Résultats structuraux pour le jeu Maker-Breaker sur les hypergraphes 3-uniformes

Florian Galliot

16 novembre 2020

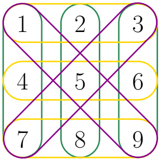
Journées Graphes et Algorithmes, 16-17-18 novembre 2020

Description du jeu

- *Positional game* joué sur un hypergraphe H.
- 2 joueurs : Maker vs Breaker, qui jouent à tour de rôle.
- A chaque tour, Maker choisit un sommet non coloré de H et le colore en bleu, puis Breaker choisit un sommet non coloré de H et le colore en rouge.
- Objectif :
  - Maker : obtenir une arête monochrome bleue.
  - Breaker : empêcher Maker d'atteindre son objectif, i.e. obtenir un transversal monochrome rouge.

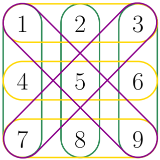
Description du jeu

- *Positional game* joué sur un hypergraphe H.
- 2 joueurs : Maker vs Breaker, qui jouent à tour de rôle.
- A chaque tour, Maker choisit un sommet non coloré de H et le colore en bleu, puis Breaker choisit un sommet non coloré de H et le colore en rouge.
- Objectif :
  - Maker : obtenir une arête monochrome bleue.
  - Breaker : empêcher Maker d'atteindre son objectif, i.e. obtenir un transversal monochrome rouge.



Description du jeu

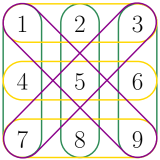
- *Positional game* joué sur un hypergraphe H.
- 2 joueurs : Maker vs Breaker, qui jouent à tour de rôle.
- A chaque tour, Maker choisit un sommet non coloré de H et le colore en bleu, puis Breaker choisit un sommet non coloré de H et le colore en rouge.
- Objectif :
  - Maker : obtenir une arête monochrome bleue.
  - Breaker : empêcher Maker d'atteindre son objectif, i.e. obtenir un transversal monochrome rouge.



▶ Question : lequel des deux joueurs gagne sur H ?

Description du jeu

- *Positional game* joué sur un hypergraphe H.
- 2 joueurs : Maker vs Breaker, qui jouent à tour de rôle.
- A chaque tour, Maker choisit un sommet non coloré de H et le colore en bleu, puis Breaker choisit un sommet non coloré de H et le colore en rouge.
- Objectif :
  - Maker : obtenir une arête monochrome bleue.
  - Breaker : empêcher Maker d'atteindre son objectif, i.e. obtenir un transversal monochrome rouge.



- Question : lequel des deux joueurs gagne sur H ?

On s'intéresse à des critères portant sur la **structure** de H.

Hypergraphes marqués

- Dans la pratique :
  - Maker joue un sommet x : on *marque* x (on entoure x).
  - Breaker joue un sommet y : on retire y de l'hypergraphe ainsi que toutes les arêtes incidentes à y.

Hypergraphes marqués

- Dans la pratique :
  - Maker joue un sommet x : on *marque* x (on entoure x).
  - Breaker joue un sommet y : on retire y de l'hypergraphe ainsi que toutes les arêtes incidentes à y.

- On joue donc sur des **hypergraphes marqués**.

  Hypergraphe marqué : donnée d'un hypergraphe H et d'un ensemble $M(H) \subseteq V(H)$ de *sommets marqués* représentant les sommets possédés par Maker.

  Sous-hypergraphe d'un hypergraphe marqué :
  sous-hypergraphe de H dont les sommets marqués sont les mêmes que dans H.

- Remarque : Si Maker gagne sur un sous-hypergraphe de H alors Maker gagne sur H.

Cas des petites arêtes

- Si H possède une arête de taille 1 : Maker gagne trivialement.

Cas des petites arêtes

- Si H possède une arête de taille 1 : Maker gagne trivialement.

- Cas 2-uniforme i.e. H est un graphe : Breaker gagne si et seulement si H est un matching.

P_3 :

Cas des petites arêtes

- Si H possède une arête de taille 1 : Maker gagne trivialement.
- Cas 2-uniforme i.e. H est un graphe : Breaker gagne si et seulement si H est un matching.

P_3 :

- **On s'intéresse au cas 3-uniforme.**

Cas des petites arêtes

- Si H possède une arête de taille 1 : Maker gagne trivialement.

- Cas 2-uniforme i.e. H est un graphe : Breaker gagne si et seulement si H est un matching.

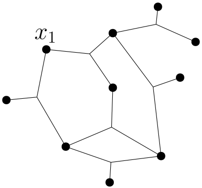
P_3 :

- **On s'intéresse au cas 3-uniforme.**

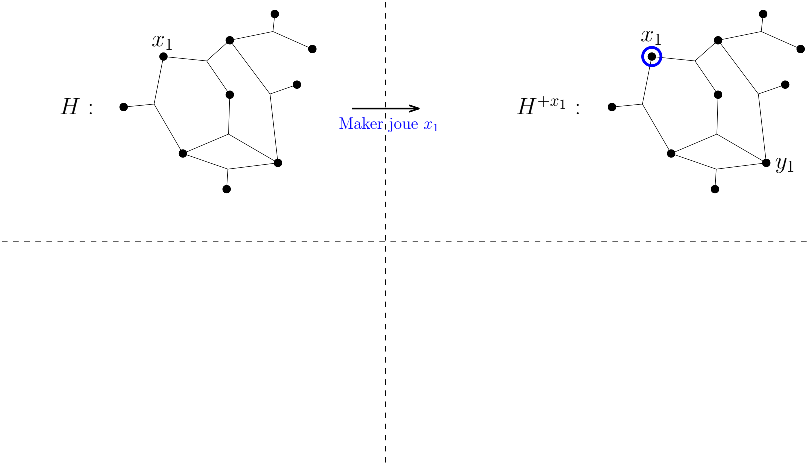
  On a la réduction :
  Hypergraphe de rang 3 $\rightarrow$ Hypergraphe marqué 3-uniforme.

