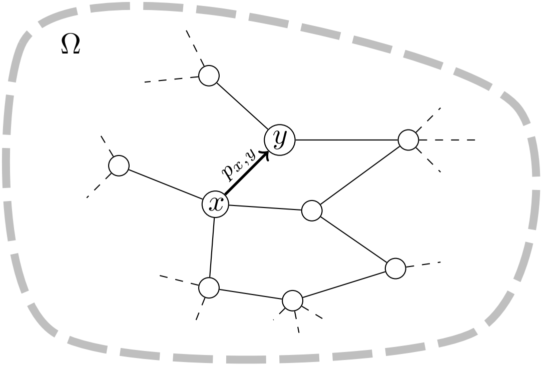
Dynamique de Glauber sur les graphes de treewidth bornées et les graphes cordaux

Marc Heinrich

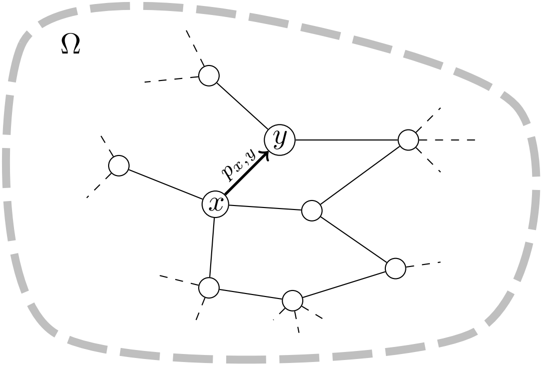
School of Computing, University of Leeds, UK

16 novembre 2020

Graphe de configurations (= espace d'états) :



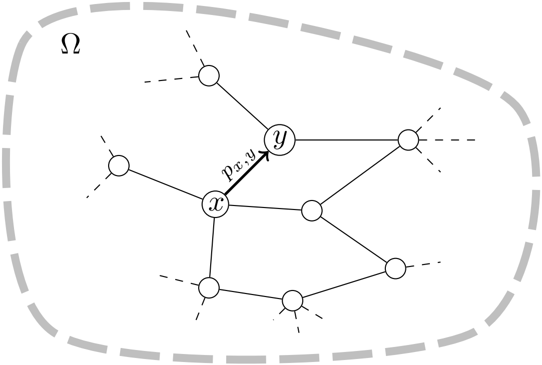
Graphe de configurations (= espace d'états) :



- Suite de variables aléatoires $X_0, X_1, \ldots, X_t$.

Chaîne de Markov

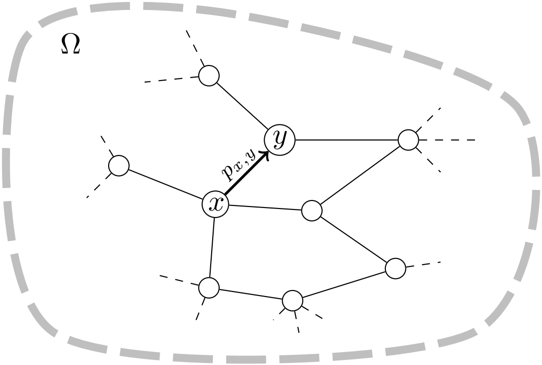
Graphe de configurations (= espace d'états) :



- Suite de variables aléatoires $X_0, X_1, \ldots, X_t$.
- Aussi représenté par la matrice d'adjacence P.

Chaîne de Markov

Graphe de configurations (= espace d'états) :



- Suite de variables aléatoires $X_0, X_1, \ldots, X_t$.
- Aussi représenté par la matrice d'adjacence P.
- Cas plus simple : $p_{x,y} = p_{y,x} = p$.

Dynamique de Glauber

Définition

Dynamique de Glauber :

- Ω : ensemble des k-colorations d'un graphe G fixé.

