Examen Maîtrise 2002-2003 : géométrie algorithmique

1 Nombre de triangulations

On a un ensemble de n points dans le plan, et on va considérer des graphes ayant ces points comme sommets et en particulier des triangulations.

1) Quel est le nombre d'arêtes du graphe complet ?

Correction: $\frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n^2}{2}$

2) Montrer que le nombre de graphes possibles ayant les n points comme sommet est inférieur à $2^{\frac{n^2}{2}}$.

Correction: Pour chaque arête du graphe complet on doit dire si elle appartient ou non au sous-graphe. C'est à dire $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \leq 2^{\frac{n^2}{2}}$.

3a) Rappeler le nombre d'arête dans une triangulation de n points.

3b) La borne sur le nombre de graphe est bien évidemment une borne sur le nombre de triangulations. Montrer pour le nombre de triangulations une meilleure borne de $n^(6n)$.

Correction: Avec la relation d'Euler on sait qu'il y a moins de $3n$ arêtes dans une triangulation, et que ce nombre k est fixe pour un ensemble de points donné. Donc le nombre de triangulations est inférieur à $\begin{pmatrix} k \\ n(n-1)/2 \end{pmatrix} \leq$ $(n^2)^k \leq (n^2)^{3n} \leq n^(6n)$.

3c) Comparer les résultats des questions 2 et 3b.

Correction:

$$2^{\frac{n^2}{2}} = \exp(\frac{\log 2}{2} n^2)$$
$$n^(6n) = \exp(6n \log n)$$

Le nombre de triangulations est négligeable devant le nombre de graphes.

4) À partir de maintenant on va supposer que les points $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$ sont en position convexe. On note $T(n)$ le nombre de triangulation d'un convexe à n sommets ($T(3) = 1$, $T(4) = 2$).

4a) Combien vaut $T(5)$, dessiner les triangulations correspondantes.

Correction: $T(5) = 5$

4b) En considérant l'indice i tel que le point p_i forme un triangle avec l'arête de l'enveloppe convexe $p_1 p_2$, établir une relation entre $T(n)$ et les $T(i)$, $2 \leq i \leq n-1$.

Correction:

$$T(n) = \sum_{i=2}^{n-1} T(i) \cdot T(n-i+1).$$

4c) Calculer $T(6)$

Correction:

$$T(2) = 1$$
$$T(3) = 1$$
$$T(4) = T(2) * T(3) + T(3) * T(2) = 1 + 1 = 2$$
$$T(5) = T(2) * T(4) + T(3) * T(3) + T(4) * T(2) = 2 + 1 + 2 = 5$$
$$T(6) = T(2)*T(5)+T(3)*T(4)+T(4)*T(3)+T(5)*T(2) = 5+2+2+5 = 14$$

4d) Montrer que pour $n \geq 5$ on a $T(n) \geq 2^{n-3}$.

Correction: La relation est vraie pour $n = 5, 6$: $T(5) = 5 > 2^2 = 4$, $T(6) = 14 > 2^3 = 8$.

Supposons qu'elle soit vrai pour $k < n$, en appliquant l'équation ci dessus on a

$$T(n) = \sum_{i=2}^{n-1} T(i) \cdot T(n-i+1) \geq T(2) \cdot T(n-1) + T(n-1) \cdot T(2)$$

$$= 2T(n-1) \geq 2^{n-1-3+1} = 2^{n-3}$$

4e) Calculer $T(10)$ et montrer que $T(n) \geq 3^{n-4}$.

Correction:

$$T(7) = 1 * 14 + 1 * 5 + 2 * 2 + 5 * 1 + 14 * 1 = 42$$

$$T(8) = 1 * 42 + 1 * 14 + 2 * 5 + 5 * 2 + 14 * 1 + 42 * 1 = 132$$
$$T(9) = 1 * 132 + 1 * 42 + 2 * 14 + 5 * 5 + 14 * 2 + 42 * 1 + 132 * 1 = 429$$
$$T(10) = 1*429+1*132+2*42+5*14+14*5+42*2+132*1+429*1 = 1430$$
$$T(10) = 1430 > 3^6 = 729$$
$$T(n) = \sum_{i=2}^{n-1} T(i) \cdot T(n-i+1)$$
$$\geq T(2) \cdot T(n-1) + T(3) \cdot T(n-2) + T(n-2) \cdot T(3) + T(n-1) \cdot T(2)$$
$$= 2T(n-1) + 2T(n-2) \geq 3T(n-1) \geq 3^{n-1-4+1} = 3^{n-4}$$

En fait $T(n)$ est un nombre de Catalan :

$$T(n) = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 2n-4 \\ n-2 \end{pmatrix}$$

2 Changement du diamètre

Scénario :
Le diamètre d'un ensemble de points est la distance maximal entre deux points de l'ensemble. Si on introduit un à un des points distribués aléatoirement sur un cercle, combien de fois en moyenne est-ce que le diamètre des points a changé après l'insertion du $n$ième point ?