Déroulement d'une partie : exemple

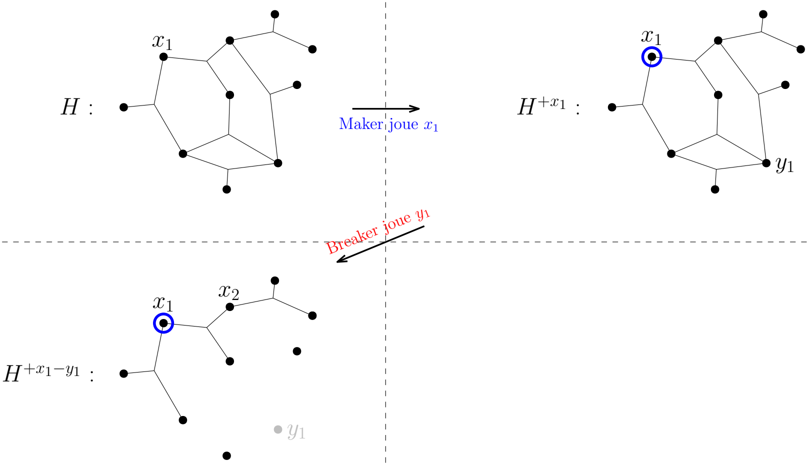
H :



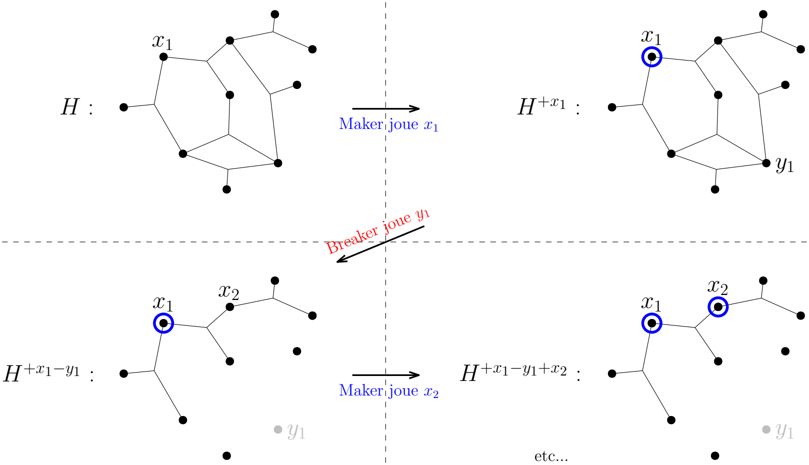
Déroulement d'une partie : exemple



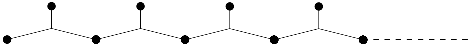
Déroulement d'une partie : exemple



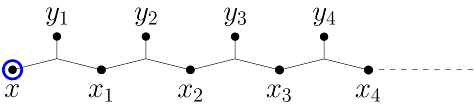
Déroulement d'une partie : exemple



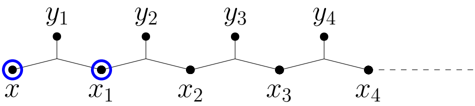
- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.



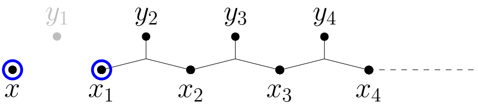
- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.



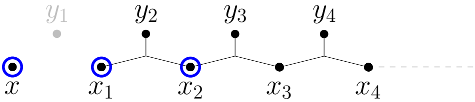
- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.



- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.

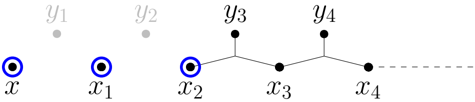


- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.

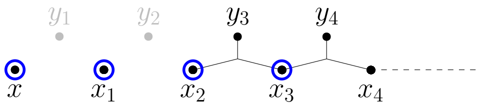


Chemins de forçage

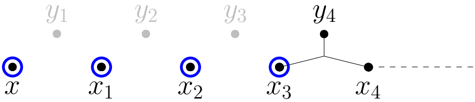
- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.



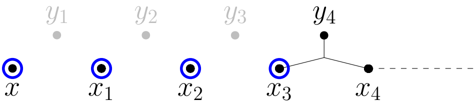
- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.



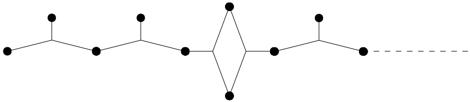
- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.



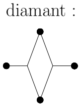
- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.



- Ceci n'est **pas** un chemin :

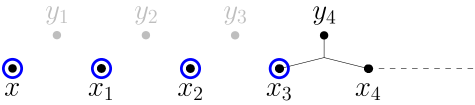


On dit que H est *linéaire* lorsque deux arêtes distinctes s'intersectent en 0 ou 1 sommet. Si H est 3-uniforme, cela équivaut à l'absence de *diamant* (2-cycle).