Définition

Dynamique de Glauber :

- Ω : ensemble des k-colorations d'un graphe G fixé.

$$p_{\sigma,\eta} = \begin{cases} \frac{1}{kn} & \text{si } \sigma \text{ et } \eta \text{ diffèrent sur un seul sommet.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition

Dynamique de Glauber :

- Ω : ensemble des k-colorations d'un graphe G fixé.

$$p_{\sigma,\eta} = \begin{cases} \frac{1}{kn} & \text{si } \sigma \text{ et } \eta \text{ diffèrent sur un seul sommet.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Graphe de configurations : $\mathcal{G}(G, k)$.

Définition

Dynamique de Glauber :

- Ω : ensemble des k-colorations d'un graphe G fixé.

$$p_{\sigma,\eta} = \begin{cases} \frac{1}{kn} & \text{si } \sigma \text{ et } \eta \text{ diffèrent sur un seul sommet.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Graphe de configurations : $\mathcal{G}(G, k)$.

Définition alternative :

Dynamique de Glauber

Définition

Dynamique de Glauber :

- Ω : ensemble des k-colorations d'un graphe G fixé.

$$p_{\sigma,\eta} = \begin{cases} \frac{1}{kn} & \text{si } \sigma \text{ et } \eta \text{ diffèrent sur un seul sommet.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Graphe de configurations : $\mathcal{G}(G, k)$.

Définition alternative :

- choisir un sommet v et une couleur c uniformément,
- recolorer v avec la couleur c, si possible.

Temps de mélange

- Si $\mathcal{G}(G, k)$ est connexe, alors $X_t \to \pi$ lorsque $t \to +\infty$.
  π : distribution uniforme.

Temps de mélange

- Si $\mathcal{G}(G, k)$ est connexe, alors $X_t \to \pi$ lorsque $t \to +\infty$.
  π : distribution uniforme.
- Par exemple si $k \geq \Delta + 2$.

Temps de mélange

- Si $\mathcal{G}(G, k)$ est connexe, alors $X_t \to \pi$ lorsque $t \to +\infty$.
  π : distribution uniforme.
- Par exemple si $k \geq \Delta + 2$.

Définition

Temps de mélange $\tau(G, k)$: temps t minimum tel que X_t soit suffisamment 'proche' de π.

Temps de mélange

- Si $\mathcal{G}(G,k)$ est connexe, alors $X_t \to \pi$ lorsque $t \to +\infty$.
  π : distribution uniforme.
- Par exemple si $k \geq \Delta + 2$.

Définition

Temps de mélange $\tau(G,k)$: temps t minimum tel que X_t soit suffisamment 'proche' de π.

Questions

- Si $\mathcal{G}(G,k)$ est connexe, quel est le temps de mélange ?
- Est-il polynômial (en fonction de $|G|$) ?

Motivation 1 : Génération aléatoire

Algorithmes de génération aléatoire par la méthode Monte Carlo Markov Chain (MCMC) :

Motivation 1 : Génération aléatoire

Algorithmes de génération aléatoire par la méthode Monte Carlo Markov Chain (MCMC) :

1. partir d'une coloration initiale arbitraire ;
2. simuler la chaîne pendant t étapes et retourner le résultat.

Motivation 1 : Génération aléatoire

Algorithmes de génération aléatoire par la méthode Monte Carlo Markov Chain (MCMC) :

1. partir d'une coloration initiale arbitraire ;
2. simuler la chaîne pendant t étapes et retourner le résultat.

- Algorithme obtenu est très simple.
- Méthode efficace uniquement si le temps de mélange est polynômial.

Motivation 2 : problèmes de comptage

- Déterminer le nombre de solutions à un problème (ex : compter le nombre de k-colorations).

Motivation 2 : problèmes de comptage

- Déterminer le nombre de solutions à un problème (ex : compter le nombre de k-colorations).
- Compter de façon exacte est souvent difficile (i.e., #P-complet).

Motivation 2 : problèmes de comptage

- Déterminer le nombre de solutions à un problème (ex : compter le nombre de k-colorations).
- Compter de façon exacte est souvent difficile (i.e., #P-complet).
- Compter approximativement le nombre de solution ‘$\Leftrightarrow$’ Générer une solution aléatoire uniforme

Motivation 2 : problèmes de comptage

- Déterminer le nombre de solutions à un problème (ex : compter le nombre de k-colorations).
- Compter de façon exacte est souvent difficile (i.e., #P-complet).
Compter approximativement le nombre de solution	'$\Leftrightarrow$'	Générer une solution aléatoire uniforme

  Exemple : compter le nombre d'indépendants.

