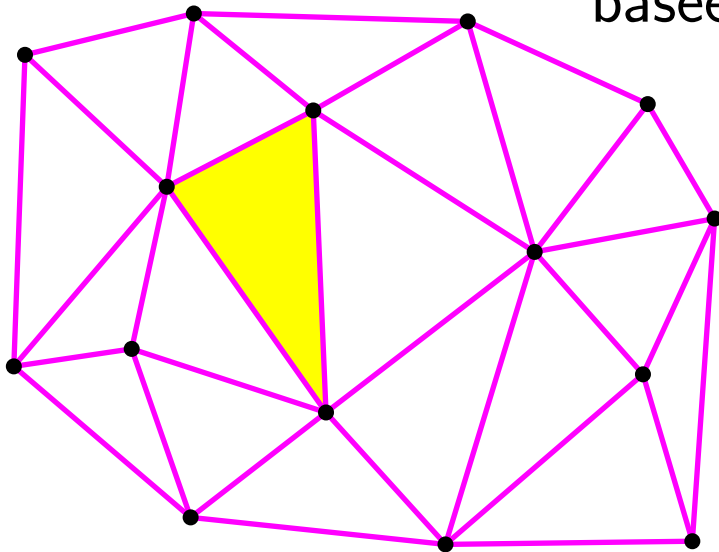


Géométrie
connectivité

Représentation basée triangles

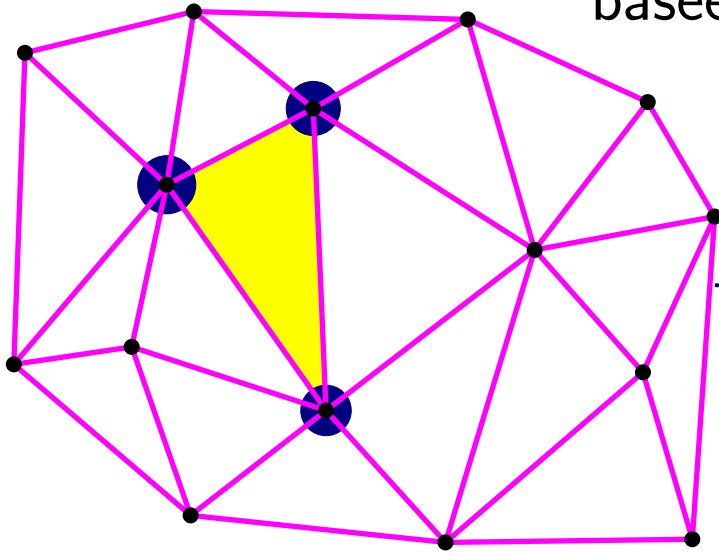


Représentation basée triangles



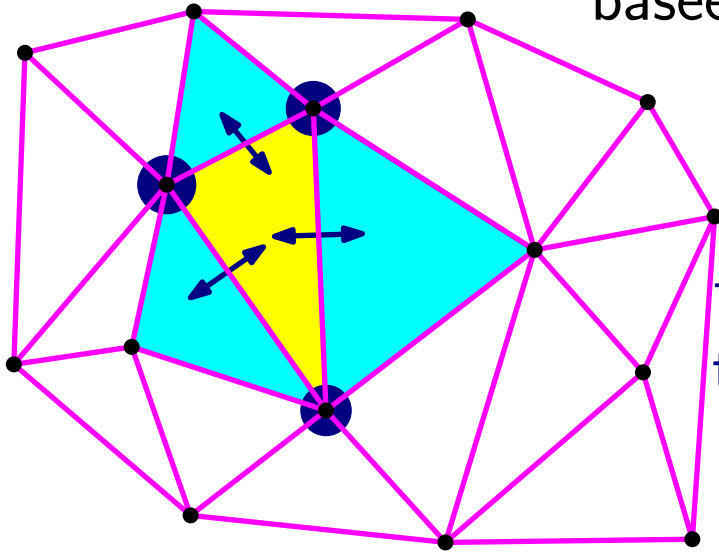
triangle :

Représentation basée triangles



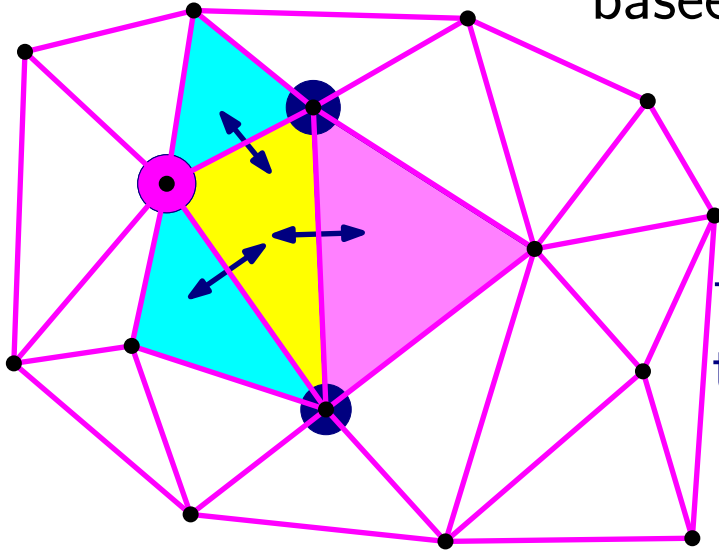
triangle :
trois sommets

Représentation basée triangles



triangle :
trois sommets
trois voisins

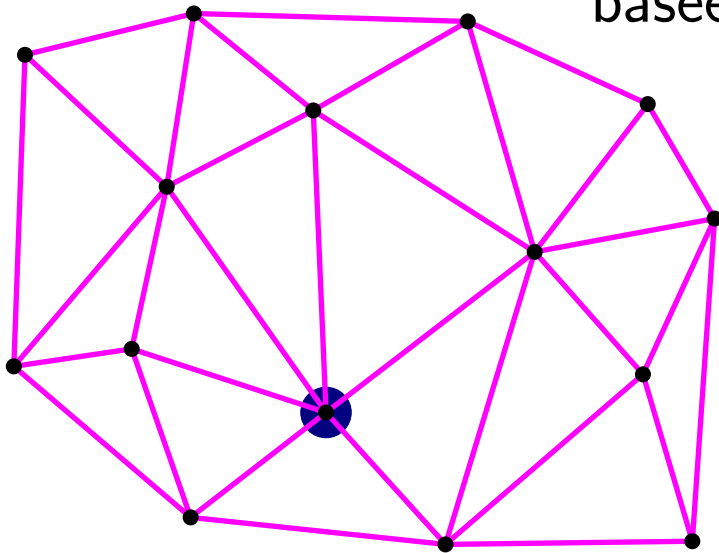
Représentation basée triangles



triangle :
trois sommets
trois voisins

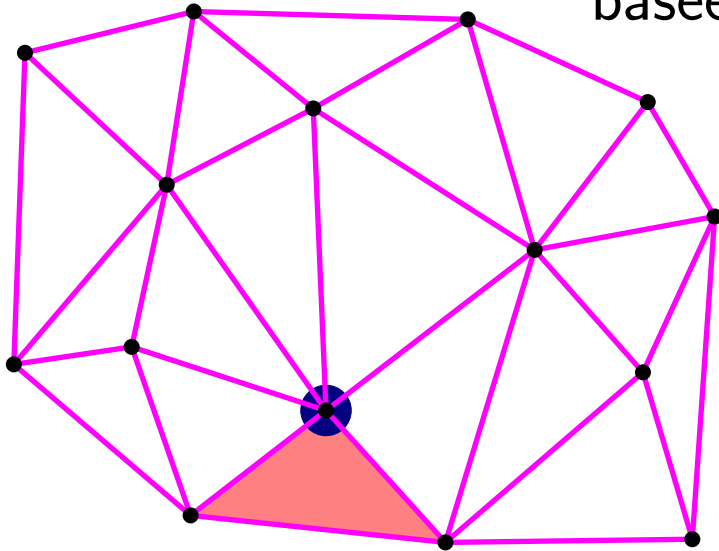
numérotation : voisin opposé au sommet

Représentation basée triangles



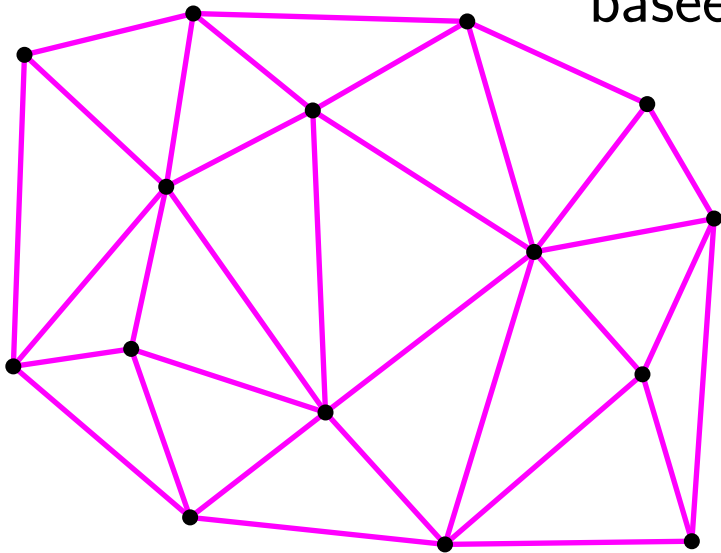
sommet :