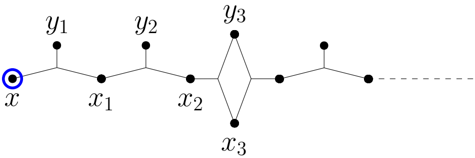


Chemins de forçage

- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.

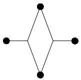


- Ceci n'est **pas** un chemin :



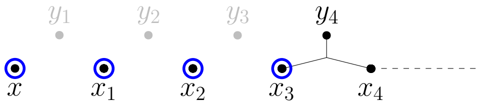
On dit que H est *linéaire* lorsque deux arêtes distinctes s'intersectent en 0 ou 1 sommet. Si H est 3-uniforme, cela équivaut à l'absence de *diamant* (2-cycle).

diamant :

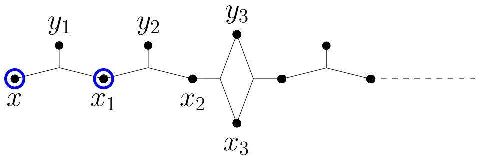


Chemins de forçage

- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.

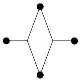


- Ceci n'est **pas** un chemin :



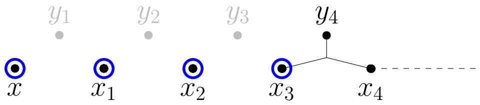
On dit que H est *linéaire* lorsque deux arêtes distinctes s'intersectent en 0 ou 1 sommet. Si H est 3-uniforme, cela équivaut à l'absence de *diamant* (2-cycle).

diamant :

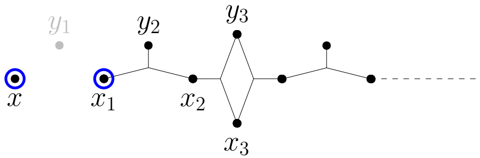


Chemins de forçage

- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.

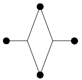


- Ceci n'est **pas** un chemin :



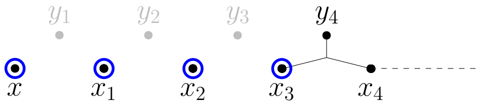
On dit que H est *linéaire* lorsque deux arêtes distinctes s'intersectent en 0 ou 1 sommet. Si H est 3-uniforme, cela équivaut à l'absence de *diamant* (2-cycle).

diamant :

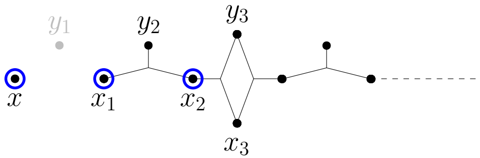


Chemins de forçage

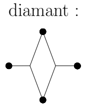
- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.



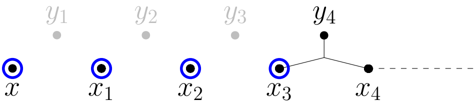
- Ceci n'est **pas** un chemin :



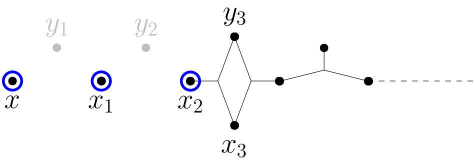
On dit que H est *linéaire* lorsque deux arêtes distinctes s'intersectent en 0 ou 1 sommet. Si H est 3-uniforme, cela équivaut à l'absence de *diamant* (2-cycle).



- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.

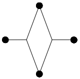


- Ceci n'est **pas** un chemin :

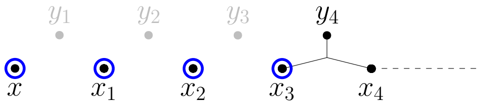


On dit que H est *linéaire* lorsque deux arêtes distinctes s'intersectent en 0 ou 1 sommet. Si H est 3-uniforme, cela équivaut à l'absence de *diamant* (2-cycle).

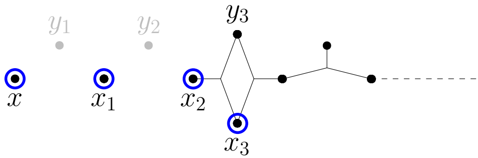
diamant :



- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.

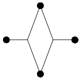


- Ceci n'est **pas** un chemin :

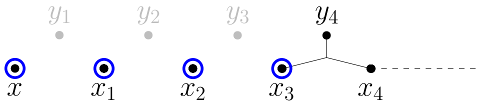


On dit que H est *linéaire* lorsque deux arêtes distinctes s'intersectent en 0 ou 1 sommet. Si H est 3-uniforme, cela équivaut à l'absence de *diamant* (2-cycle).

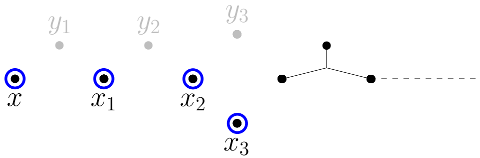
diamant :



- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.

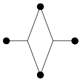


- Ceci n'est **pas** un chemin :



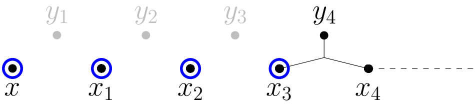
On dit que H est *linéaire* lorsque deux arêtes distinctes s'intersectent en 0 ou 1 sommet. Si H est 3-uniforme, cela équivaut à l'absence de *diamant* (2-cycle).

diamant :

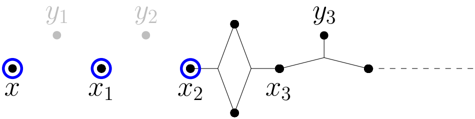


Chemins de forçage

- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.