Motivation 2 : problèmes de comptage

- Déterminer le nombre de solutions à un problème (ex : compter le nombre de k-colorations).
- Compter de façon exacte est souvent difficile (i.e., #P-complet).
- Compter approximativement le nombre de solution '$\Leftrightarrow$' Générer une solution aléatoire uniforme

Exemple : compter le nombre d'indépendants.

- X : indépendant aléatoire uniforme.
- S : indépendent fixé.
- v : sommet de S.

$$\mathbb{P}(X = S) = \mathbb{P}(v \in X) \cdot \mathbb{P}(X = S | v \in X)$$

Motivation 2 : problèmes de comptage

- Déterminer le nombre de solutions à un problème (ex : compter le nombre de k-colorations).
- Compter de façon exacte est souvent difficile (i.e., #P-complet).
- Compter approximativement le nombre de solution ‘$\Leftrightarrow$’ Générer une solution aléatoire uniforme

Exemple : compter le nombre d'indépendants.

- X : indépendant aléatoire uniforme.
- S : indépendent fixé.
- v : sommet de S.

$$\frac{1}{\#IS(G)} = \mathbb{P}(v \in X) \cdot \frac{1}{\#IS(G - N(v))}$$

Motivation 3 : Reconfiguration

- Questions relatives au graphes de configuration.

- Questions relatives au graphes de configuration.
- Connectivité ? Diamètre ?

Motivation 3 : Reconfiguration

- Questions relatives au graphes de configuration.
- Connectivité ? Diamètre ?
- La connectivité du graphe de configurations est nécessaire pour la méthode MCMC.

Motivation 3 : Reconfiguration

- Questions relatives au graphes de configuration.
- Connectivité ? Diamètre ?
- La connectivité du graphe de configurations est nécessaire pour la méthode MCMC.
- Le diamètre est une borne inférieure sur le temps de mélange.

Physique statistique : Modèle de Potts

- Modèle simple d'interaction de particules

Physique statistique : Modèle de Potts

- Modèle simple d'interaction de particules
  - chaque particule est représentée par un sommet d'un graphe.
  - les arêtes représentent les interactions entre les particules.
  - chaque particule peut avoir plusieurs états possibles.

Physique statistique : Modèle de Potts

- Modèle simple d'interaction de particules
  - chaque particule est représentée par un sommet d'un graphe.
  - les arêtes représentent les interactions entre les particules.
  - chaque particule peut avoir plusieurs états possibles.

- Cas particulier du modèle de Potts (antiferromagnétique, température nulle).

Physique statistique : Modèle de Potts

- Modèle simple d'interaction de particules
  - chaque particule est représentée par un sommet d'un graphe.
  - les arêtes représentent les interactions entre les particules.
  - chaque particule peut avoir plusieurs états possibles.
- Cas particulier du modèle de Potts (antiferromagnétique, température nulle).
- Questions relatives à des propriétés de la distribution stationnaire.

- Modèle simple d'interaction de particules
  - chaque particule est représentée par un sommet d'un graphe.
  - les arêtes représentent les interactions entre les particules.
  - chaque particule peut avoir plusieurs états possibles.
- Cas particulier du modèle de Potts (antiferromagnétique, température nulle).
- Questions relatives à des propriétés de la distribution stationnaire.
- Influence des 'conditions aux bords' ?

- Modèle simple d'interaction de particules
  - chaque particule est représentée par un sommet d'un graphe.
  - les arêtes représentent les interactions entre les particules.
  - chaque particule peut avoir plusieurs états possibles.
- Cas particulier du modèle de Potts (antiferromagnétique, température nulle).
- Questions relatives à des propriétés de la distribution stationnaire.
- Influence des 'conditions aux bords' ?
- Dans certains cas, l'absence d'influence est équivalent à un temps de mélange polynômial.