Représentation basée triangles

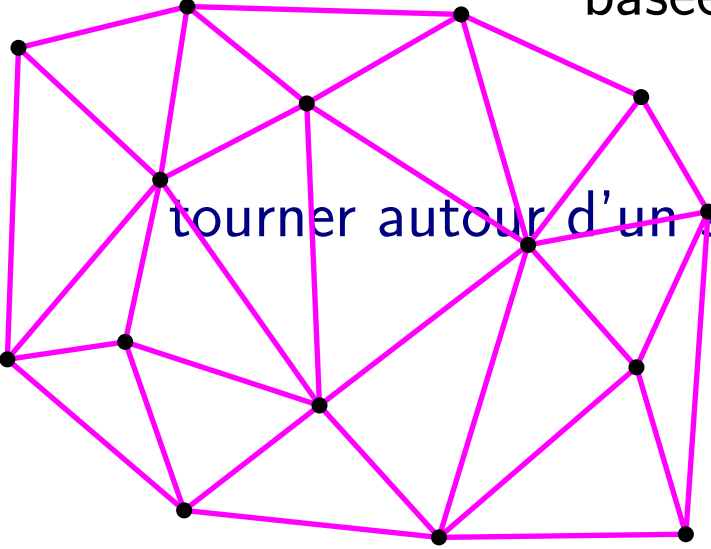


sommet :
x, y
un triangle

Représentation basée triangles

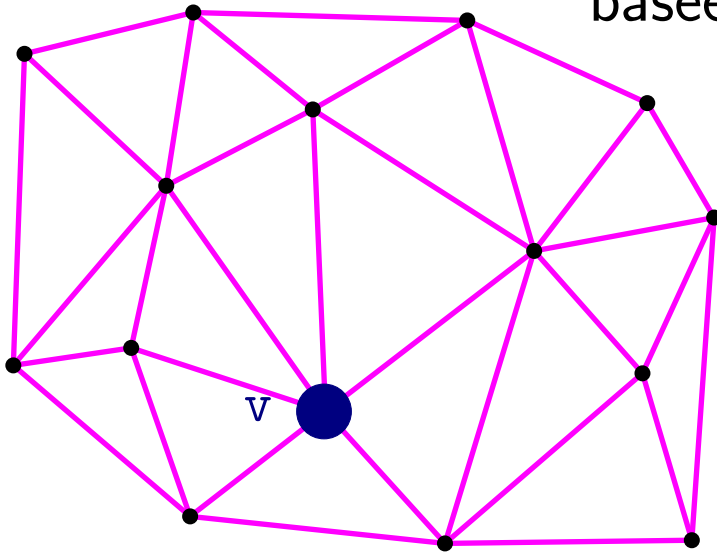


Représentation basée triangles

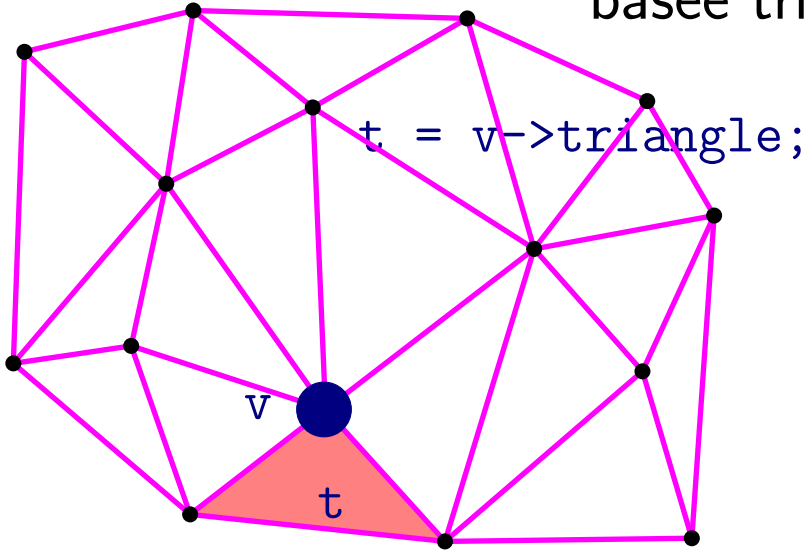


tourner autour d'un sommet

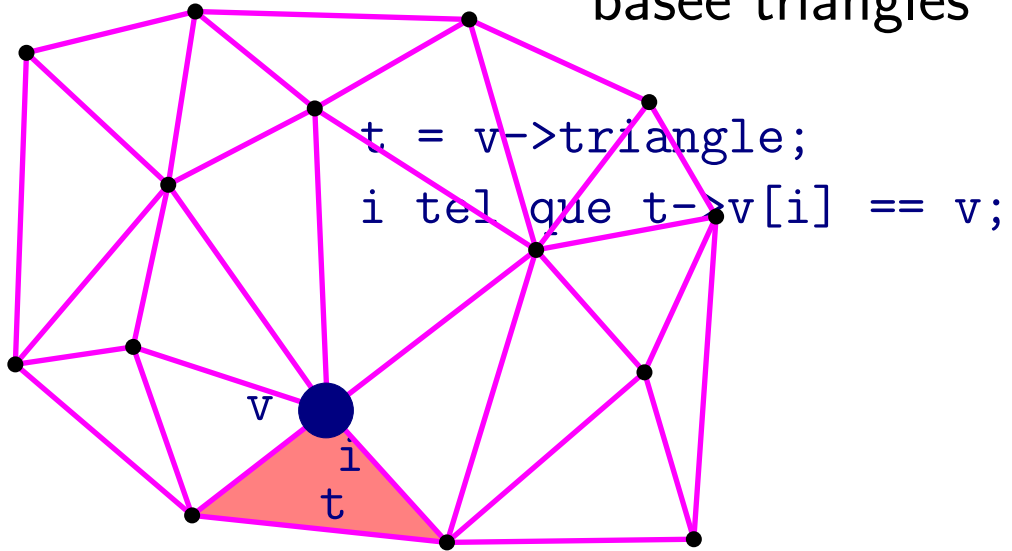
Représentation basée triangles



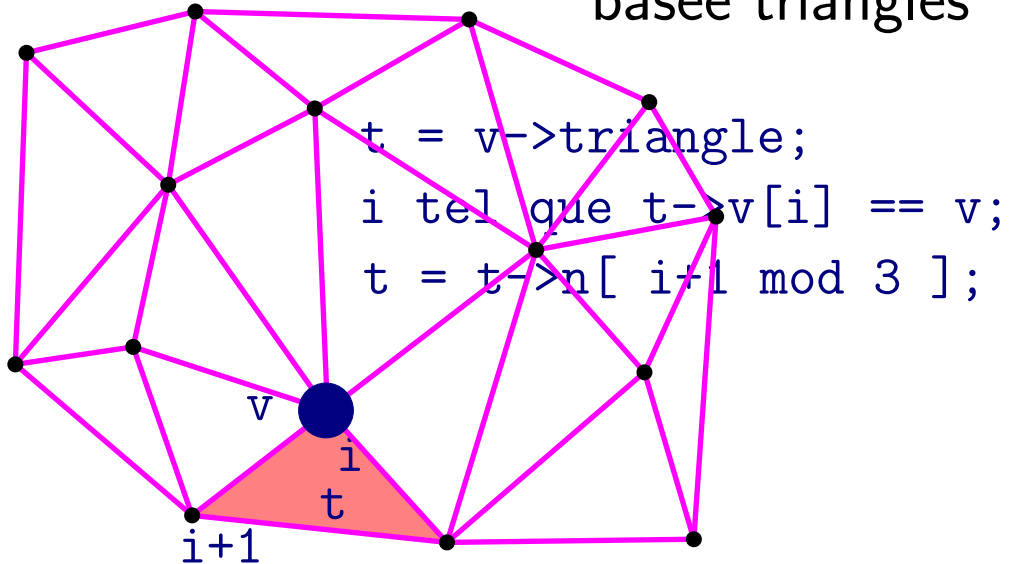
Représentation basée triangles



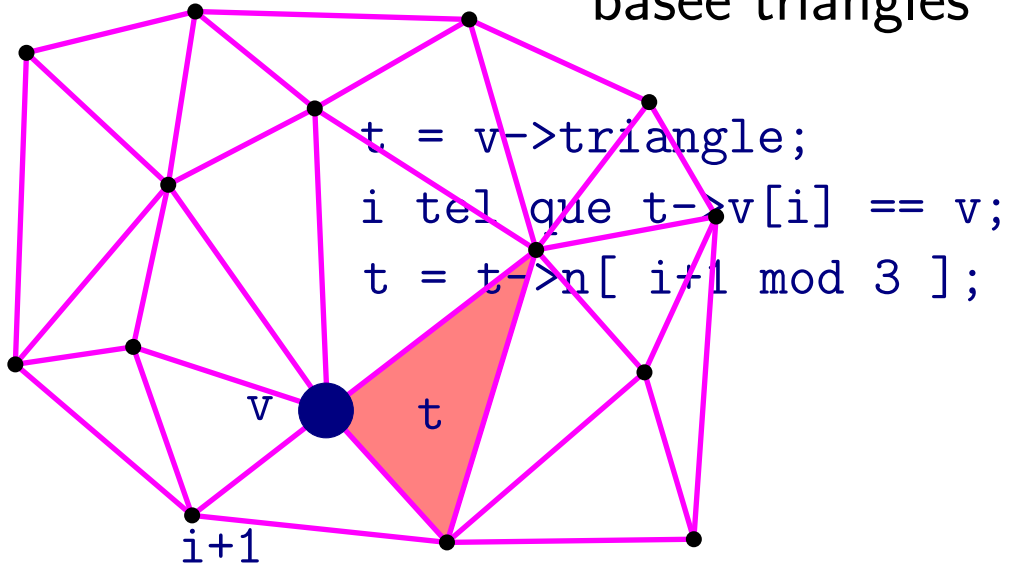
Représentation basée triangles



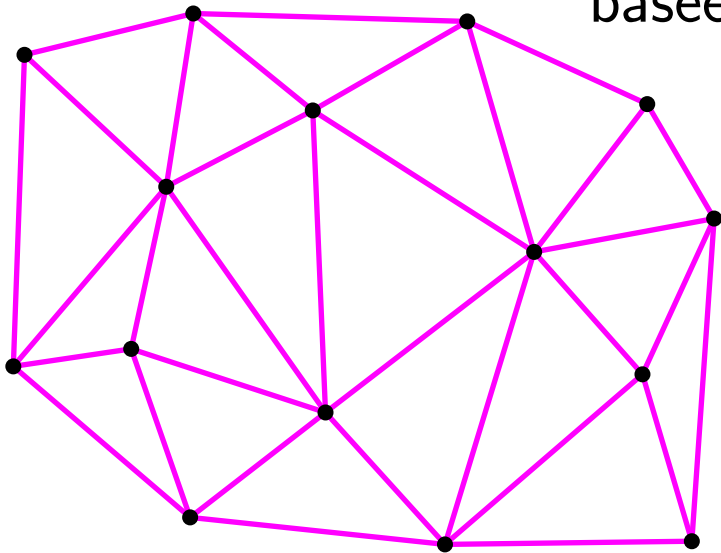
Représentation basée triangles



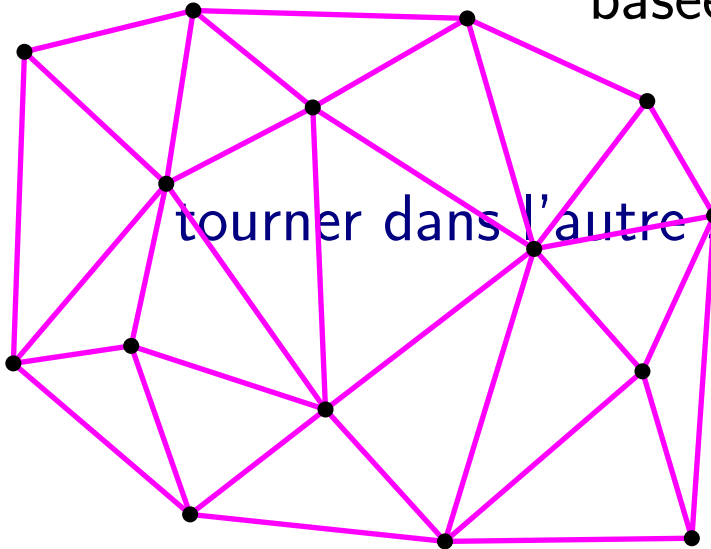
Représentation basée triangles



Représentation basée triangles

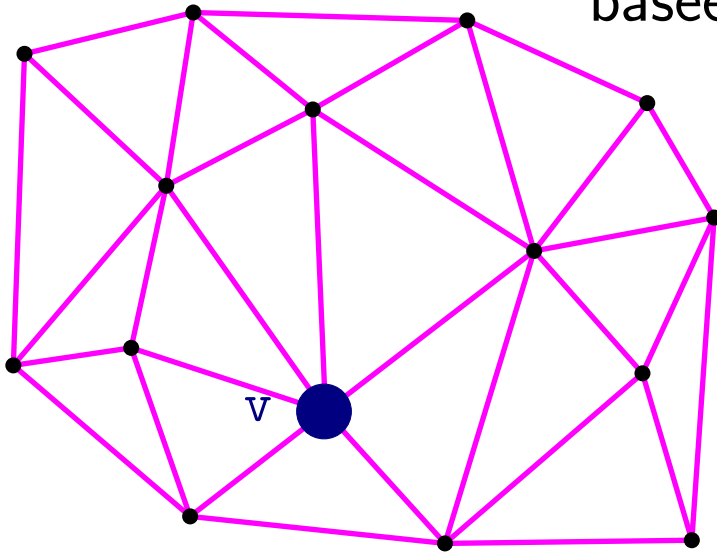


Représentation basée triangles

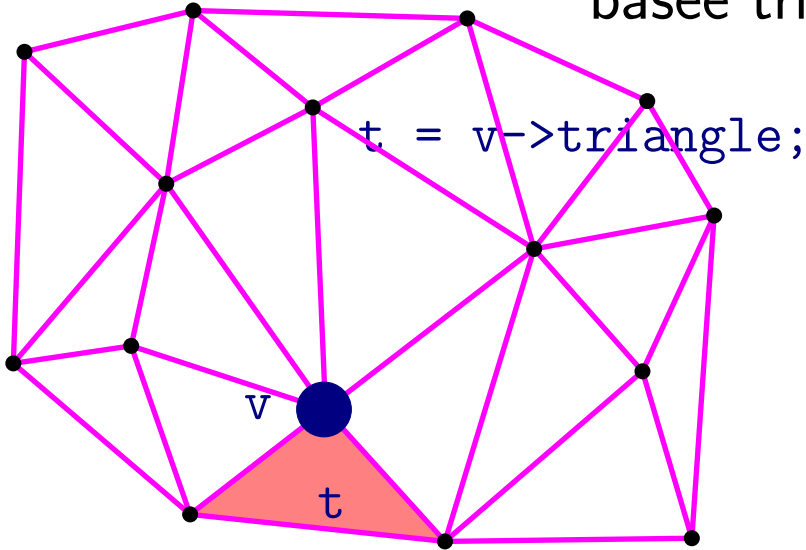


tourner dans l'autre sens

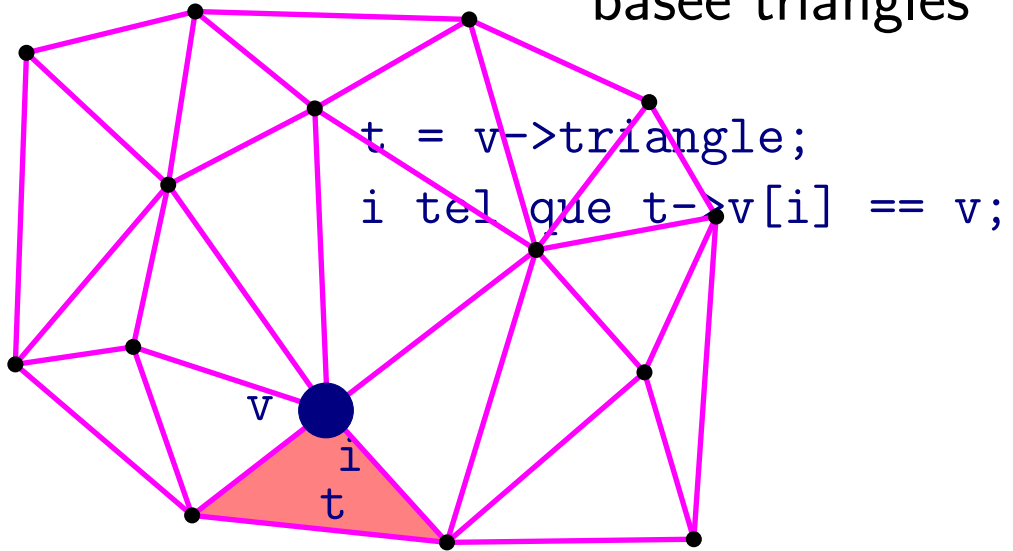
Représentation basée triangles



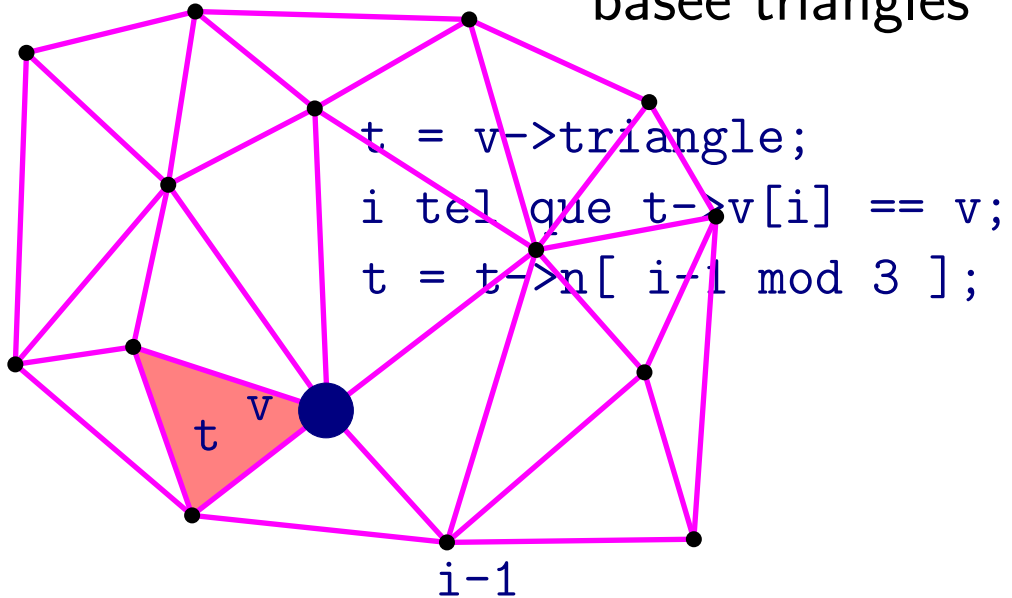
Représentation basée triangles



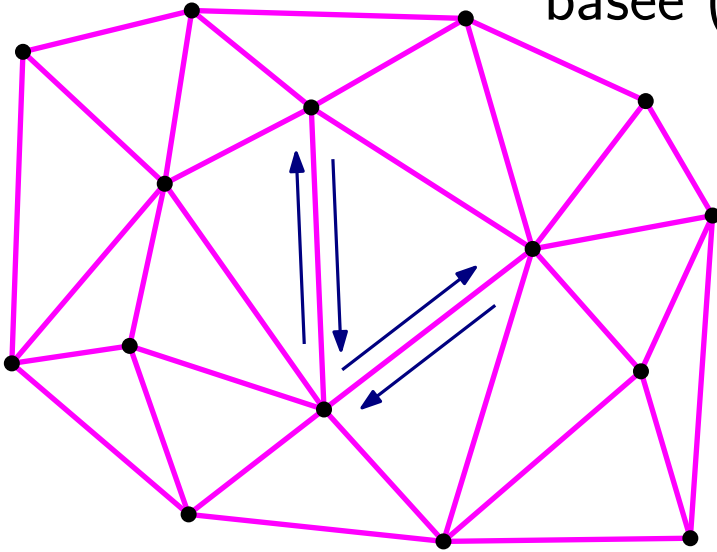
Représentation basée triangles



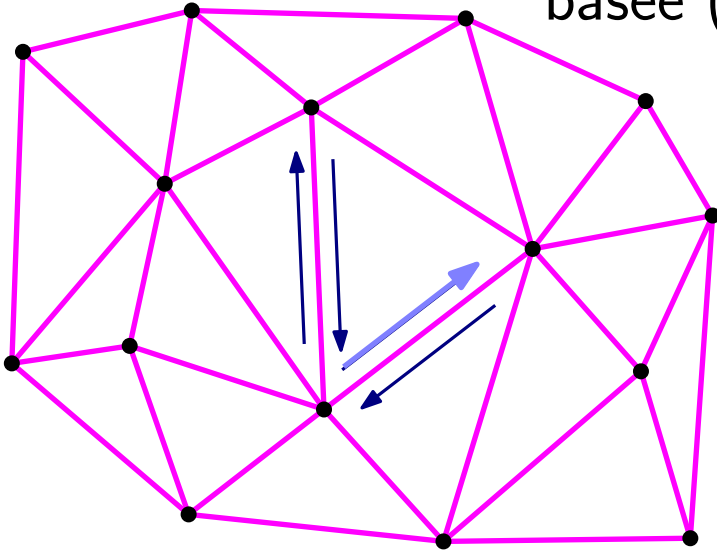
Représentation basée triangles



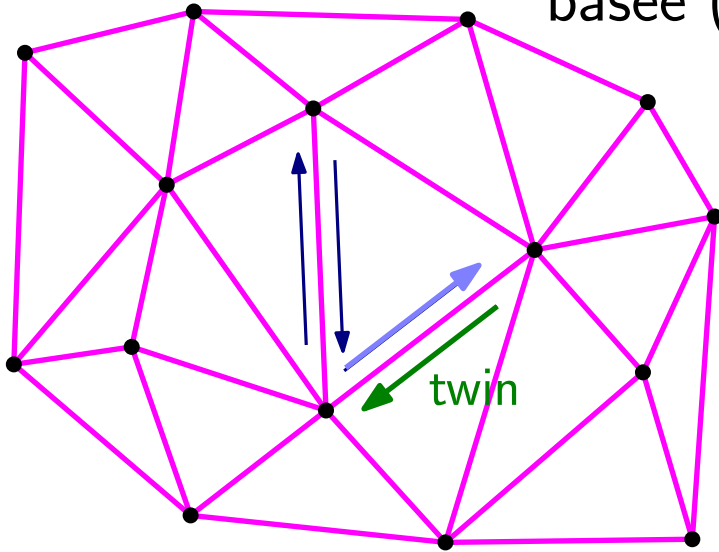
Représentation basée (demi) arêtes



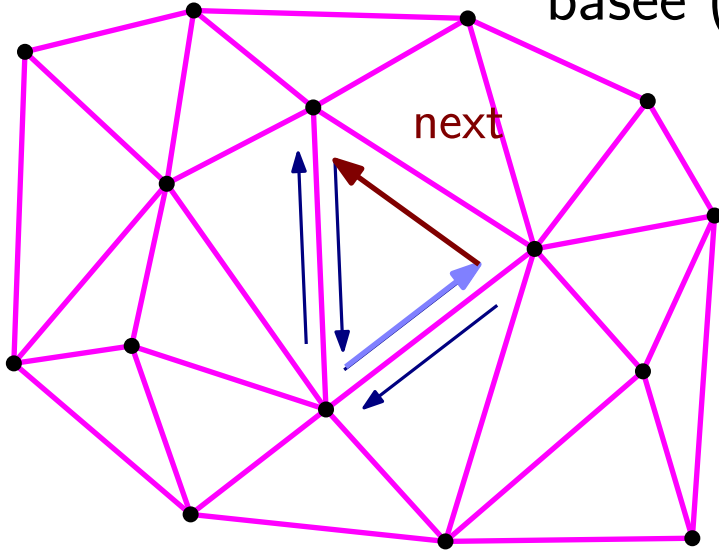
Représentation basée (demi) arêtes



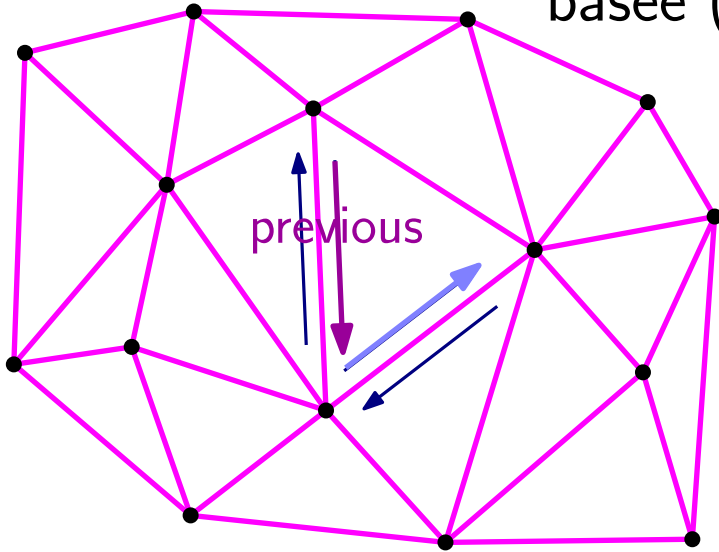
Représentation basée (demi) arêtes



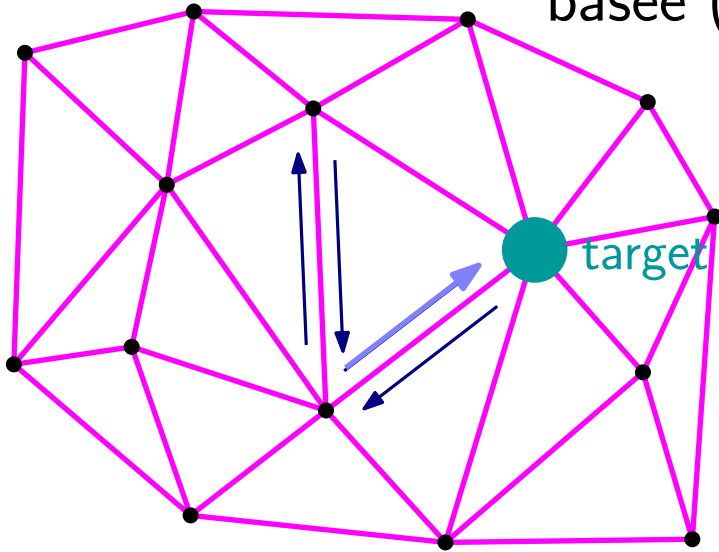