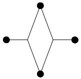


- Ceci n'est **pas** un chemin :

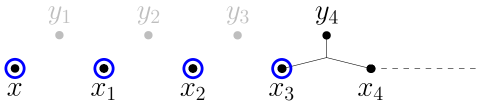


On dit que H est *linéaire* lorsque deux arêtes distinctes s'intersectent en 0 ou 1 sommet. Si H est 3-uniforme, cela équivaut à l'absence de *diamant* (2-cycle).

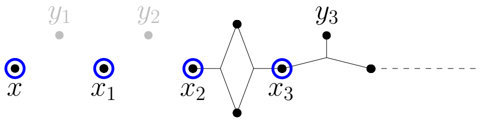
diamant :



- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.

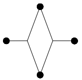


- Ceci n'est **pas** un chemin :



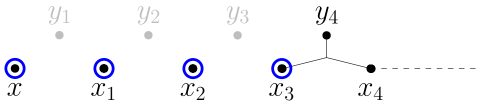
On dit que H est *linéaire* lorsque deux arêtes distinctes s'intersectent en 0 ou 1 sommet. Si H est 3-uniforme, cela équivaut à l'absence de *diamant* (2-cycle).

diamant :

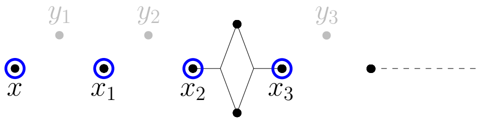


Chemins de forçage

- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.

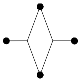


- Ceci n'est **pas** un chemin :



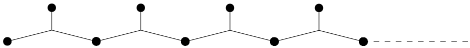
On dit que H est *linéaire* lorsque deux arêtes distinctes s'intersectent en 0 ou 1 sommet. Si H est 3-uniforme, cela équivaut à l'absence de *diamant* (2-cycle).

diamant :

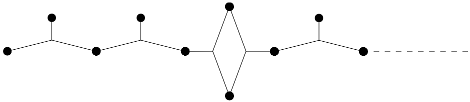


Chemins de forçage

- Le long d'un *chemin* : possibilité d'effectuer un forçage.

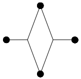


- Ceci n'est **pas** un chemin :



On dit que H est *linéaire* lorsque deux arêtes distinctes s'intersectent en 0 ou 1 sommet. Si H est 3-uniforme, cela équivaut à l'absence de *diamant* (2-cycle).

diamant :

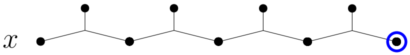


Dangers élémentaires

Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

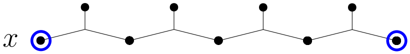
- *Snake* en x :



Dangers élémentaires

Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

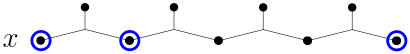
- *Snake* en x :



Dangers élémentaires

Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

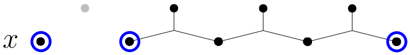
- *Snake* en x :



Dangers élémentaires

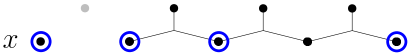
Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

- *Snake* en x :



Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

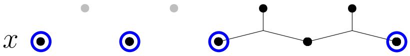
- *Snake* en x :



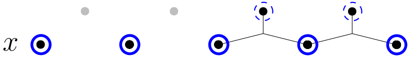
Dangers élémentaires

Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

- *Snake* en x :

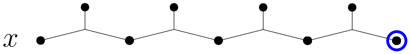


Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

- *Snake* en x : 

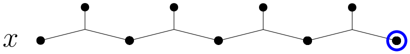
Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

- *Snake* en x :

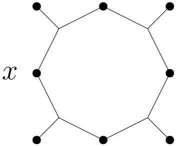


Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

- *Snake* en x :



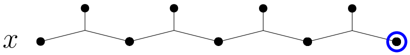
- Cycle en x :



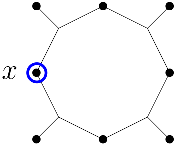
Dangers élémentaires

Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

- *Snake* en x :

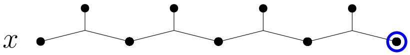


- Cycle en x :

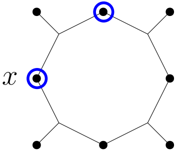


Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

- *Snake* en x :



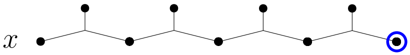
- Cycle en x :



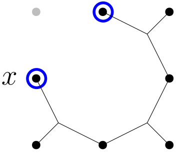
Dangers élémentaires

Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

- *Snake* en x :



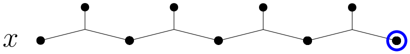
- Cycle en x :



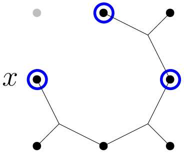
Dangers élémentaires

Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

- *Snake* en x :



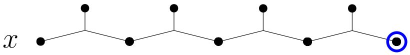
- Cycle en x :



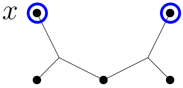
Dangers élémentaires

Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

- *Snake* en x :

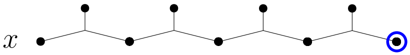


- Cycle en x :

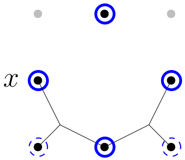


Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

- *Snake* en x :