Physique statistique : Modèle de Potts

- Modèle simple d'interaction de particules
  - chaque particule est représentée par un sommet d'un graphe.
  - les arêtes représentent les interactions entre les particules.
  - chaque particule peut avoir plusieurs états possibles.
- Cas particulier du modèle de Potts (antiferromagnétique, température nulle).
- Questions relatives à des propriétés de la distribution stationnaire.
- Influence des 'conditions aux bords' ?
- Dans certains cas, l'absence d'influence est équivalent à un temps de mélange polynômial.
- Certaines techniques de preuves sont similaires.

Conjecture

La dynamique de Glauber sur un graphe G avec $\Delta + 2$ couleurs a un temps de mélange polynômial.

. [Vigoda, 1999], [Delcourt, Perarnau, Postle, 2018], [Chen, Moitra, 2018], [Dyer, Frieze, Hayes, Vigoda, 2004], [Hayes, Vera, Vigoda, 2015]

Conjecture

La dynamique de Glauber sur un graphe G avec $\Delta + 2$ couleurs a un temps de mélange polynômial.

Le temps de mélange est polynômial dans les cas suivant :

Classe de graphe	nombre de couleurs	Ref
Cas général	$\frac{11}{6}\Delta$	[Vig99]
	$(\frac{11}{6} - \varepsilon_0)\Delta$	[DPP18, CM18]
Maille 5, $\Delta \geq \Delta_0$	1.763Δ	[DFHV04]
Maille 6, $\Delta \geq \Delta_0$	1.489Δ	[DFHV04]
Planaires	$O(\frac{\Delta}{\log \Delta})$	[HVV15]

. [Vigoda, 1999], [Delcourt, Perarnau, Postle, 2018], [Chen, Moitra, 2018], [Dyer, Frieze, Hayes, Vigoda, 2004], [Hayes, Vera, Vigoda, 2015]

Résultats connus 2/2

Le temps de mélange est polynômial dans les cas suivant :

Classe de graphe	nombre de couleurs	Ref
$\mathrm{tw}(G)$ et Δ bornés	$\Delta + 2$	[BKMP05]
$\mathrm{tw}(G)$ borné	$(1 + \varepsilon)(\Delta + 1)$	[Var18]

. [Berger, Kenyon, Mossel, Peres, 2005], [Vardi, 2018]

Résultats connus 2/2

Le temps de mélange est polynômial dans les cas suivant :

Classe de graphe	nombre de couleurs	Ref
$\mathrm{tw}(G)$ et Δ bornés	$\Delta + 2$	[BKMP05]
$\mathrm{tw}(G)$ borné	$(1+\varepsilon)(\Delta+1)$	[Var18]
$\mathrm{tw}(G)$ borné	$\Delta + 2$	[here]

. [Berger, Kenyon, Mossel, Peres, 2005], [Vardi, 2018]

Résultats connus 2/2

Le temps de mélange est polynômial dans les cas suivant :

Classe de graphe	nombre de couleurs	Ref
$\mathrm{tw}(G)$ et Δ bornés	$\Delta + 2$	[BKMP05]
$\mathrm{tw}(G)$ borné	$(1+\varepsilon)(\Delta+1)$	[Var18]
$\mathrm{tw}(G)$ borné	$\Delta + 2$	[here]
graphe cordaux	$(1+\varepsilon)(\Delta+1)$	[here]

. [Berger, Kenyon, Mossel, Peres, 2005], [Vardi, 2018]

Graphes de treewidth bornée

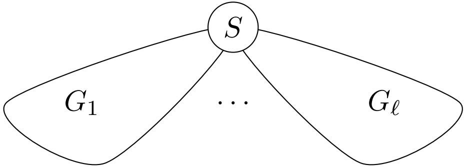
Idée générale :

- G un graphe de treewidth bornée.