Représentation basée (demi) arêtes



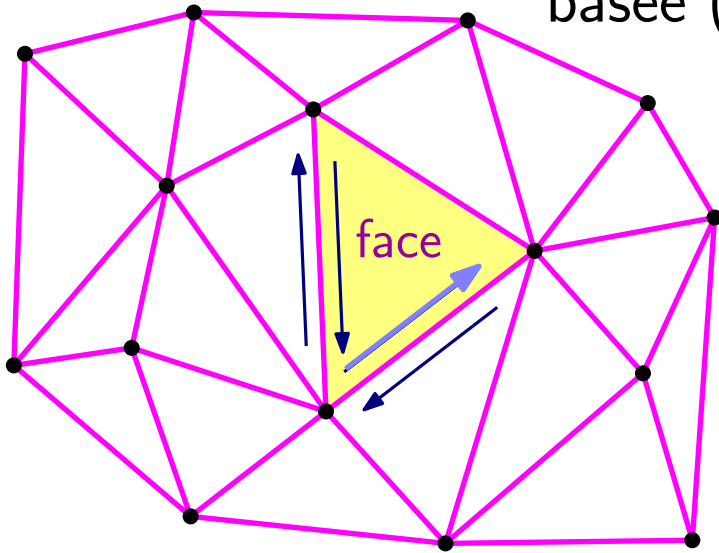
Représentation basée (demi) arêtes



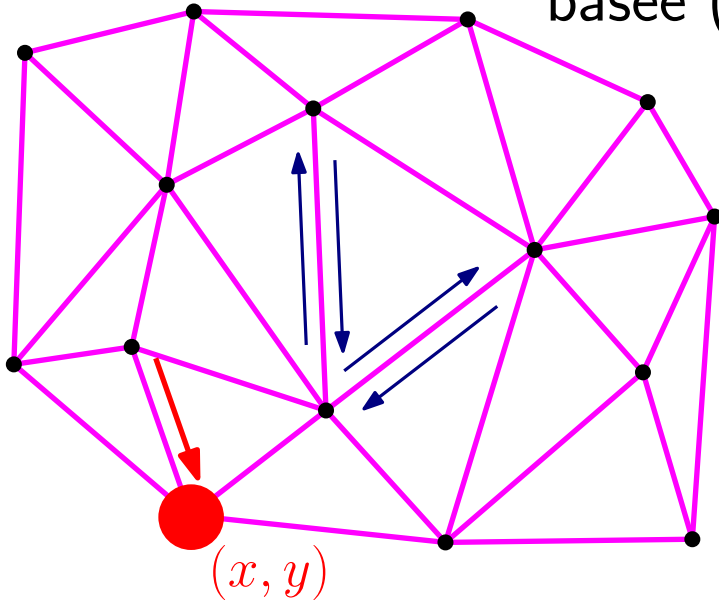
Représentation basée (demi) arêtes



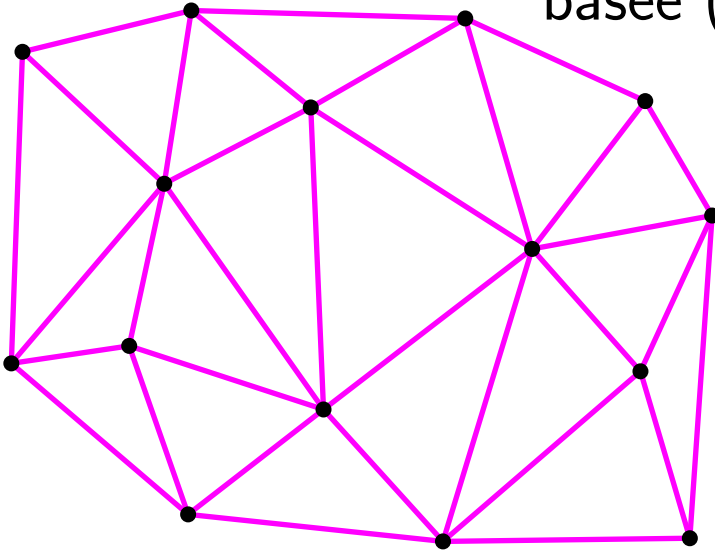
Représentation basée (demi) arêtes



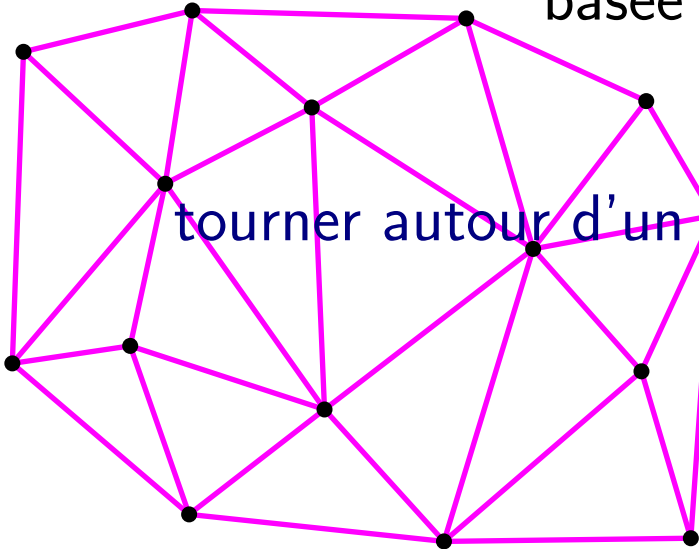
Représentation basée (demi) arêtes



Représentation basée (demi) arêtes

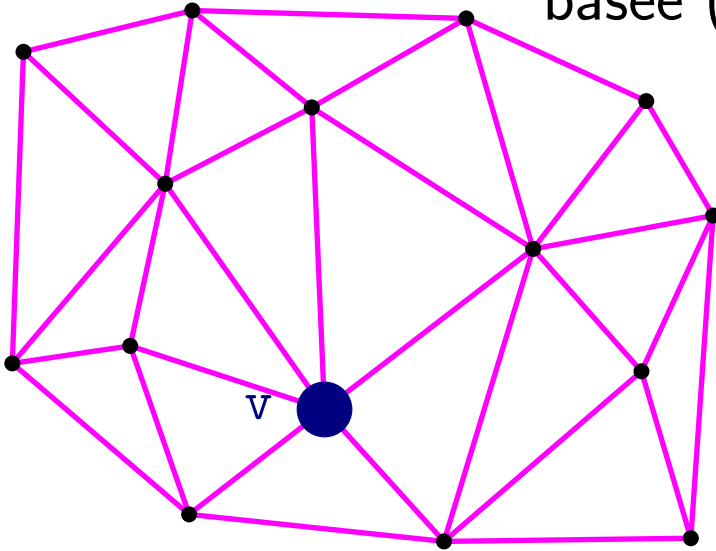


Représentation basée (demi) arêtes

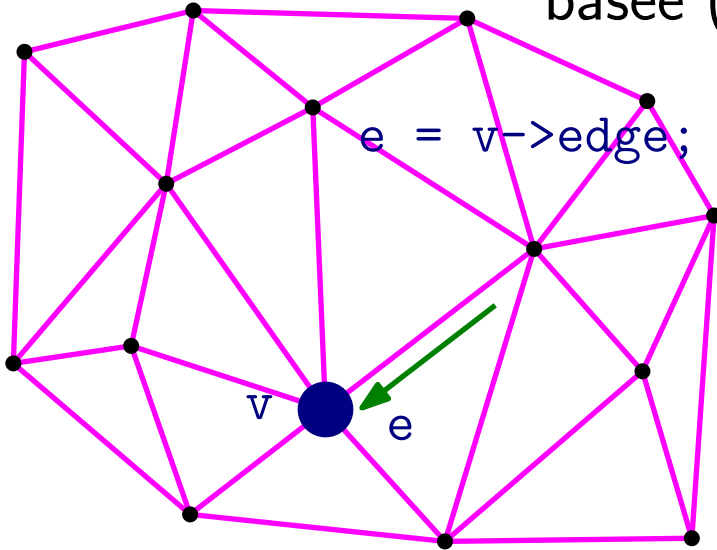


tourner autour d'un sommet

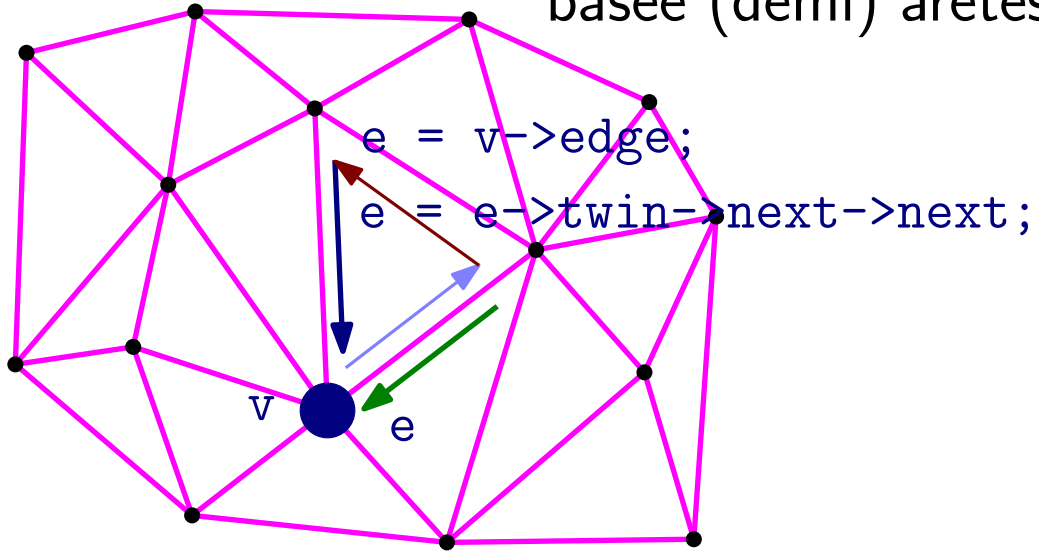
Représentation basée (demi) arêtes



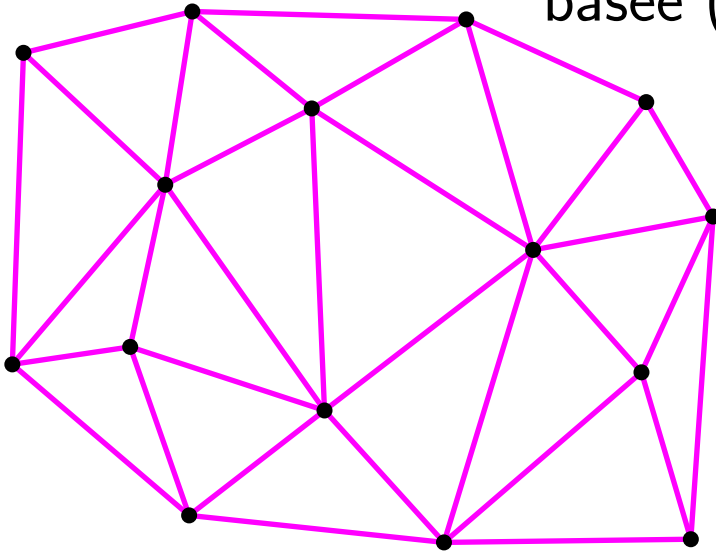
Représentation basée (demi) arêtes



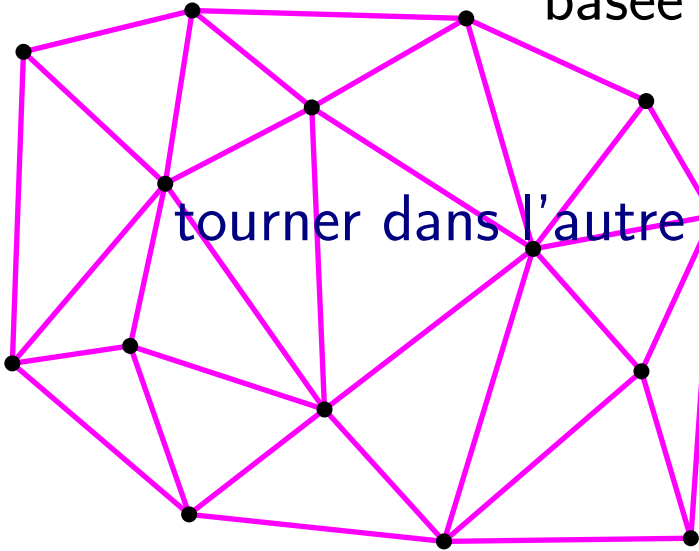
Représentation basée (demi) arêtes



Représentation basée (demi) arêtes

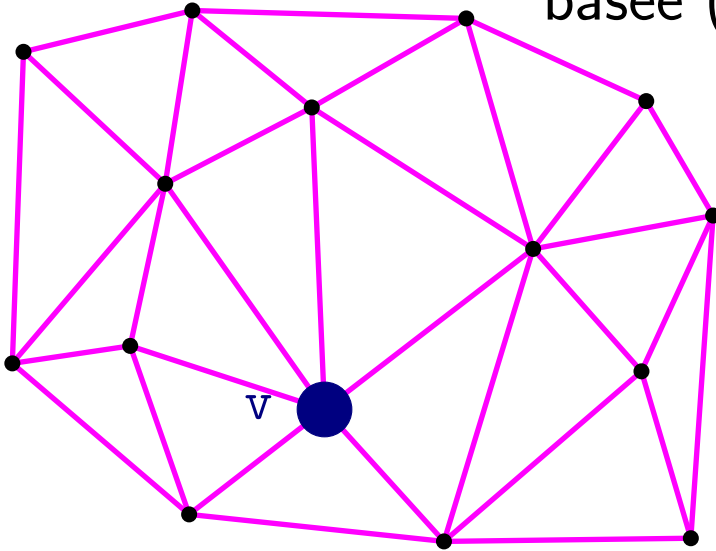


Représentation basée (demi) arêtes

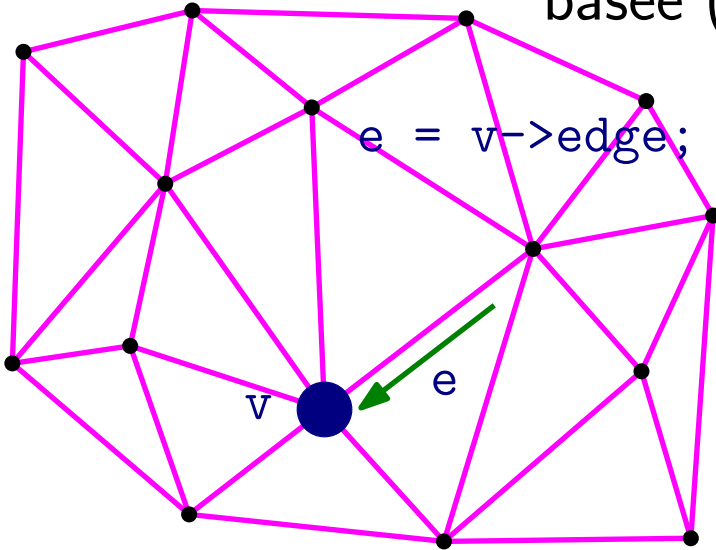


tourner dans l'autre sens

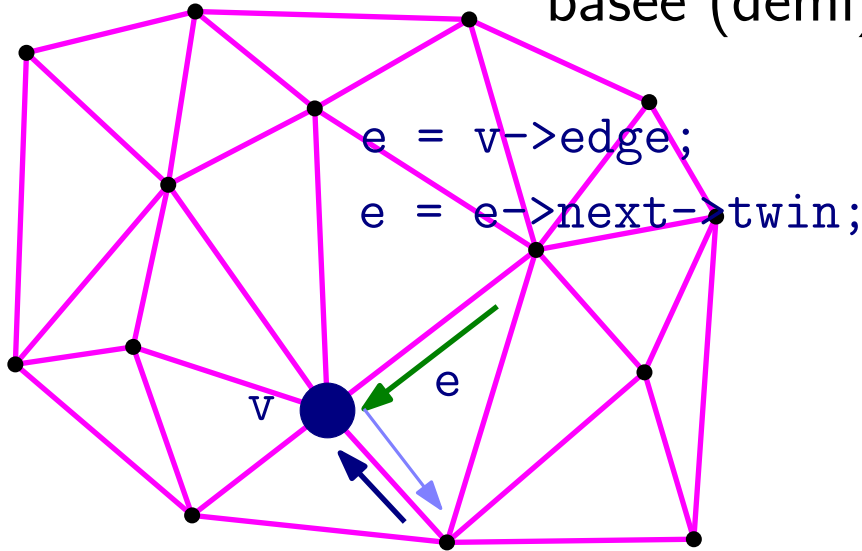
Représentation basée (demi) arêtes



Représentation basée (demi) arêtes



Représentation basée (demi) arêtes





Borne inférieure pour
la triangulation de Delaunay

Borne inférieure pour Delaunay

Borne inférieure pour Delaunay

Delaunay sert à trier

Borne inférieure pour Delaunay

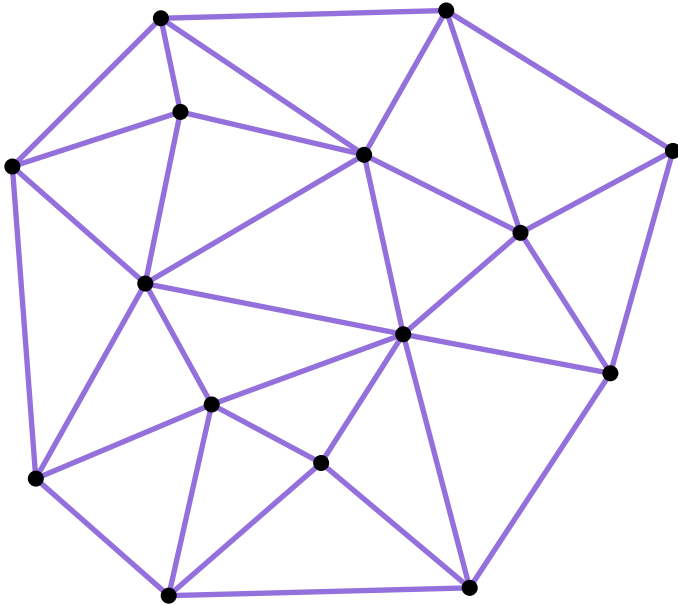
Delaunay sert à trier

$$\Omega(n \log n)$$

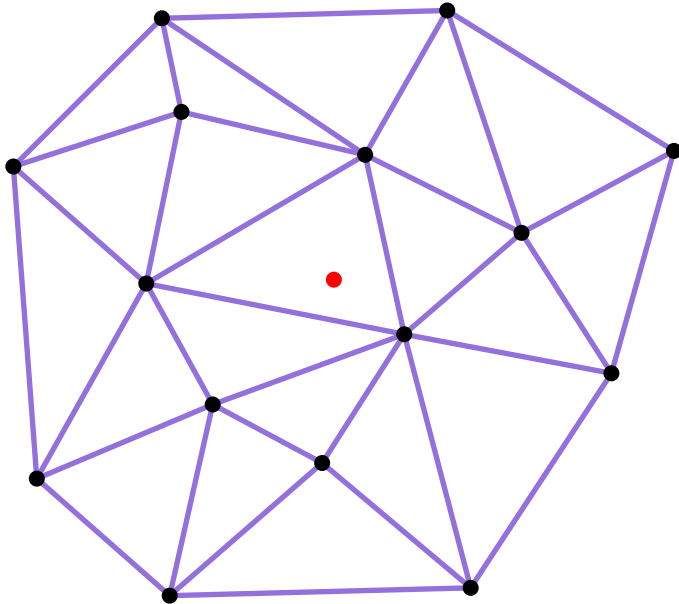