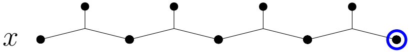
- Cycle en x :



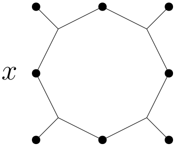
Dangers élémentaires

Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

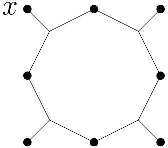
- *Snake* en x :



- Cycle en x :



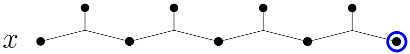
Ceci n'est **pas** un cycle en x :



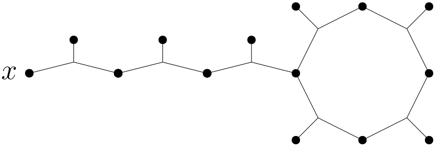
Dangers élémentaires

Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

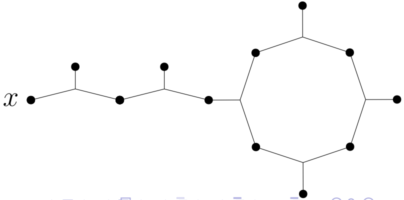
- *Snake* en x :



- *Tadpole* en x :

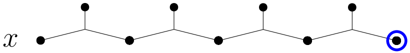


Ceci n'est **pas** un tadpole en x :



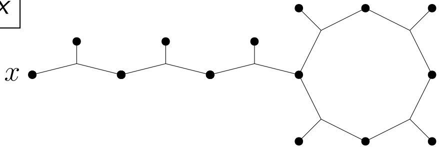
Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

- *Snake* en x :



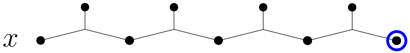
$\boxed{\textit{Dangers élémentaires en } x}$

- *Tadpole* en x :



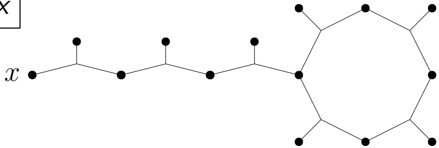
Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

- *Snake* en x :



$\boxed{\textit{Dangers élémentaires en } x}$

- *Tadpole* en x :

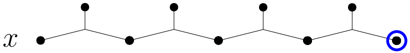


- Notation : $I_1(x,H) := \Big(\bigcap_{\substack{D \text{ snake/tadpole} \\ \text{en } x \text{ dans } H}} V(D) \Big) \setminus (M(H) \cup \{x\})$.

Dangers élémentaires

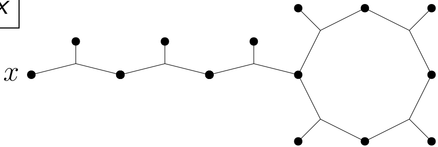
Danger en x dans H : sous-hypergraphe D de H contenant x tel que Maker gagne sur D^{+x}.
Si Maker joue x alors Breaker est **forcé** de répondre dans $V(D)$.

- *Snake* en x :



Dangers élémentaires en x

- *Tadpole* en x :



- Notation : $I_1(x,H) := \left(\bigcap_{\substack{D \text{ snake/tadpole} \\ \text{en } x \text{ dans } H}} V(D) \right) \setminus (M(H) \cup \{x\})$.
- Déf. Propriété $(\mathcal{I}_1)$: $\forall\, x \in V(H) \setminus M(H),\ I_1(x,H) \neq \varnothing$.
  Propriété $(\mathcal{I}_1)$ = Breaker peut détruire les dangers élémentaires **au premier tour**.

Dangers élémentaires

Condition nécessaire pour une victoire de Breaker

Si Breaker gagne sur H, alors H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Dangers élémentaires

Condition nécessaire pour une victoire de Breaker

Si Breaker gagne sur H, alors H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Théorème (inspiré par Martin Kutz, 2005)

Soit H linéaire connexe avec au moins un sommet marqué. Alors Breaker gagne sur H **si et seulement si** H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

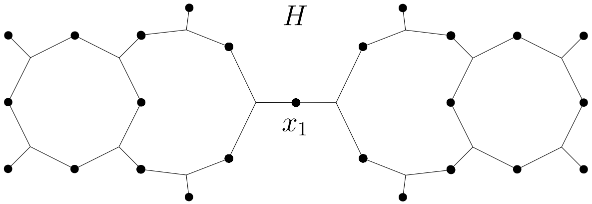
Condition nécessaire pour une victoire de Breaker

Si Breaker gagne sur H, alors H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Théorème (inspiré par Martin Kutz, 2005)

Soit H linéaire connexe avec au moins un sommet marqué. Alors Breaker gagne sur H **si et seulement si** H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Mais l'équivalence est fausse en général, même dans le cas linéaire.



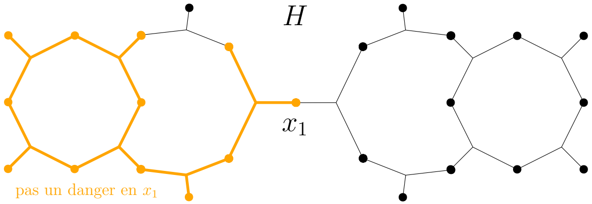
Condition nécessaire pour une victoire de Breaker

Si Breaker gagne sur H, alors H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Théorème (inspiré par Martin Kutz, 2005)

Soit H linéaire connexe avec au moins un sommet marqué. Alors Breaker gagne sur H **si et seulement si** H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Mais l'équivalence est fausse en général, même dans le cas linéaire.