Graphes de treewidth bornée

Idée générale :

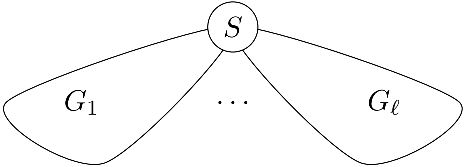
- G un graphe de treewidth bornée.
- Il existe un séparateur S de taille au plus $\mathrm{tw}(G) + 1$.



Graphes de treewidth bornée

Idée générale :

- G un graphe de treewidth bornée.
- Il existe un séparateur S de taille au plus $\mathrm{tw}(G) + 1$.



Objectif

- Se ramener à l'étude de chaque composante.
- i.e., borner $\tau(G)$ en fonction des $\tau(G_i)$.

Coloration par liste

Définition

Coloration par liste : à chaque sommet v est attribué une liste de couleur $L(v)$. Une L-coloration est une coloration σ telle que $\sigma(v) \in L(v)$.

Coloration par liste

Définition

Coloration par liste : à chaque sommet v est attribué une liste de couleur $L(v)$. Une L-coloration est une coloration σ telle que $\sigma(v) \in L(v)$.

Coloration par liste

Définition

Coloration par liste : à chaque sommet v est attribué une liste de couleur $L(v)$. Une L-coloration est une coloration σ telle que $\sigma(v) \in L(v)$.

- Remplace $k \geq \Delta + 2$ par $|L(v)| \geq \deg(v) + 2$ pour tout v.

Coloration par liste

Définition

Coloration par liste : à chaque sommet v est attribué une liste de couleur $L(v)$. Une L-coloration est une coloration σ telle que $\sigma(v) \in L(v)$.

- Remplace $k \geq \Delta + 2$ par $|L(v)| \geq \deg(v) + 2$ pour tout v.
- $\tau(G) = \max_L(\tau(G, L))$.

Coloration par liste

Définition

Coloration par liste : à chaque sommet v est attribué une liste de couleur $L(v)$. Une L-coloration est une coloration σ telle que $\sigma(v) \in L(v)$.

- Remplace $k \geq \Delta + 2$ par $|L(v)| \geq \deg(v) + 2$ pour tout v.
- $\tau(G) = \max_L(\tau(G, L))$.
- Fixer la couleur d'un sommet est équivalent à :
  - enlever ce sommet ;
  - enlever sa couleur des listes des voisins.

Définition

Coloration par liste : à chaque sommet v est attribué une liste de couleur $L(v)$. Une L-coloration est une coloration σ telle que $\sigma(v) \in L(v)$.

- Remplace $k \geq \Delta + 2$ par $|L(v)| \geq \deg(v) + 2$ pour tout v.
- $\tau(G) = \max_L(\tau(G, L))$.
- Fixer la couleur d'un sommet est équivalent à :
  - enlever ce sommet ;
  - enlever sa couleur des listes des voisins.

  On a toujours $|L(v)| \geq \deg(v) + 2$ après la transformation.

Décomposition de Chaine de Markov

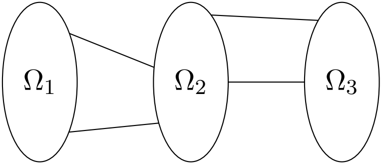
Idée générale :

. [Jerrum, Son, Tetali, Vigoda, 2004]

Décomposition de Chaine de Markov

Idée générale :

- Partitionner l'espace d'états : $\Omega_1, \ldots, \Omega_\ell$.

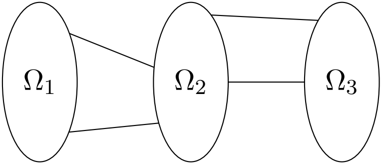


. [Jerrum, Son, Tetali, Vigoda, 2004]

Décomposition de Chaine de Markov

Idée générale :

- Partitionner l'espace d'états : $\Omega_1, \ldots, \Omega_\ell$.



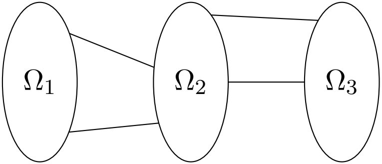
- Deux types de chaînes :
  - Chaînes restreintes à chaque Ω_i ;

. [Jerrum, Son, Tetali, Vigoda, 2004]

Décomposition de Chaine de Markov

Idée générale :

- Partitionner l'espace d'états : $\Omega_1, \ldots, \Omega_\ell$.