Premiers algorithmes pour
la triangulation de Delaunay

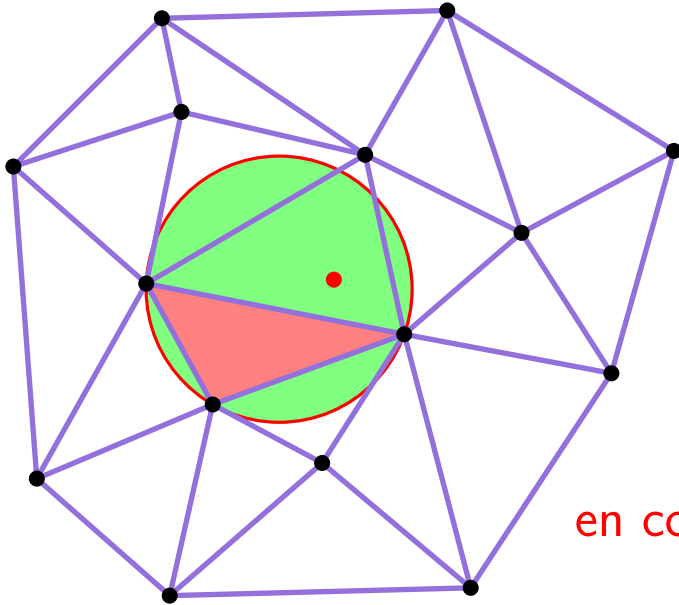
Algorithme incrémental



Algorithme incrémental

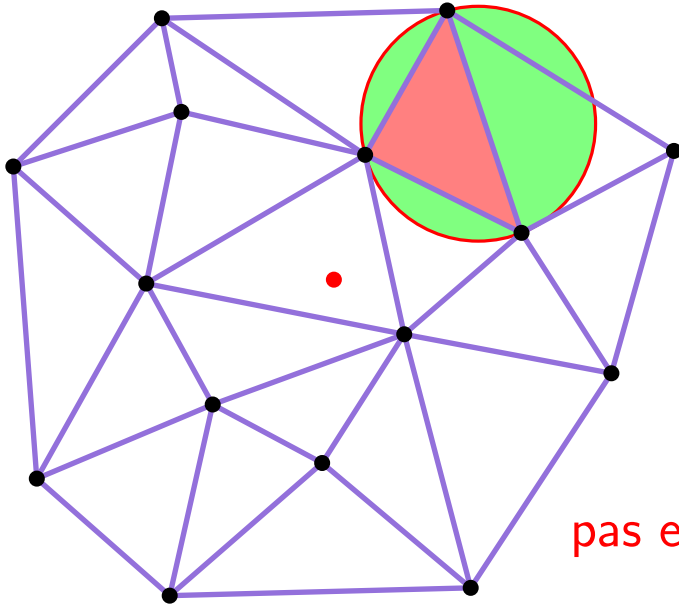


Algorithme incrémental



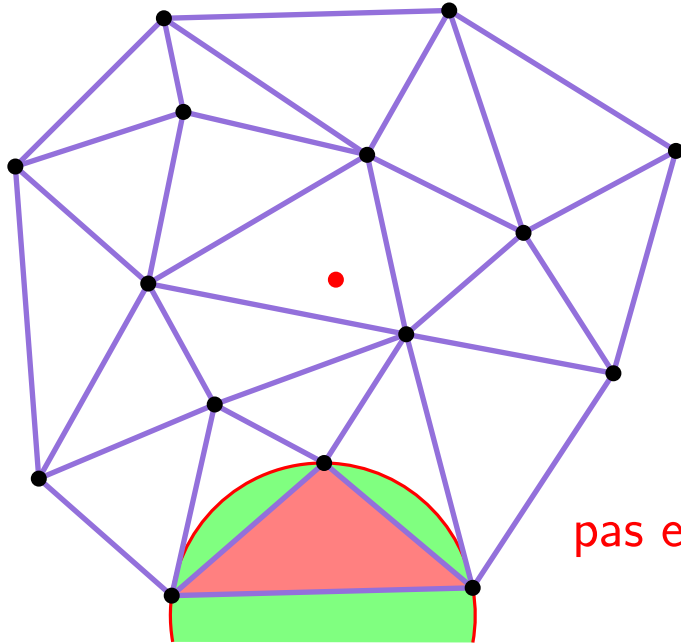
en conflit

Algorithme incrémental



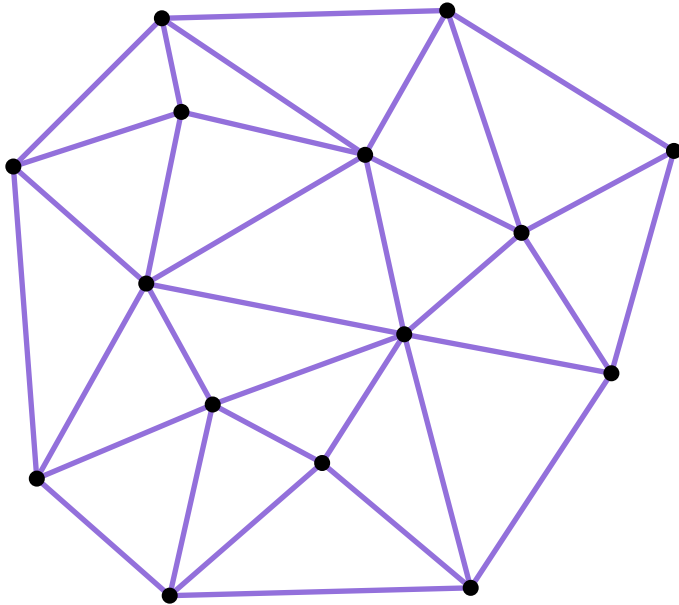
pas en conflit

Algorithme incrémental

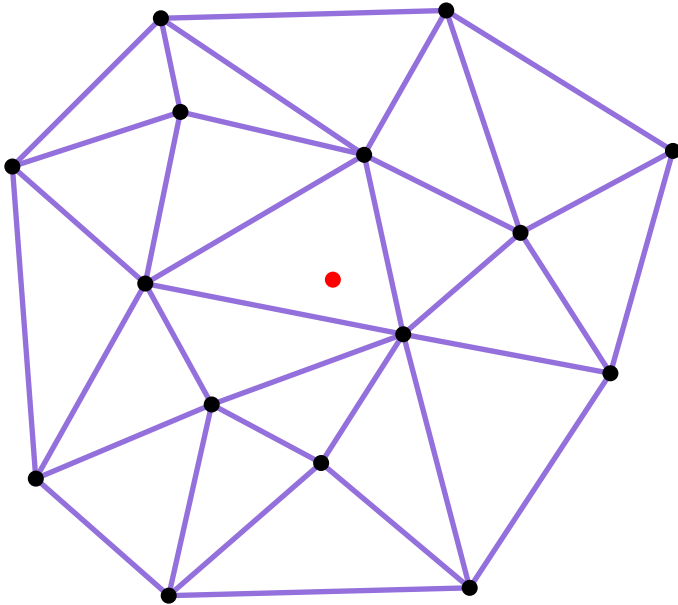


pas en conflit

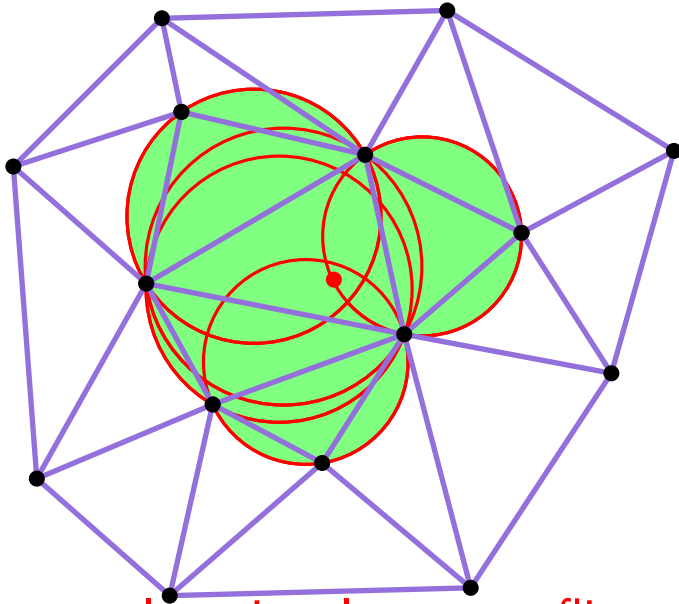
Algorithme incrémental



Algorithme incrémental

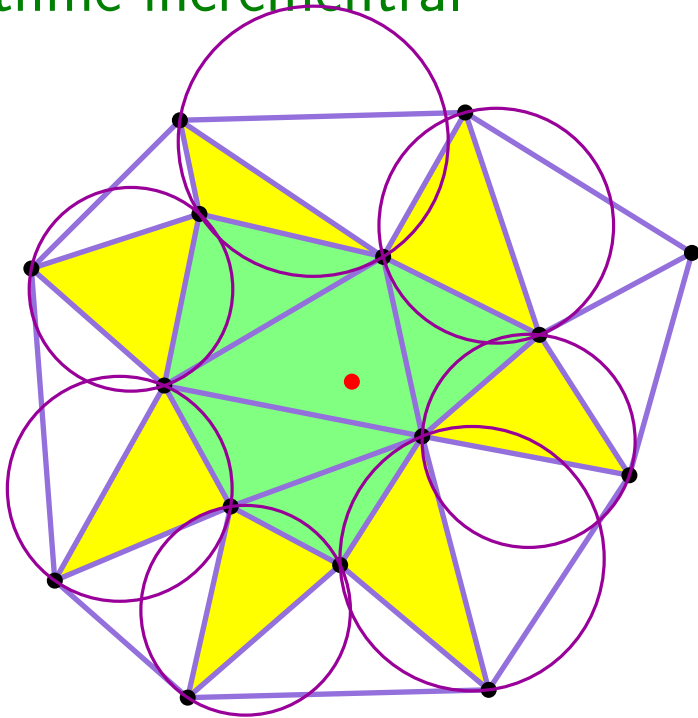


Algorithme incrémental

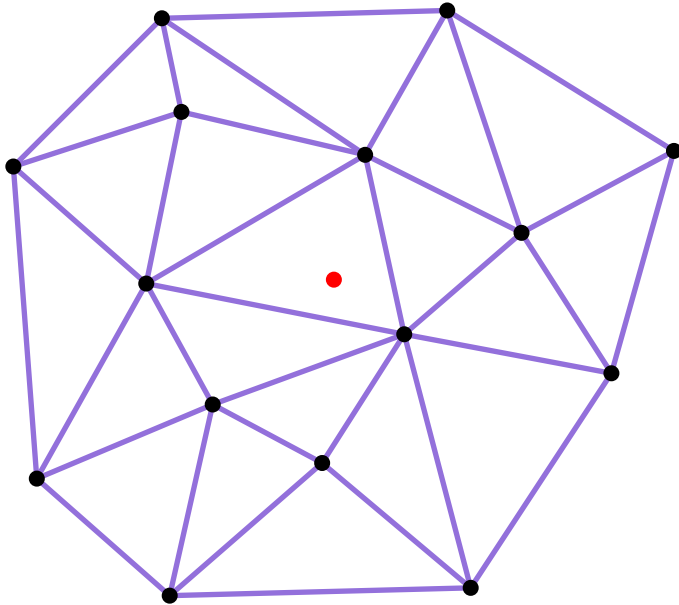


Trouver les triangles en conflit

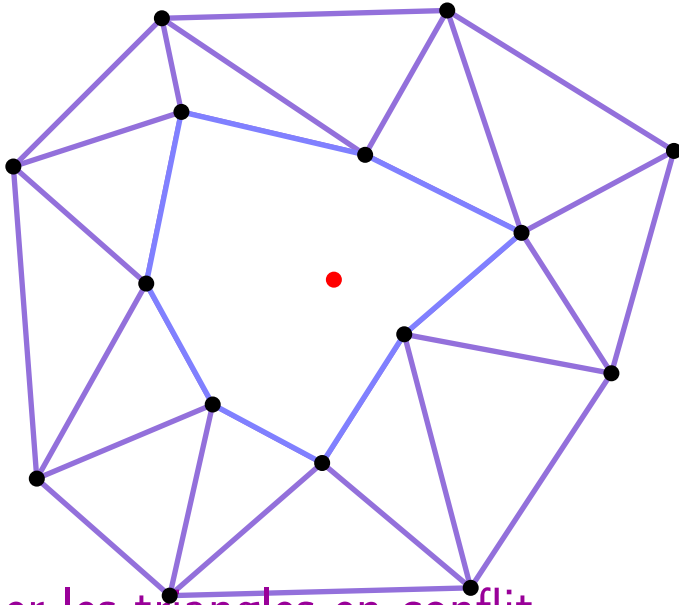
Algorithme incrémental



Algorithme incrémental

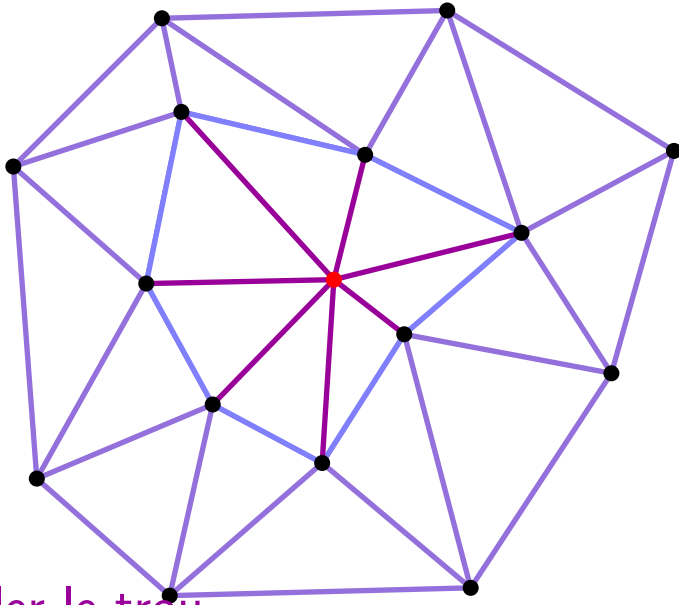


Algorithme incrémental



Supprimer les triangles en conflit

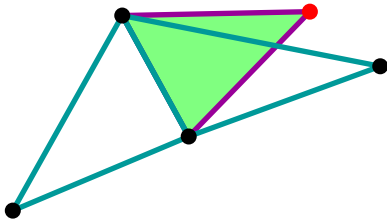
Algorithme incrémental



Trianguler le trou

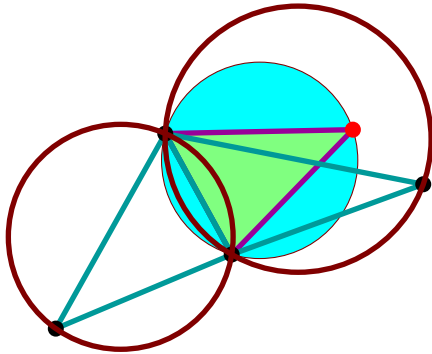
Algorithme incrémental

Un nouveau triangle est de Delaunay



Algorithme incrémental

Un nouveau triangle est de Delaunay



Algorithme incrémental

Complexité

$O(n)$ pour chaque insertion

$O(n^2)$

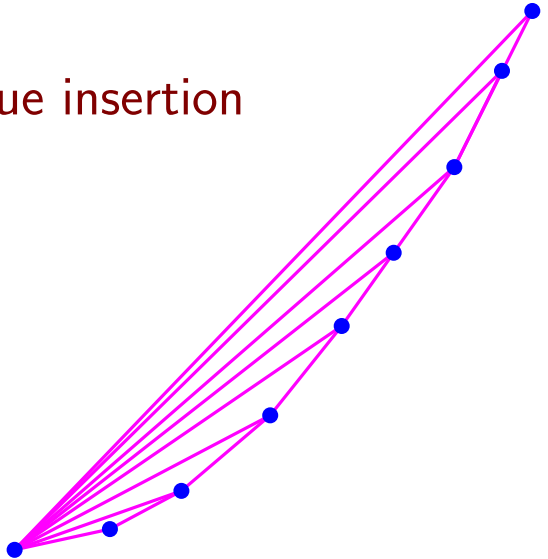
Algorithme incrémental

Complexité

$O(n)$ pour chaque insertion

$O(n^2)$

$\Omega(n^2)$



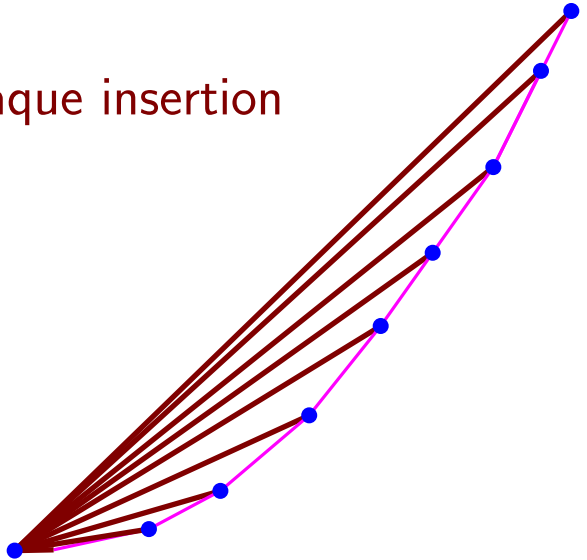
Algorithme incrémental

Complexité

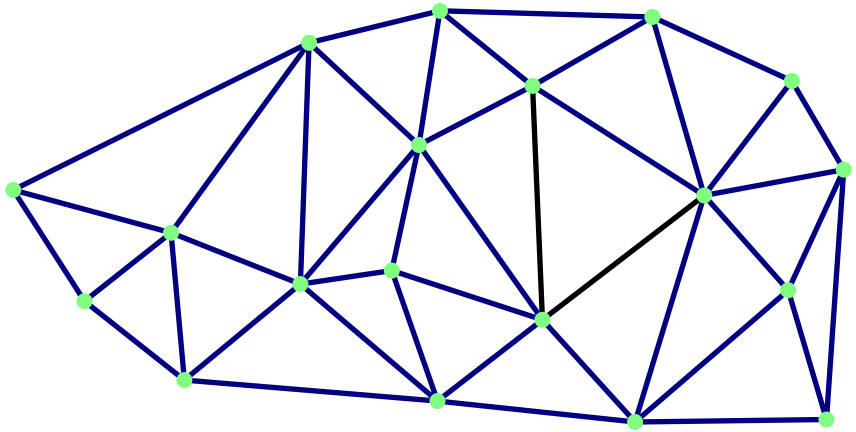