Dangers élémentaires

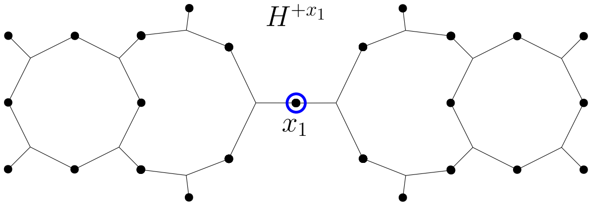
Condition nécessaire pour une victoire de Breaker

Si Breaker gagne sur H, alors H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Théorème (inspiré par Martin Kutz, 2005)

Soit H linéaire connexe avec au moins un sommet marqué. Alors Breaker gagne sur H **si et seulement si** H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Mais l'équivalence est fausse en général, même dans le cas linéaire.



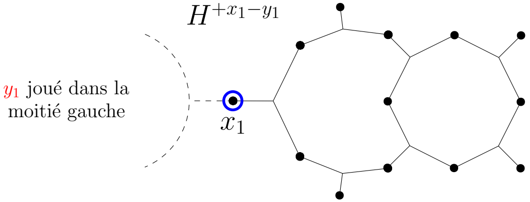
Condition nécessaire pour une victoire de Breaker

Si Breaker gagne sur H, alors H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Théorème (inspiré par Martin Kutz, 2005)

Soit H linéaire connexe avec au moins un sommet marqué. Alors Breaker gagne sur H **si et seulement si** H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Mais l'équivalence est fausse en général, même dans le cas linéaire.



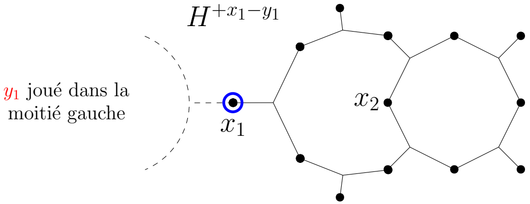
Condition nécessaire pour une victoire de Breaker

Si Breaker gagne sur H, alors H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Théorème (inspiré par Martin Kutz, 2005)

Soit H linéaire connexe avec au moins un sommet marqué. Alors Breaker gagne sur H **si et seulement si** H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Mais l'équivalence est fausse en général, même dans le cas linéaire.



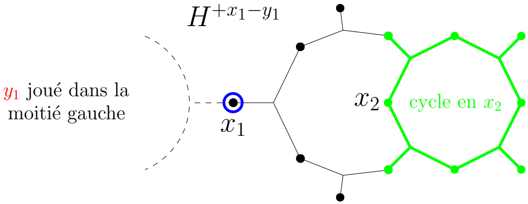
Condition nécessaire pour une victoire de Breaker

Si Breaker gagne sur H, alors H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Théorème (inspiré par Martin Kutz, 2005)

Soit H linéaire connexe avec au moins un sommet marqué. Alors Breaker gagne sur H **si et seulement si** H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Mais l'équivalence est fausse en général, même dans le cas linéaire.



Dangers élémentaires

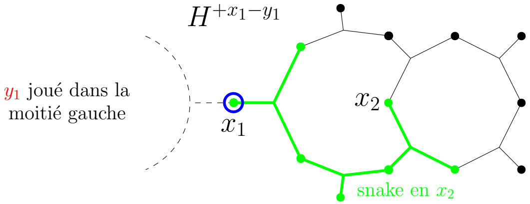
Condition nécessaire pour une victoire de Breaker

Si Breaker gagne sur H, alors H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Théorème (inspiré par Martin Kutz, 2005)

Soit H linéaire connexe avec au moins un sommet marqué. Alors Breaker gagne sur H **si et seulement si** H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Mais l'équivalence est fausse en général, même dans le cas linéaire.



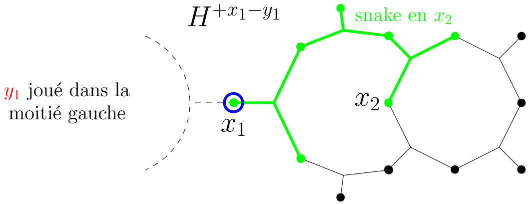
Condition nécessaire pour une victoire de Breaker

Si Breaker gagne sur H, alors H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Théorème (inspiré par Martin Kutz, 2005)

Soit H linéaire connexe avec au moins un sommet marqué. Alors Breaker gagne sur H **si et seulement si** H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Mais l'équivalence est fausse en général, même dans le cas linéaire.



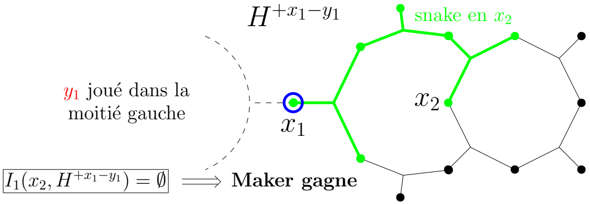
Condition nécessaire pour une victoire de Breaker

Si Breaker gagne sur H, alors H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Théorème (inspiré par Martin Kutz, 2005)

Soit H linéaire connexe avec au moins un sommet marqué. Alors Breaker gagne sur H **si et seulement si** H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

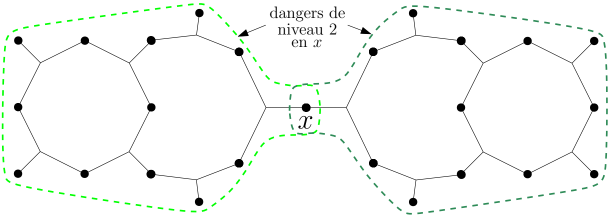
Mais l'équivalence est fausse en général, même dans le cas linéaire.