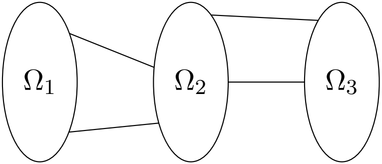
- Deux types de chaînes :
  - Chaînes restreintes à chaque Ω_i ;
  - Chaîne projetée obtenue en contractant chaque Ω_i en un seul sommet.

. [Jerrum, Son, Tetali, Vigoda, 2004]

Décomposition de Chaine de Markov

Idée générale :

- Partitionner l'espace d'états : $\Omega_1, \ldots, \Omega_\ell$.



- Deux types de chaînes :
  - Chaînes restreintes à chaque Ω_i ;
  - Chaîne projetée obtenue en contractant chaque Ω_i en un seul sommet.

Lemme (informel) [JSPV04]

On peut borner le temps de mélange de la chaîne totale en fonction des temps de mélange des deux types de chaînes ci dessus.

. [Jerrum, Son, Tetali, Vigoda, 2004]

Application à la dynamique de Glauber

- v : sommet de G.
- Partitionner Ω en fonction de la valeur prise en v :

$$\Omega_i = \{\sigma, \quad \sigma(v) = i\} \; .$$

Application à la dynamique de Glauber

- v : sommet de G.
- Partitionner Ω en fonction de la valeur prise en v :

$$\Omega_i = \{\sigma, \quad \sigma(v) = i\} .$$

- Chaîne restreinte : dynamique de Glauber où la couleur de v est fixée.

Application à la dynamique de Glauber

- v : sommet de G.
- Partitionner Ω en fonction de la valeur prise en v :

$$\Omega_i = \{\sigma, \quad \sigma(v) = i\} \; .$$

- Chaîne restreinte : dynamique de Glauber où la couleur de v est fixée.
  $\Rightarrow$ bornée par induction.

Application à la dynamique de Glauber

- v : sommet de G.
- Partitionner Ω en fonction de la valeur prise en v :

$$\Omega_i = \{\sigma, \quad \sigma(v) = i\} \; .$$

- Chaîne restreinte : dynamique de Glauber où la couleur de v est fixée.
  $\Rightarrow$ bornée par induction.
- Chaîne projetée :
  - ensemble d'états : $L(v)$
  - probabilité de transition $i \to j$: dépend du nombre de colorations n'utilisant pas i et j dans $N(v)$.

Application à la dynamique de Glauber

- v : sommet de G.
- Partitionner Ω en fonction de la valeur prise en v :

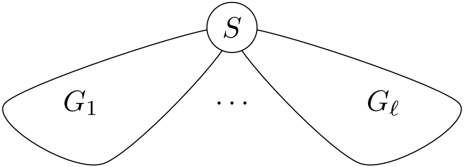
$$\Omega_i = \{\sigma, \quad \sigma(v) = i\} \ .$$

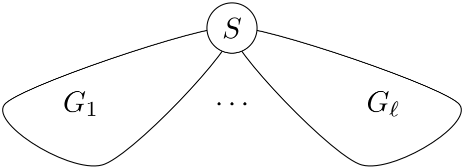
- Chaîne restreinte : dynamique de Glauber où la couleur de v est fixée.
  $\Rightarrow$ bornée par induction.
- Chaîne projetée :
  - ensemble d'états : $L(v)$
  - probabilité de transition $i \to j$: dépend du nombre de colorations n'utilisant pas i et j dans $N(v)$.