$O(n)$ pour chaque insertion

$O(n^2)$

$\Omega(n^2)$

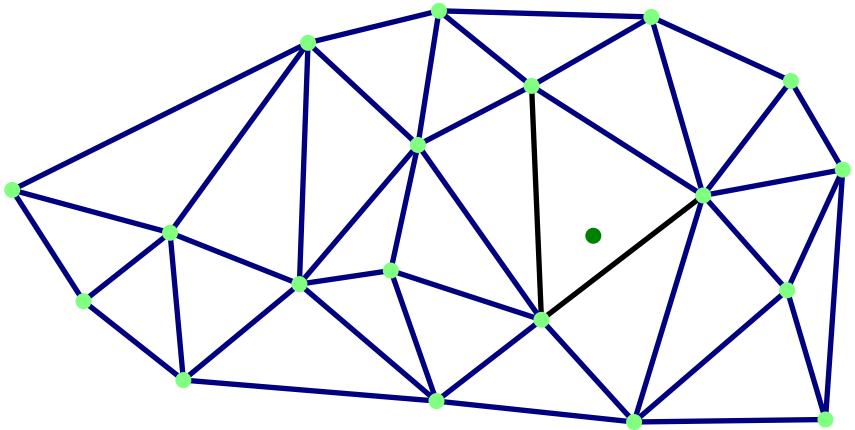


Algorithme incrémental



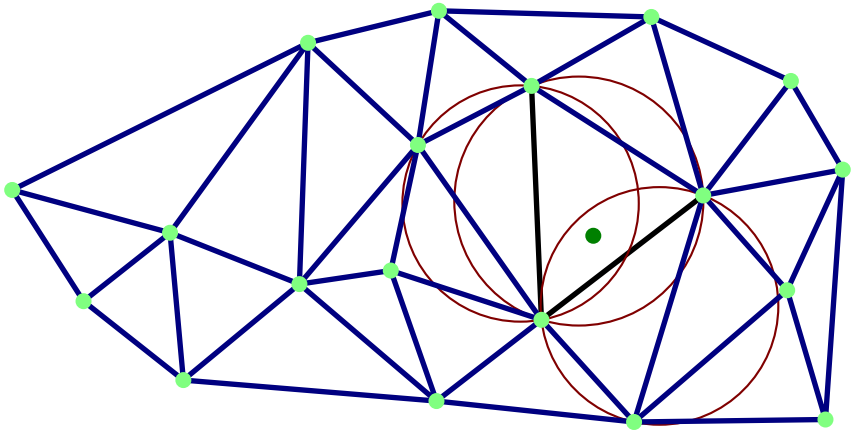
Algorithme incrémental

Insertion



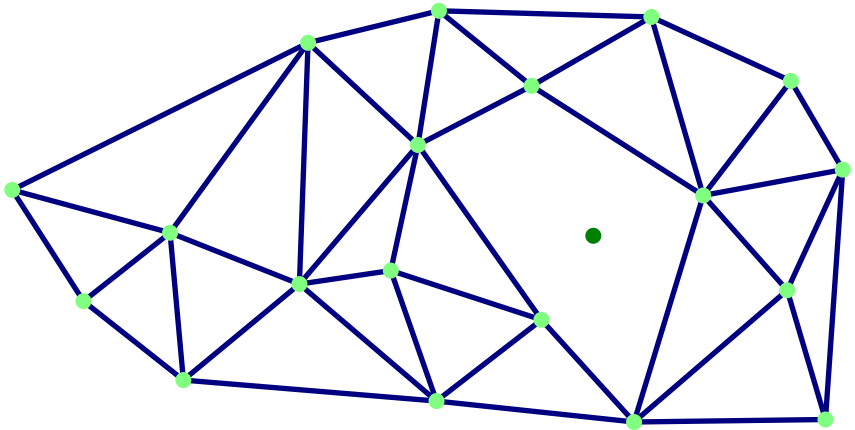
Algorithme incrémental

Insertion



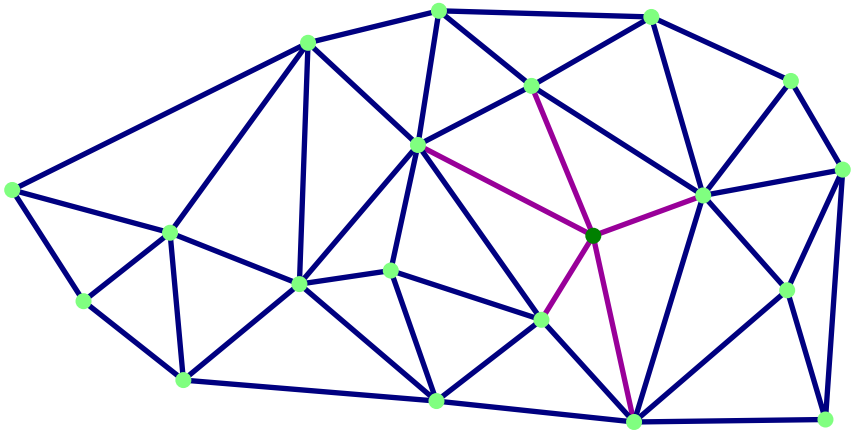
Algorithme incrémental

Insertion



Algorithme incrémental

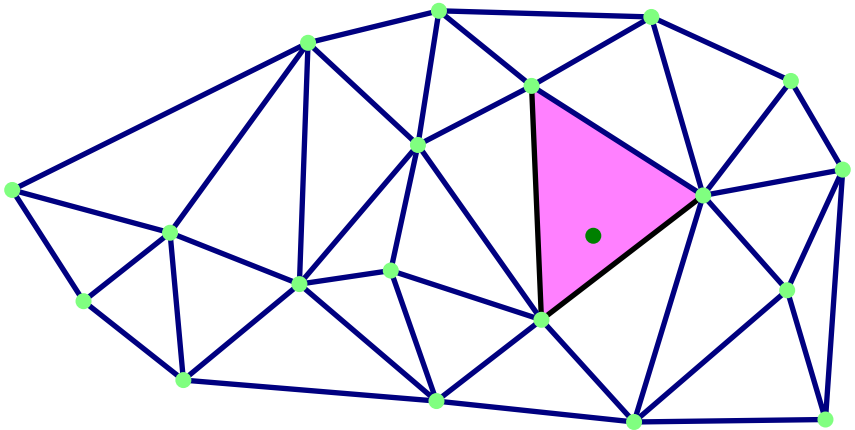
Insertion



Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

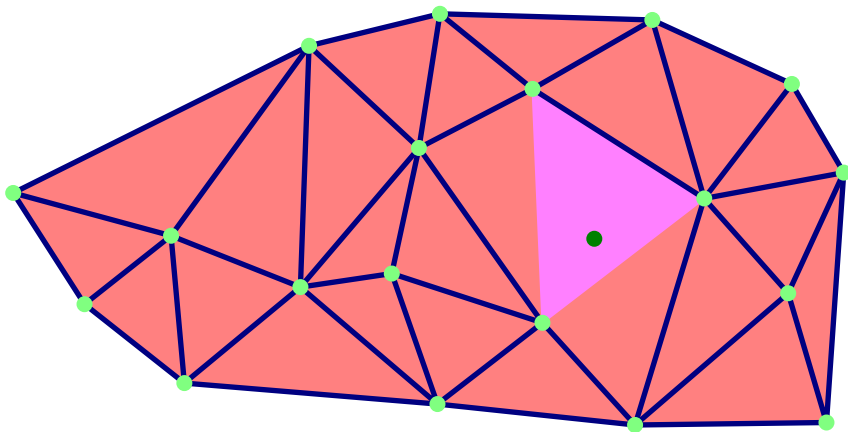


Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Tous



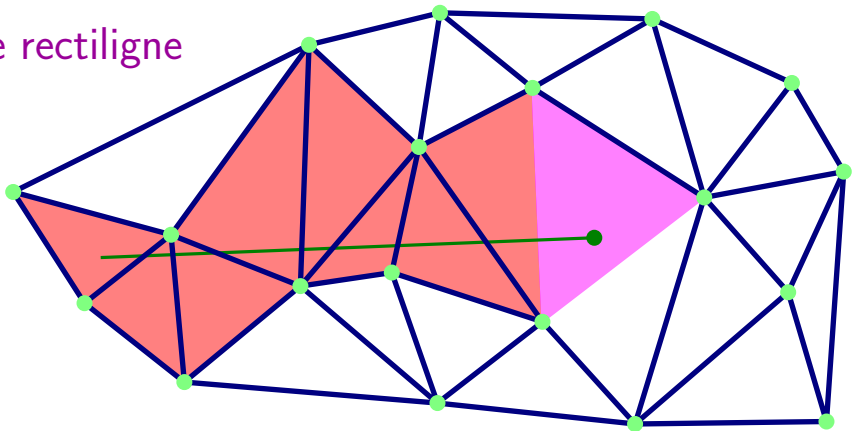
$$O(n)$$

Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Marche rectiligne



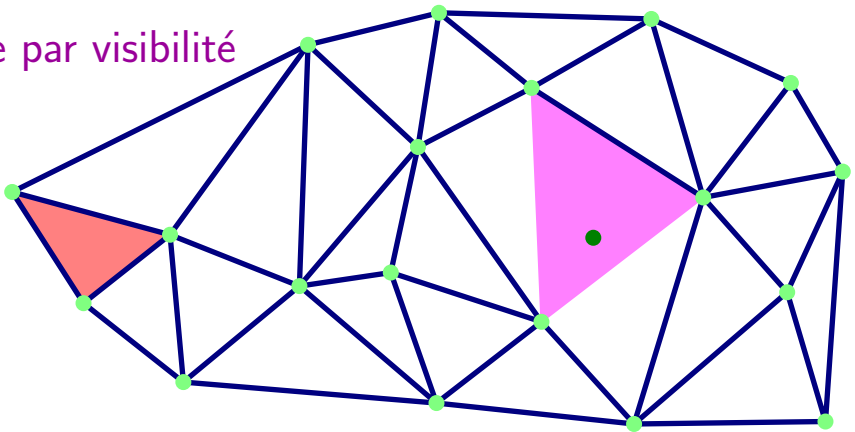
$O(\sqrt{n})$ en moyenne

Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Marche par visibilité

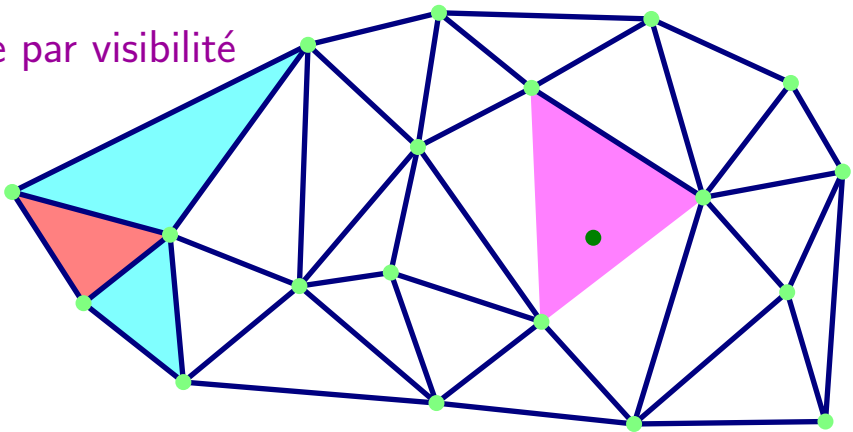


Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Marche par visibilité

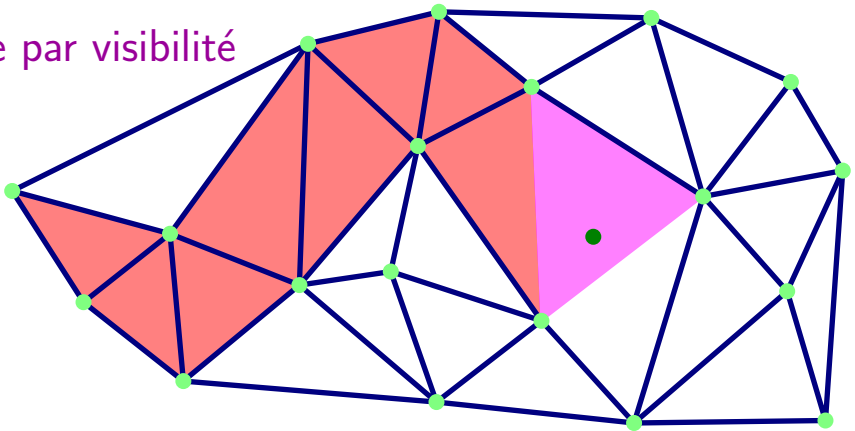


Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Marche par visibilité



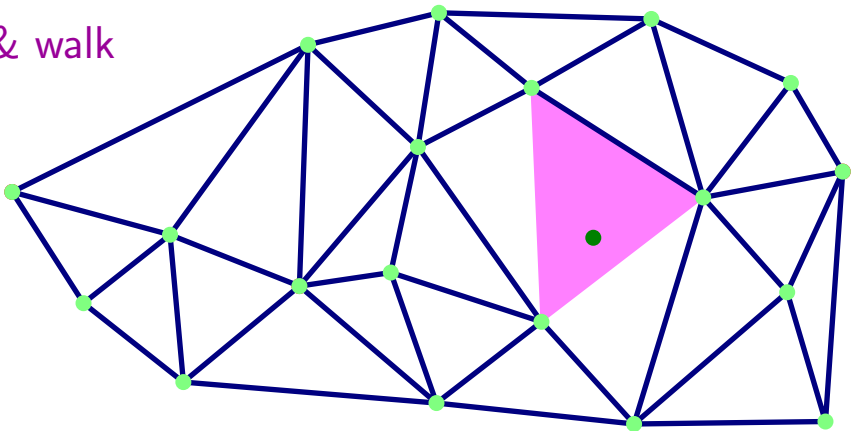
$O(\sqrt{n})$??? en moyenne

Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Jump & walk

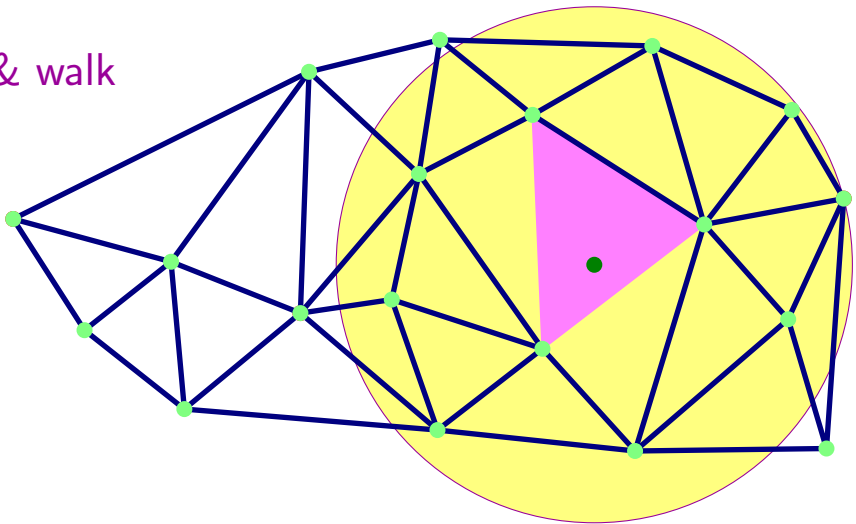


Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Jump & walk

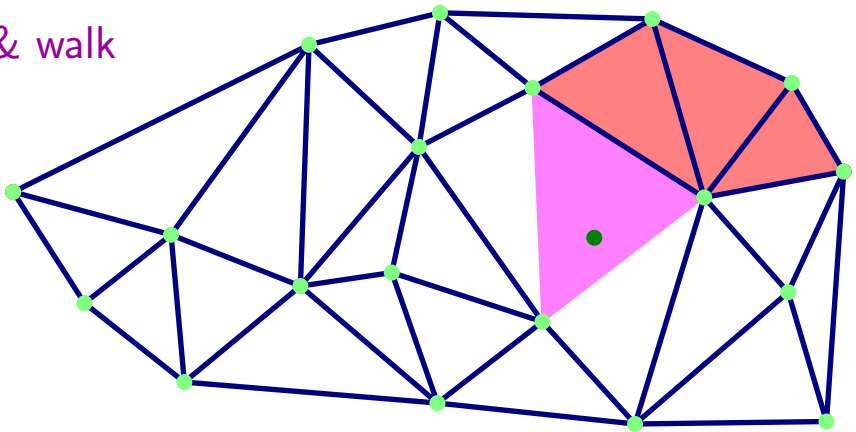


Algorithme incrémental