- Déf. Propriété $(\mathcal{I}_{1,2})$: $\forall\ x \in V(H) \setminus M(H),\ I_{1,2}(x,H) \neq \varnothing$.
  où $I_{1,2}(x,H) = \{y \in I_1(x,H) \mid H^{+x-y}$ a la propriété $(\mathcal{I}_1)\}$.
- En résumé :
  - Propriété $(\mathcal{I}_1)$ = Breaker peut détruire les dangers élémentaires **au premier tour**.
  - Propriété $(\mathcal{I}_{1,2})$ = Breaker peut détruire les dangers élémentaires **aux deux premiers tours**.

Dangers de niveau 2

- Déf. Propriété $(\mathcal{I}_{1,2})$: $\forall\ x \in V(H) \setminus M(H),\ I_{1,2}(x,H) \neq \varnothing$.
  où $I_{1,2}(x,H) = \{y \in I_1(x,H) \mid H^{+x-y}$ a la propriété $(\mathcal{I}_1)\}$.
- En résumé :
  - Propriété $(\mathcal{I}_1)$ = Breaker peut détruire les dangers élémentaires **au premier tour**.
  - Propriété $(\mathcal{I}_{1,2})$ = Breaker peut détruire les dangers élémentaires **aux deux premiers tours**.
- En fait : $(\mathcal{I}_{1,2}) \iff$ Breaker peut détruire les dangers élémentaires et les *dangers de niveau 2* **au premier tour**.



Main results

Nos résultats sur les hypergraphes marqués 3-uniformes :

Théorème : cas général

Breaker gagne sur H si et seulement si H a la propriété $(\mathcal{I}_{1,2})$.
De plus, si Maker joue x, alors tout $y \in I_{1,2}(x, H)$ est une réponse gagnante pour Breaker.

Théorème : cas particulier

Soit H tel que, pour tout x non marqué, il existe un snake en x.
Alors Breaker gagne sur H si et seulement si H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Main results

Nos résultats sur les hypergraphes marqués 3-uniformes :

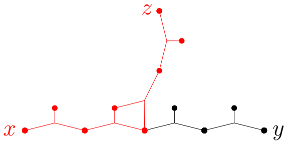
Théorème : cas général

Breaker gagne sur H si et seulement si H a la propriété $(\mathcal{I}_{1,2})$.
De plus, si Maker joue x, alors tout $y \in I_{1,2}(x, H)$ est une réponse gagnante pour Breaker.

Théorème : cas particulier

Soit H tel que, pour tout x non marqué, il existe un snake en x.
Alors Breaker gagne sur H si et seulement si H a la propriété $(\mathcal{I}_1)$.

Difficulté majeure : dans le cas non linéaire, on peut avoir un chemin $x - y$ et un chemin $y - z$ sans que l'union des deux ne contienne un chemin $x - z$.



Complexité

Problème de décision MAKER_BREAKER

Entrée : un hypergraphe (marqué) H.
Sortie : OUI si Maker gagne sur H, NON sinon.

Complexité

Problème de décision MAKER_BREAKER

Entrée : un hypergraphe (marqué) H.
Sortie : OUI si Maker gagne sur H, NON sinon.

Résultats antérieurs :

Théorème (Rahman & Watson, 2020)

MAKER_BREAKER est PSPACE-complet sur les hypergraphes 6-uniformes.

Théorème (Kutz, 2005)

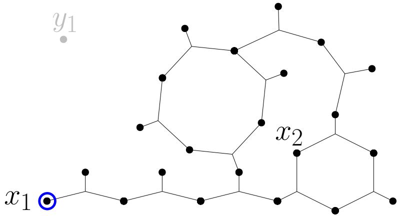
MAKER_BREAKER est polynomial sur les hypergraphes marqués 3-uniformes **linéaires**.

Complexité

Proposition

Maker gagne sur un hypergraphe marqué 3-uniforme si et seulement si il peut assurer de faire apparaître, après au plus 4 tours, un sous-hypergraphe comme suit (*double-snake*) :

Exemple où $I_1(x_2, H^{+x_1-y_1}) = \varnothing$:

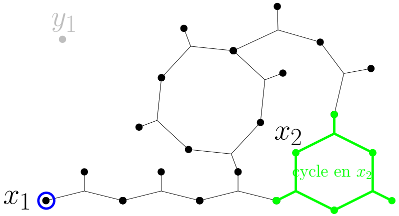


Complexité

Proposition

Maker gagne sur un hypergraphe marqué 3-uniforme si et seulement si il peut assurer de faire apparaître, après au plus 4 tours, un sous-hypergraphe comme suit (*double-snake*) :

Exemple où $I_1(x_2, H^{+x_1-y_1}) = \varnothing$:

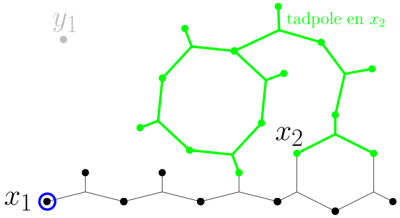


Complexité

Proposition

Maker gagne sur un hypergraphe marqué 3-uniforme si et seulement si il peut assurer de faire apparaître, après au plus 4 tours, un sous-hypergraphe comme suit (*double-snake*) :