Lemme

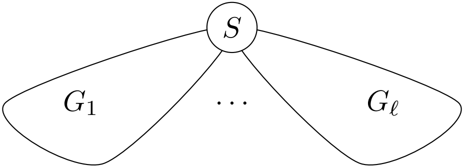
Si G a treewidth bornée, alors il existe une constante C telle que :

$$\tau(G) \leq C \cdot \tau(G - v) \ .$$


S
G_1
$\dots$
G_ℓ

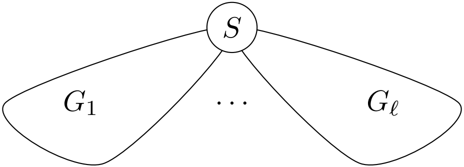


$$\tau(G) \leq C^{\mathrm{tw}(G)} \tau(G - S)$$



$$\tau(G) \leq C^{\mathrm{tw}(G)} \tau(G - S)$$

$$\tau(G - S) \leq \max_i \tau(G_i)$$



$$\tau(G) \leq C^{\mathrm{tw}(G)} \tau(G - S)$$

$$\tau(G - S) \leq \max_i \tau(G_i)$$

Corollary

Si G a treewidth bornée, alors il existe C' telle que :

$$\tau(G) \leq C' \cdot \max_i \tau(G_i)$$

Graphe cordaux

Theorem

La dynamique de Glauber sur un graphe G *cordal avec* $(1+\varepsilon)(\Delta+1)$ *couleurs a un temps de mélange polynomial.*

Graphe cordaux

Theorem

La dynamique de Glauber sur un graphe G cordal avec $(1+\varepsilon)(\Delta+1)$ couleurs a un temps de mélange polynomial.

Organisation de la preuve :

1. Ajouter des transitions supplémentaires (chaînes de Kempe).
2. Borner le temps de mélange de la dynamique de Kempe.

Graphe cordaux

Theorem

La dynamique de Glauber sur un graphe G cordal avec $(1+\varepsilon)(\Delta+1)$ couleurs a un temps de mélange polynomial.

Organisation de la preuve :

1. Ajouter des transitions supplémentaires (chaînes de Kempe).
2. Borner le temps de mélange de la dynamique de Kempe.

Remarque

- *Les $\varepsilon\Delta$ couleurs supplémentaires ne sont utiles que pour le point 1.*

Graphe cordaux

Theorem

La dynamique de Glauber sur un graphe G cordal avec $(1+\varepsilon)(\Delta+1)$ couleurs a un temps de mélange polynomial.

Organisation de la preuve :

1. Ajouter des transitions supplémentaires (chaînes de Kempe).
2. Borner le temps de mélange de la dynamique de Kempe.

Remarque

- *Les $\varepsilon\Delta$ couleurs supplémentaires ne sont utiles que pour le point 1.*
- *Ne fonctionne pas avec la variante par liste.*

Conclusion

Conjecture

La dynamique de Glauber sur un graphe G avec $\Delta + 2$ couleurs a un temps de mélange polynômial.

Conclusion

Conjecture

La dynamique de Glauber sur un graphe G avec $\Delta + 2$ couleurs a un temps de mélange polynômial.

- Étudier la conjecture pour différentes classes de graphes.

Conclusion

Conjecture

La dynamique de Glauber sur un graphe G avec $\Delta + 2$ couleurs a un temps de mélange polynômial.

- Étudier la conjecture pour différentes classes de graphes.
- Dynamique de Kempe (coloration d'arêtes notamment) ?

Conclusion

Conjecture

La dynamique de Glauber sur un graphe G avec $\Delta + 2$ couleurs a un temps de mélange polynômial.

- Étudier la conjecture pour différentes classes de graphes.
- Dynamique de Kempe (coloration d'arêtes notamment) ?
- Améliorer le nombre de couleurs pour les graphes de treewidth bornée ($\mathrm{tw}(G)\frac{\Delta}{\log \Delta}$ couleurs ?).

Conclusion

Conjecture

La dynamique de Glauber sur un graphe G avec $\Delta + 2$ couleurs a un temps de mélange polynômial.

- Étudier la conjecture pour différentes classes de graphes.
- Dynamique de Kempe (coloration d'arêtes notamment) ?
- Améliorer le nombre de couleurs pour les graphes de treewidth bornée ($\mathrm{tw}(G)\frac{\Delta}{\log \Delta}$ couleurs ?).

Thank You!