Insertion

Stratégies de localisation

Jump & walk



$O(\sqrt[3]{n})$ en moyenne

Algorithme incrémental

Complexité

$$O(n^2)$$

$$O(n\sqrt{n}) \text{ en moyenne}$$

$$O(n\sqrt[3]{n}) \text{ en moyenne}$$

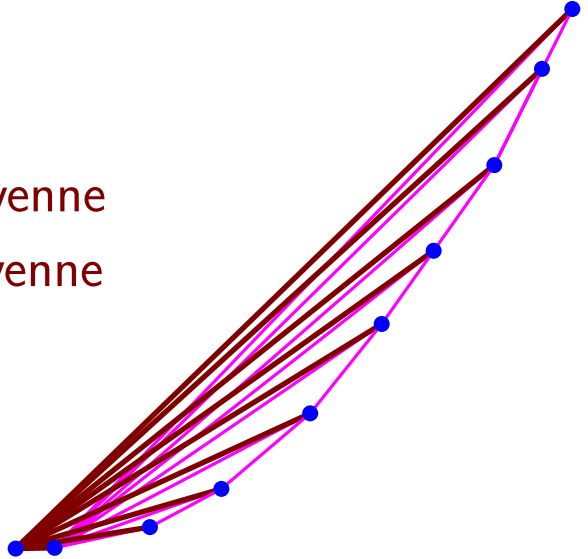
Algorithme incrémental

Complexité

$$O(n^2)$$

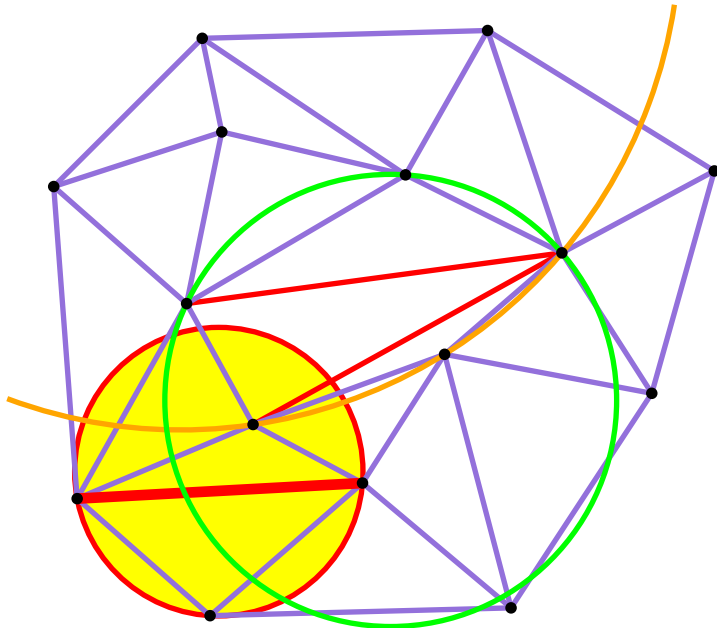
$O(n\sqrt{n})$ en moyenne

$O(n\sqrt[3]{n})$ en moyenne

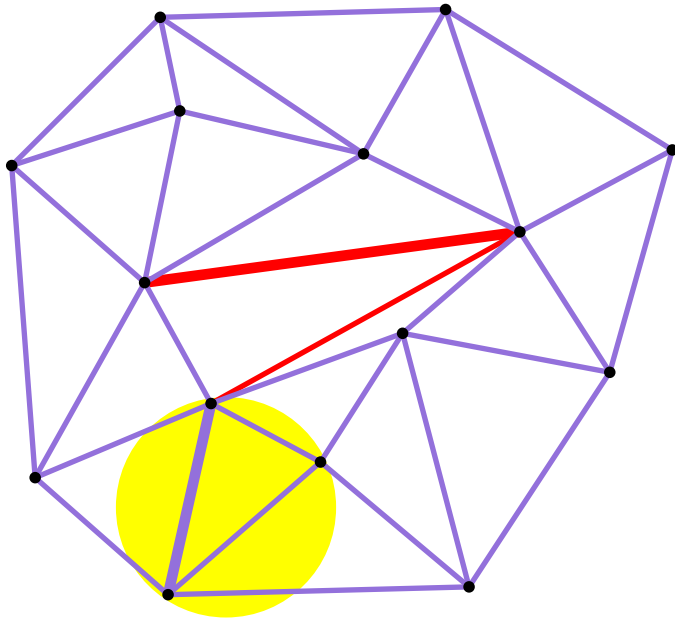


$\Omega(n^2)$ dans le cas le pire

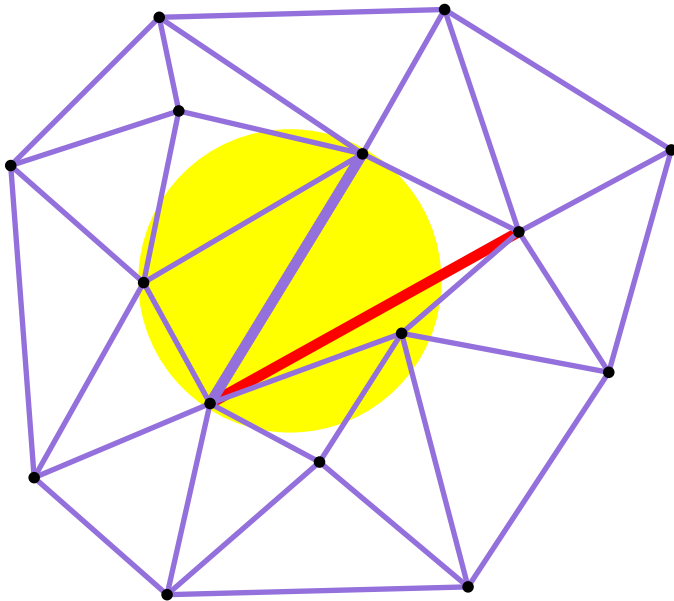
Bascule de diagonales



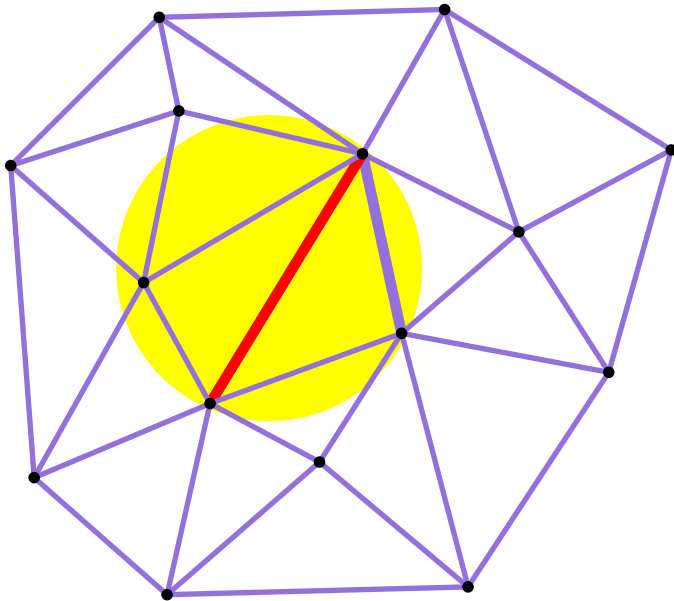
Bascule de diagonales



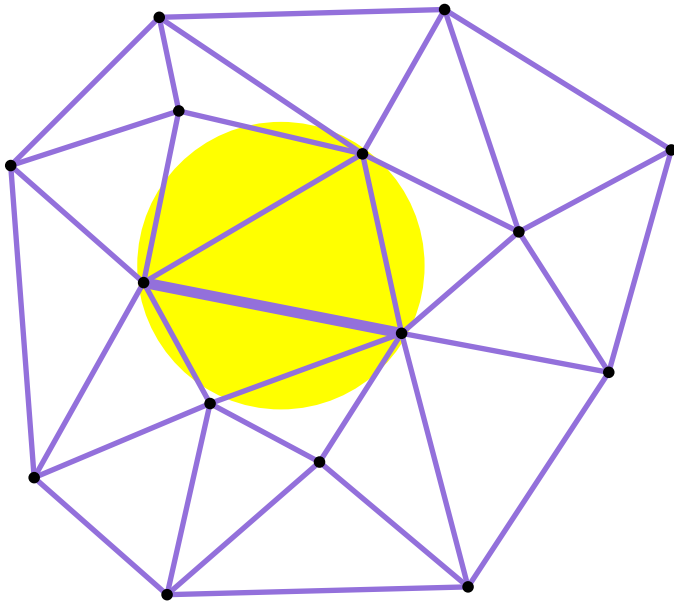
Bascule de diagonales



Bascule de diagonales



Bascule de diagonales



Bascule de diagonales

Complexité

Algorithme en $O(n^2)$

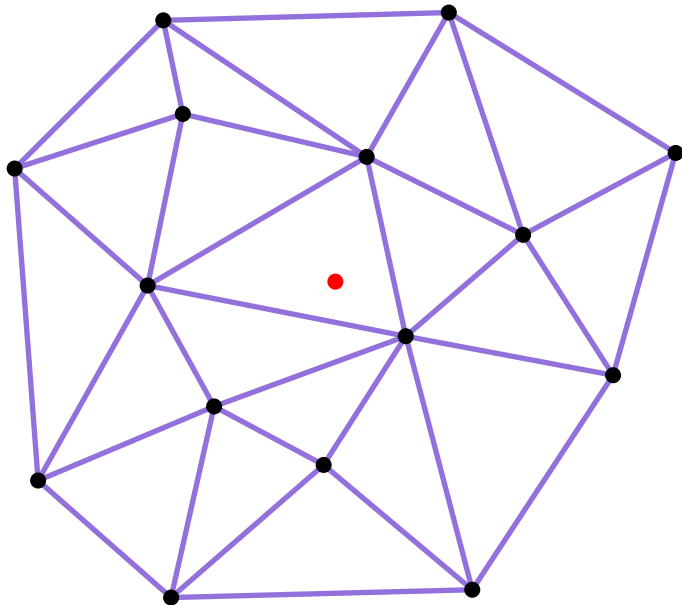
Bascule de diagonales

Complexité

Algorithme en $O(n^2)$

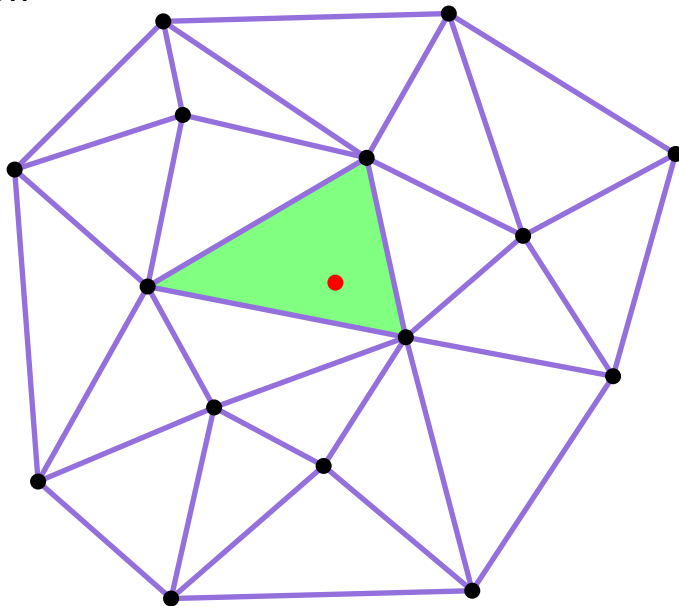
Une arête basculée n'est
jamais reconstruite
(les nouvelles arêtes
sont toujours dessous)

Bascule de diagonales et algorithme incrémental



Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

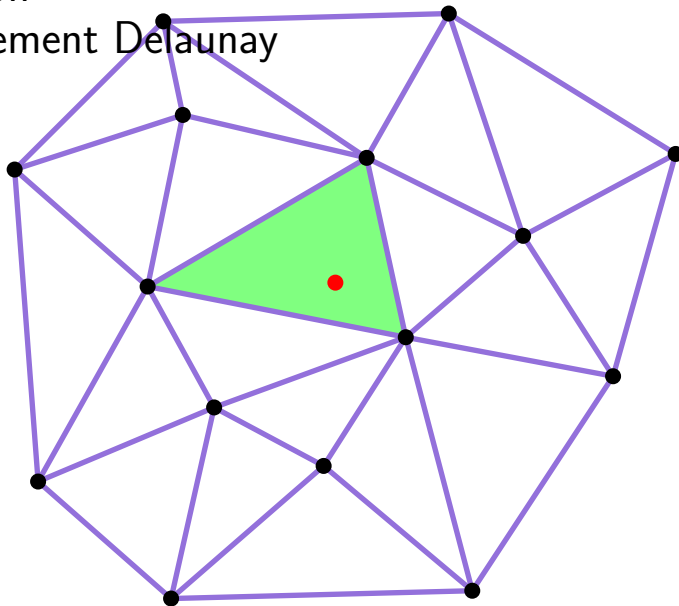


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

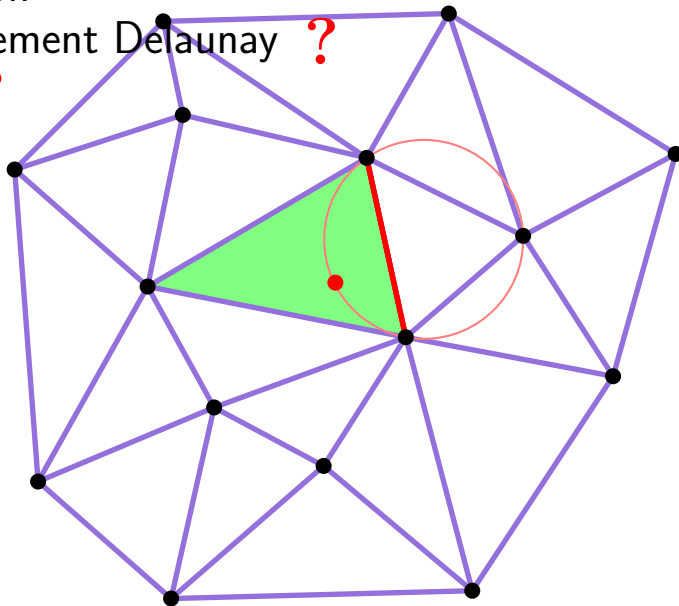


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



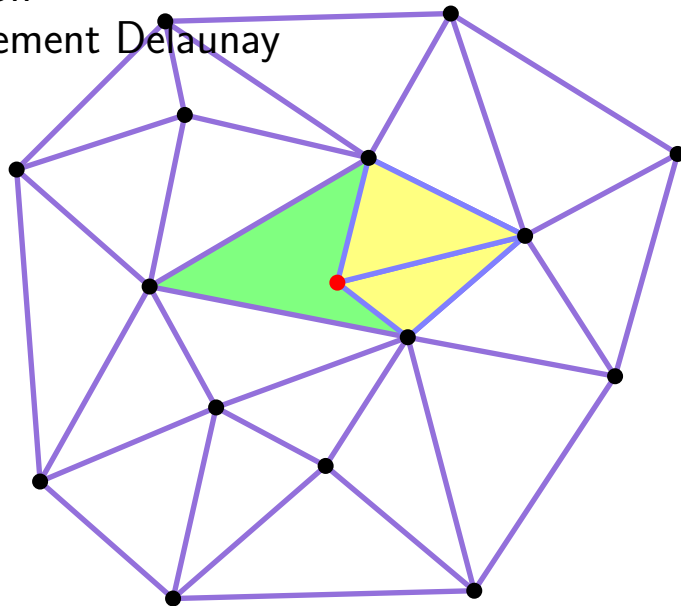
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