Détails techniques :
Soit $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ un ensemble de n points distribués aléatoirement sur un cercle et $\pi = (p_{j_1}, p_{j_2}, ..., p_{j_n})$ une permutations aléatoire de $\mathcal{P}$ (choisi avec probabilité $\frac{1}{n!}$ parmi toutes les permutations possibles). On appelle $diam_i$ le diamètre des i premiers points de π, $\{p_{j_1},\ p_{j_2}, ...,\ p_{j_i}\}$.

On considère la suite

$$diam_2,\ diam_3,\ ...,\ diam_n,$$

et on cherche a déterminé combien de fois on moyenne $diam_i \neq diam_{i-1},\ i = 2..n$.

1. Soit X_i la variable aléatoire qui décrit si le diamètre a changé après l'insertion du $i$ème point. Donc,

$$X_i = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } diam_i = diam_{i-1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right\}$$

   Déterminer l'espérance $E(X_i)$. (Donc, la probabilité que X_i vaut un.)

2. Soit X la variable aléatoire qui décrit le nombre de changements totale du diamètre. Donc,

$$X = \sum_{i=2}^{n} X_i$$

   Déterminer le nombre de changements du diamètre en moyenne, donc l'espérance $E(X)$. Donner aussi son ordre de grandeur.

Expliquer vos solution.

Correction:

1. $E(X_i) = \frac{2}{i}$
2. $E(X) = 2H_n - 2 = O(\log n)$

3 Graphe de Gabriel

Étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de n points du plan, on appelle Graphe de Gabriel le graphe ayant pour sommet ces points, une arête relie deux points $p, q \in \mathcal{S}$ si et seulement si le cercle de diamètre pq est vide.

1) Pourquoi le graphe de Gabriel est un sous-graphe de Delaunay ?

Correction:Une arête est de Delaunay si il existe un cercle vide passant par les deux extrémités, le cercle de diamètre les deux points est un tel cercle.

2) Montrer qu'une arête de Delaunay est de Gabriel si et seulement si les angles opposés à l'arête dans les deux triangles incidents sont aigus.

Correction:Géométrie du lycée :-)

3) Pour quatre points en position convexe, combien y a-t-il d'arêtes de Gabriel ? Dessiner les différentes configurations.

Correction:Il y a 4 arêtes de l'enveloppe convexe et la diagonale dans la triangulation de Delaunay.
Tout le monde de Gabriel, facile.
Seulement 3 ou 4 arêtes de l'enveloppe convexe de Gabriel, pas dur.
Les arêtes pas de Gabriel sont opposées à un angle obtus, Il y a deux triangles, donc au plus deux angles obtus donc au moins $5 - 2 = 3$ arêtes de Gabriel.

4) Montrer qu'il y a $\Omega(n)$ arêtes dans le graphe de Gabriel.

Correction:On a $3n$ arêtes, mais seulement $2n$ triangles et donc $2n$ angles obtus. Il reste donc au moins n arêtes de Gabriel.

5) Expliquer comment calculer le graphe de Gabriel, donner la complexité.

Correction:Calculer Delaunay, pour chaque arête regarder si le centre du diamètre appartient à l'arête de Delaunay duale (définie par les deux triangles adjacents à l'arête).

6) Borne inférieure pour le calcul du graphe de Gabriel.

Correction: Comme pour Delaunay $\Omega(n \log n)$. Si on a un problème de tri, on projette les points sur la demi-parabole, les cercles ayant les extrémités de leur diamètre sur la demi-parabole ne recoupe pas la demi-parabole. Les arêtes nous définissant l'ordre en x des points appartienne donc à Gabriel. Si je savais calculer Gabriel plus vite que $n \log n$ j'arriverai à trier plus vite que $n \log n$.