OUI

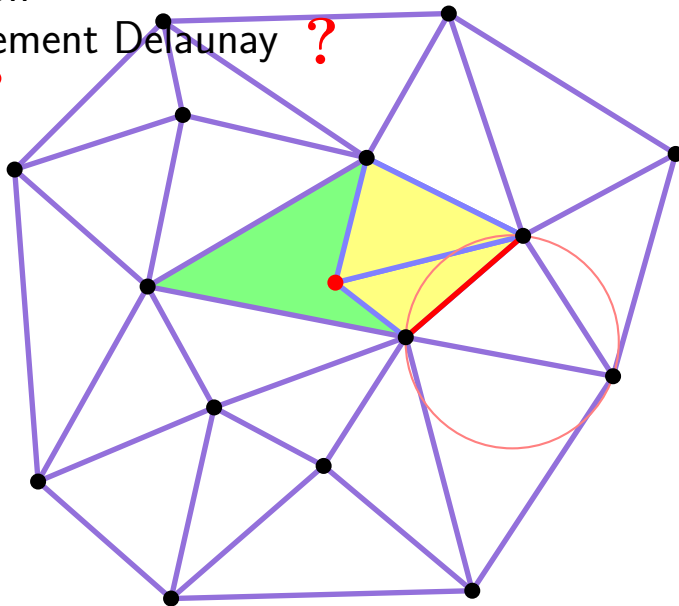


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



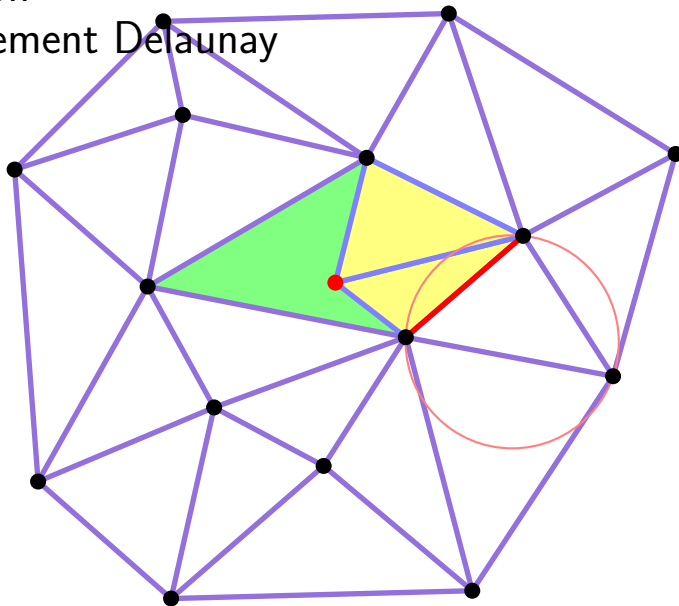
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

NON

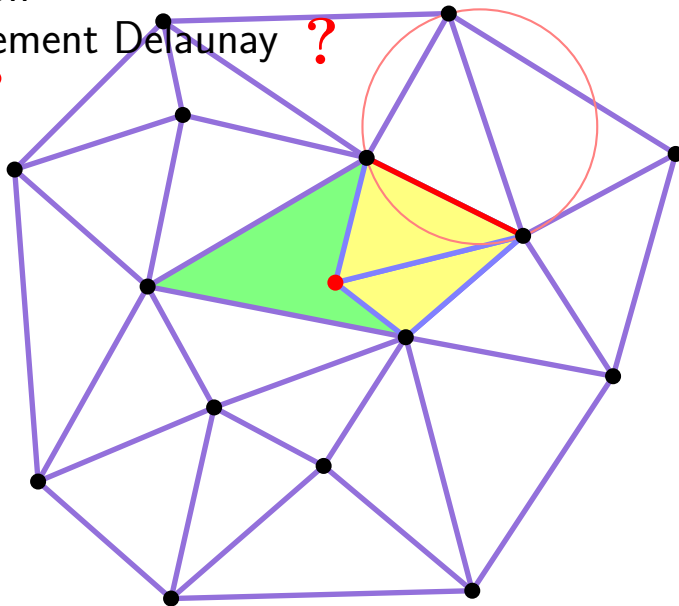


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



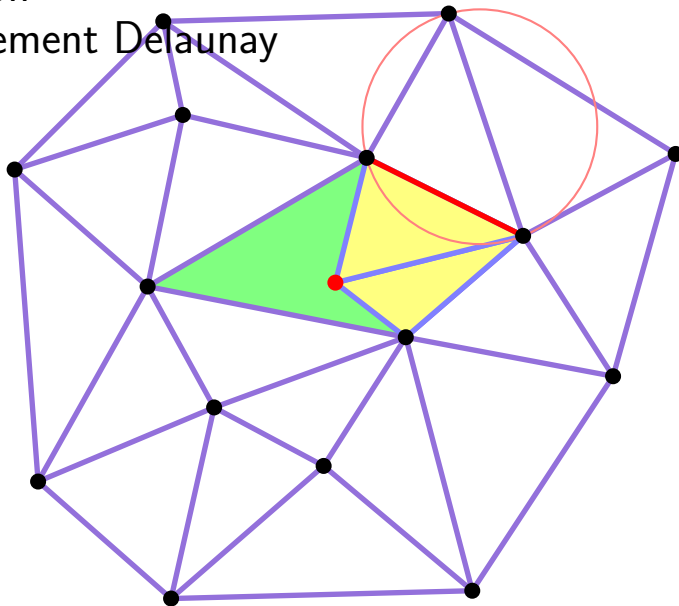
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

NON

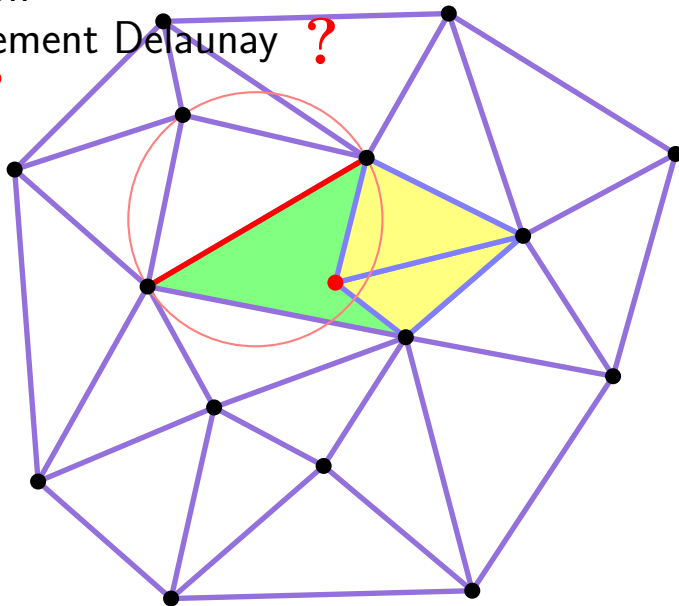


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



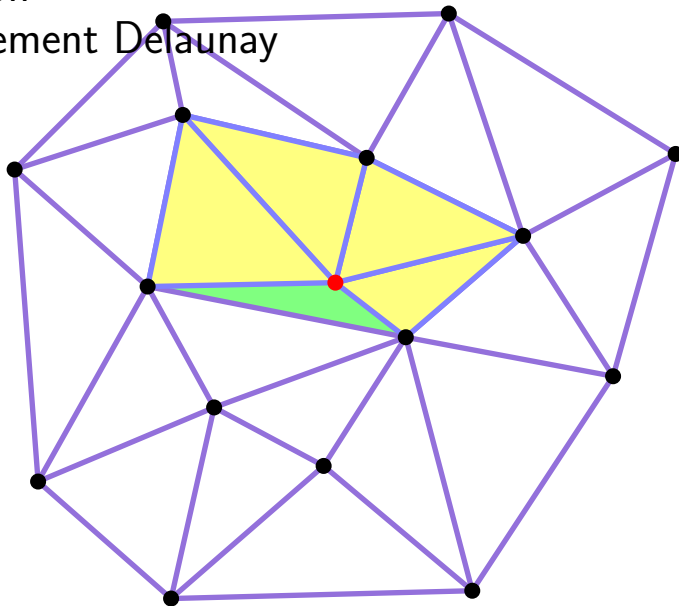
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

OUI

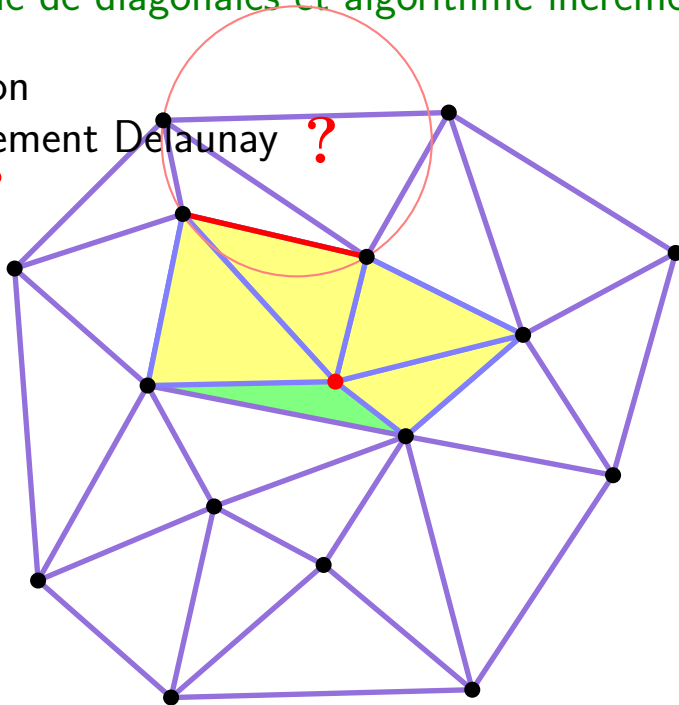


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



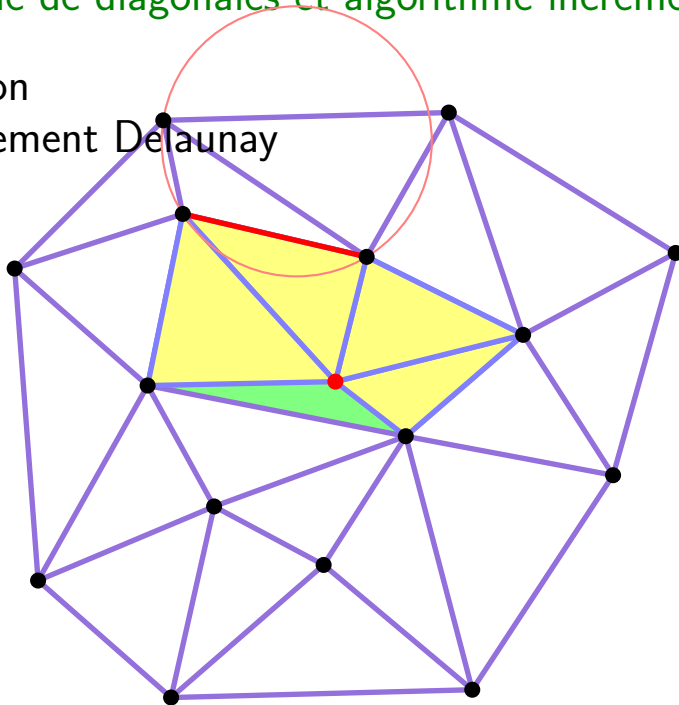
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

NON

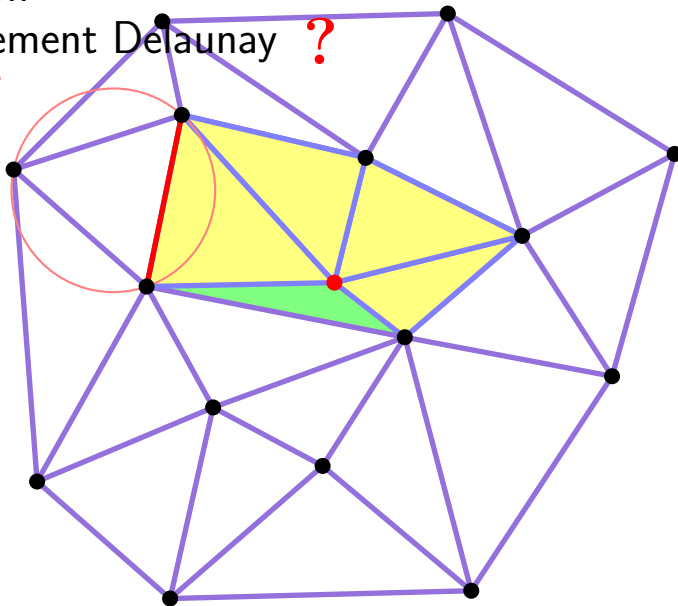


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



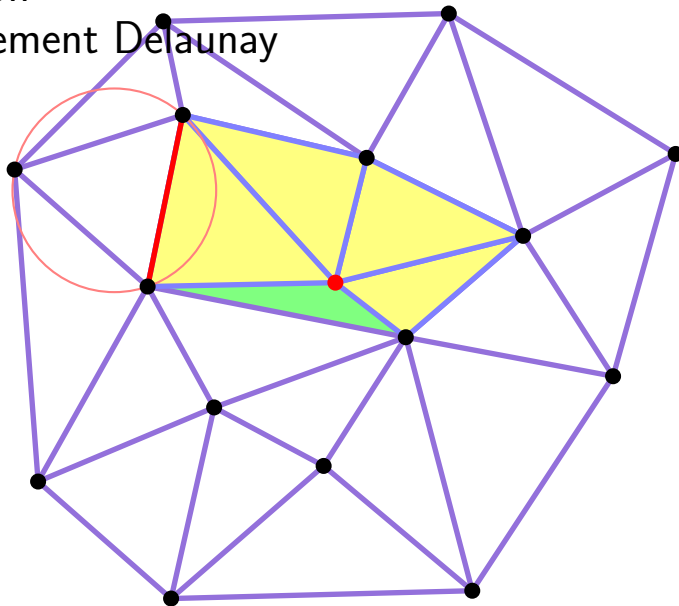
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

NON

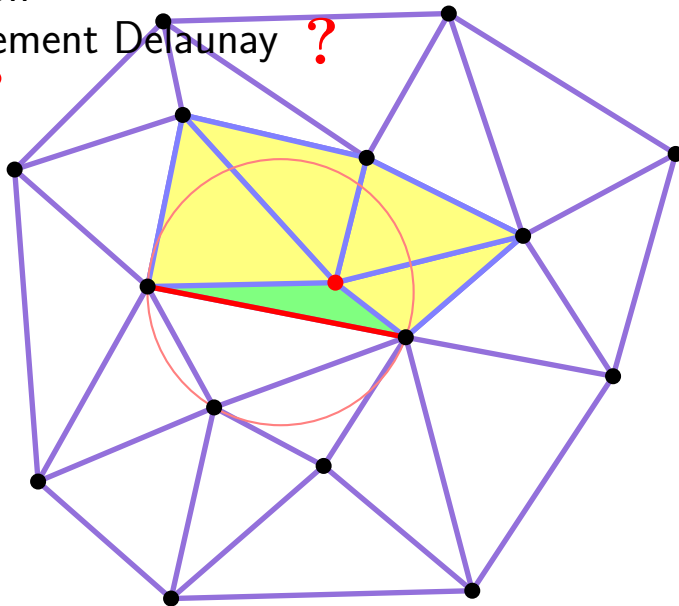


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



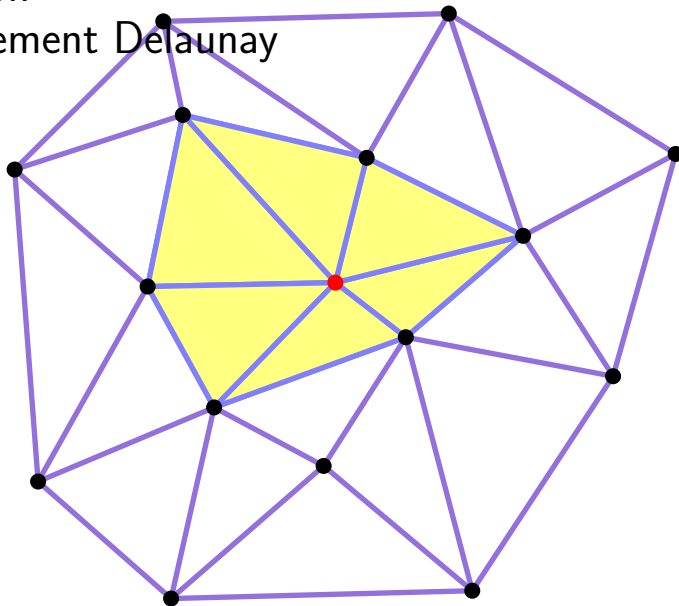
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

OUI

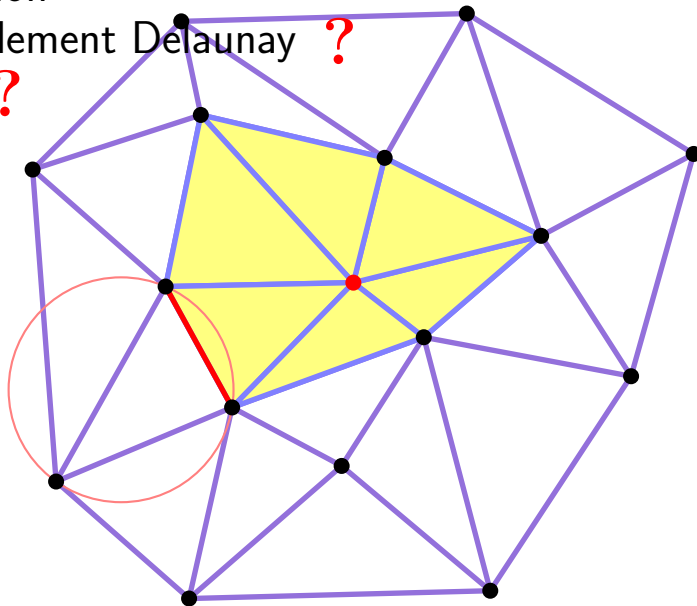


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



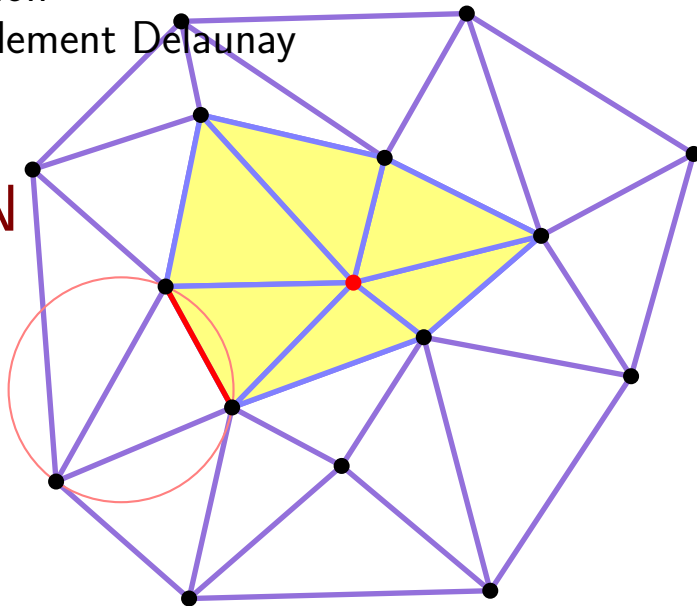
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

NON

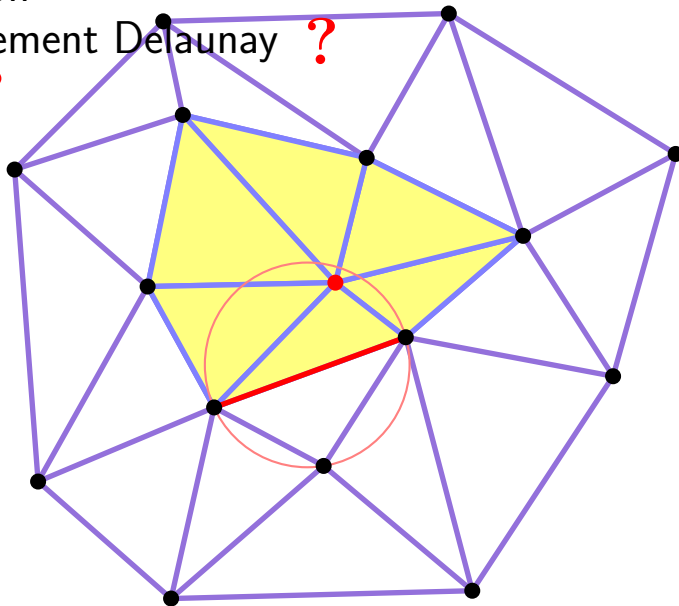


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



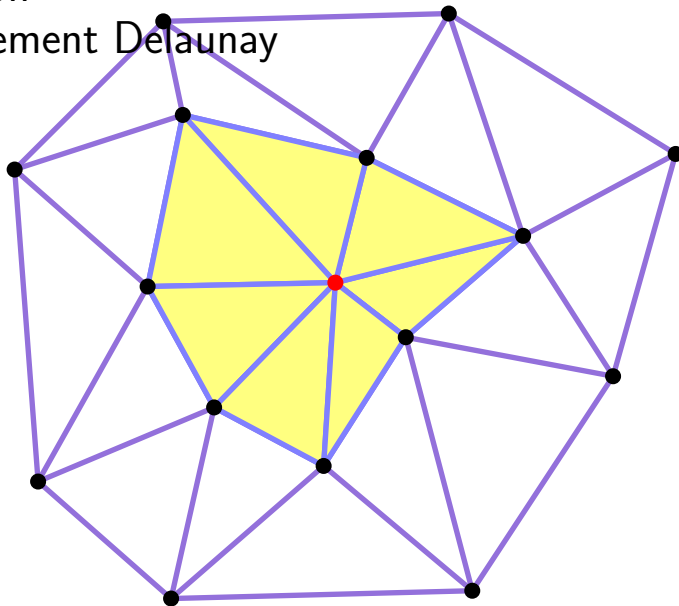
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

OUI

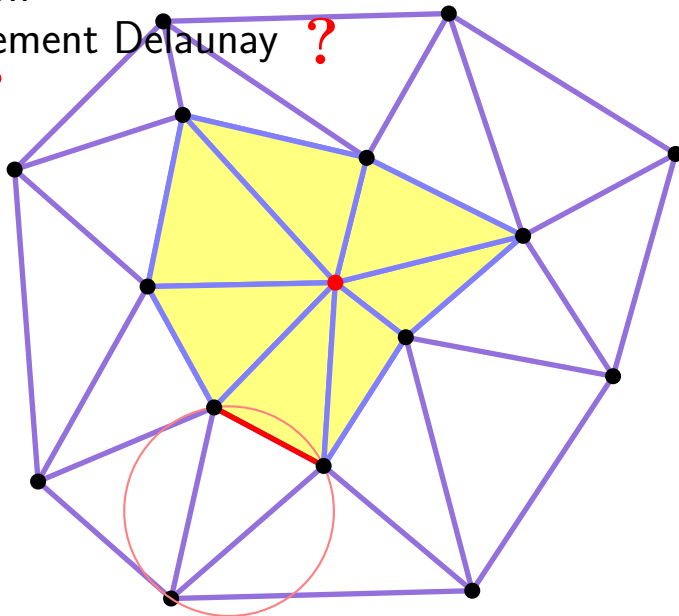


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



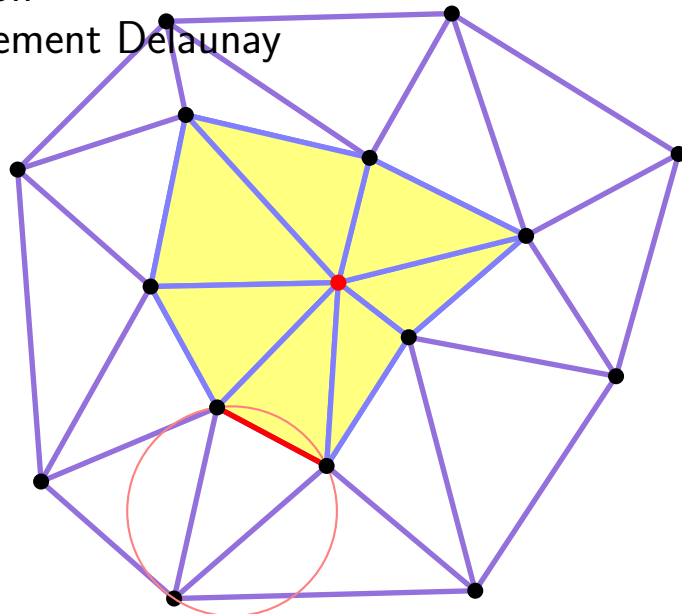
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

Bascule

NON

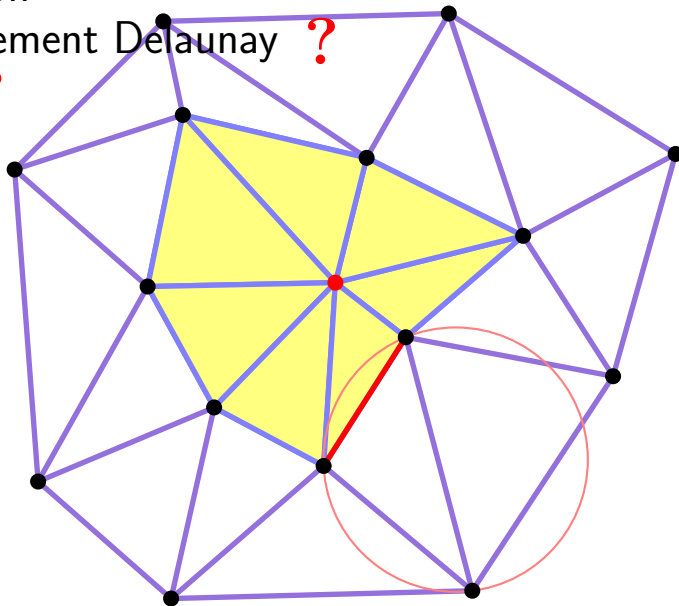


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay ?

Bascule ?



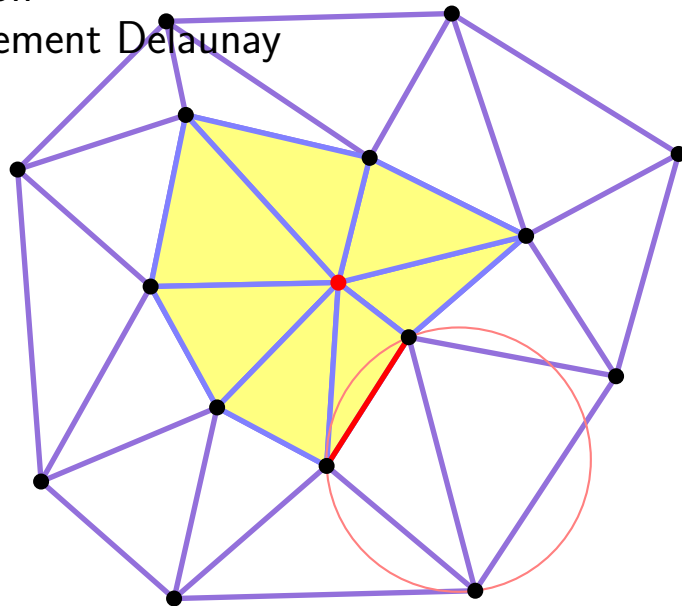
Bascule de diagonales et algorithme incrémental

Localisation

Non localement Delaunay

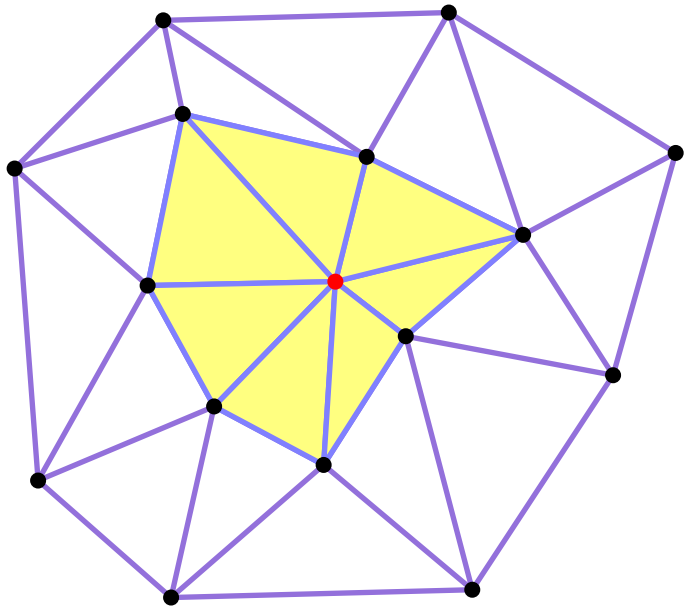
Bascule

NON

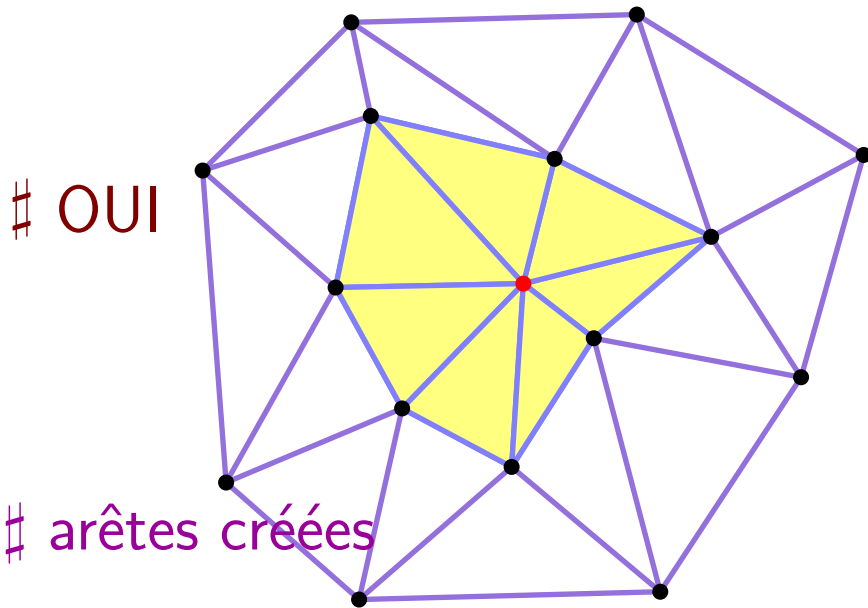


Bascule de diagonales et algorithme incrémental

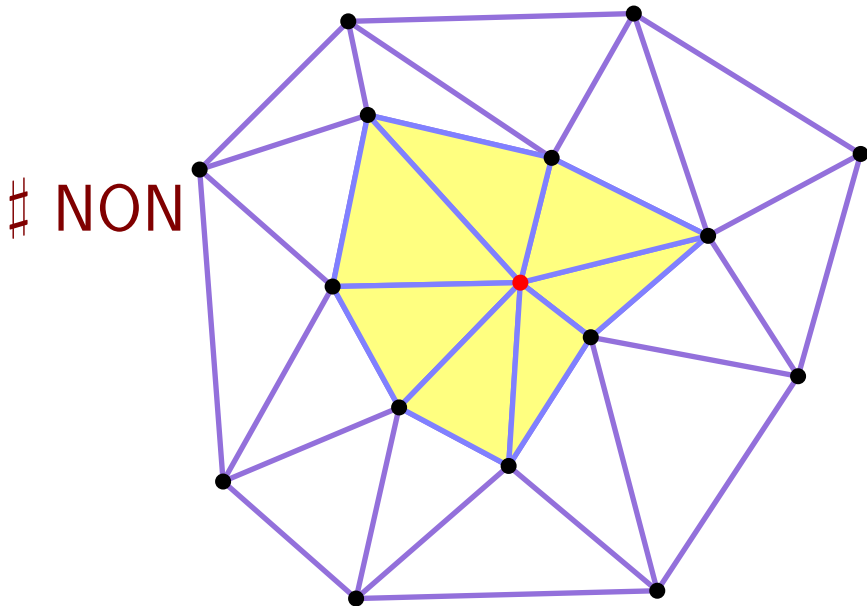
OUI



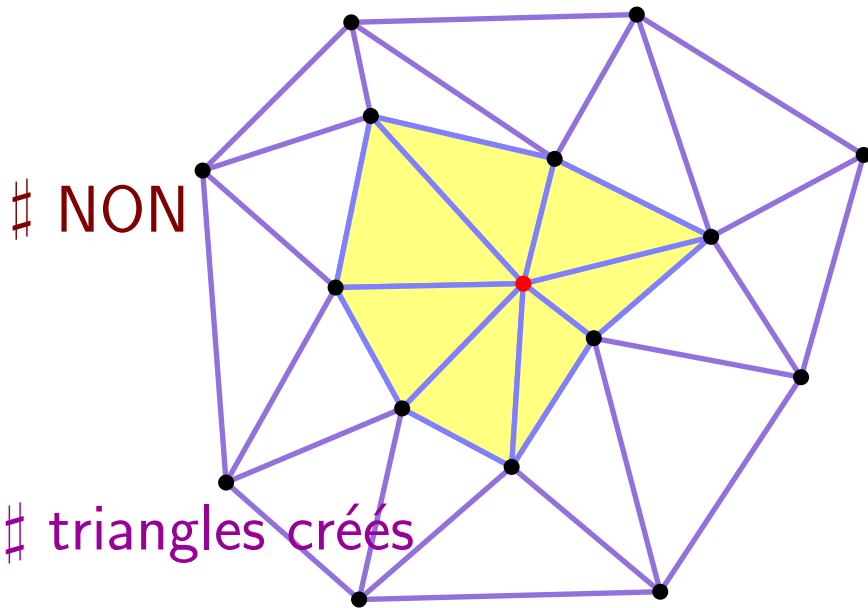
Bascule de diagonales et algorithme incrémental



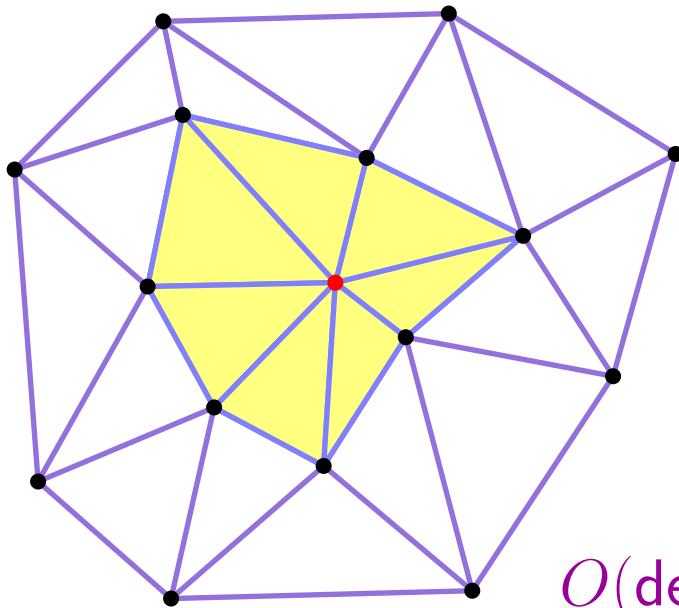
Bascule de diagonales et algorithme incrémental



Bascule de diagonales et algorithme incrémental



Bascule de diagonales et algorithme incrémental



$$O(\text{degré}(\bullet))$$



C'est tout pour aujourd'hui