Exemple où $I_1(x_2, H^{+x_1-y_1}) = \varnothing$:

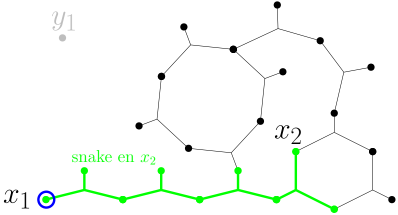


Complexité

Proposition

Maker gagne sur un hypergraphe marqué 3-uniforme si et seulement si il peut assurer de faire apparaître, après au plus 4 tours, un sous-hypergraphe comme suit (*double-snake*) :

Exemple où $I_1(x_2, H^{+x_1-y_1}) = \varnothing$:

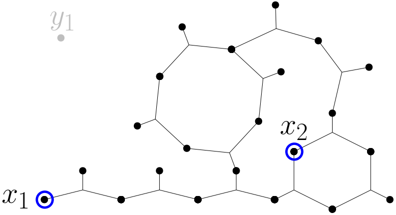


Complexité

Proposition

Maker gagne sur un hypergraphe marqué 3-uniforme si et seulement si il peut assurer de faire apparaître, après au plus 4 tours, un sous-hypergraphe comme suit (*double-snake*) :

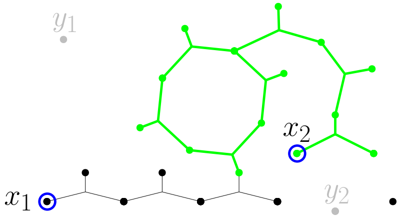
Exemple où $I_1(x_2, H^{+x_1-y_1}) = \varnothing$:



Proposition

Maker gagne sur un hypergraphe marqué 3-uniforme si et seulement si il peut assurer de faire apparaître, après au plus 4 tours, un sous-hypergraphe comme suit (*double-snake*) :

Exemple où $I_1(x_2, H^{+x_1-y_1}) = \varnothing$:

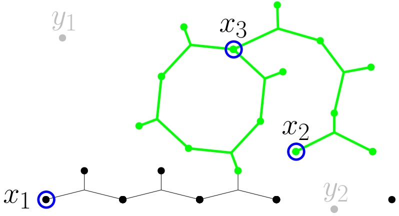


Complexité

Proposition

Maker gagne sur un hypergraphe marqué 3-uniforme si et seulement si il peut assurer de faire apparaître, après au plus 4 tours, un sous-hypergraphe comme suit (*double-snake*) :

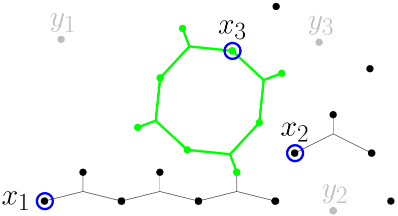
Exemple où $I_1(x_2, H^{+x_1-y_1}) = \varnothing$:



Proposition

Maker gagne sur un hypergraphe marqué 3-uniforme si et seulement si il peut assurer de faire apparaître, après au plus 4 tours, un sous-hypergraphe comme suit (*double-snake*) :

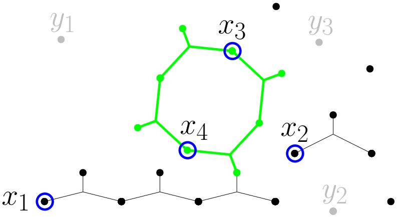
Exemple où $I_1(x_2, H^{+x_1-y_1}) = \varnothing$:



Proposition

Maker gagne sur un hypergraphe marqué 3-uniforme si et seulement si il peut assurer de faire apparaître, après au plus 4 tours, un sous-hypergraphe comme suit (*double-snake*) :

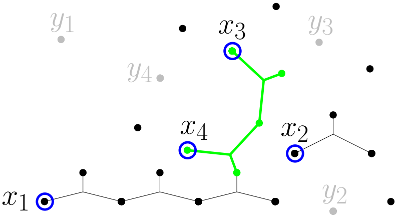
Exemple où $I_1(x_2, H^{+x_1-y_1}) = \emptyset$:



Proposition

Maker gagne sur un hypergraphe marqué 3-uniforme si et seulement si il peut assurer de faire apparaître, après au plus 4 tours, un sous-hypergraphe comme suit (*double-snake*) :

Exemple où $I_1(x_2, H^{+x_1-y_1}) = \varnothing$:



Conséquence n°1

MAKER_BREAKER est NP sur les hypergraphes marqués 3-uniformes.

Certificat :

- Stratégie de Maker pour ses 4 premiers coups x_1, x_2, x_3, x_4.
- Un double-snake dans H

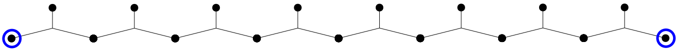
$$\begin{aligned} &\text{ou } H^{+x_1-y_1} \\ &\text{ou } H^{+x_1-y_1+x_2-y_2} \\ &\text{ou } H^{+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3-y_3} \\ &\text{ou } H^{+x_1-y_1+x_2-y_2+x_3-y_3+x_4-y_4} \end{aligned}$$

  pour toutes les possibilités des 4 premiers coups y_1, y_2, y_3, y_4 de Breaker.

Conséquence n°2

Soit H un hypergraphe marqué 3-uniforme. Alors Maker gagne sur H si et seulement si Maker gagne sur H en $O(\log(n))$ tours.

Preuve : dichotomie.

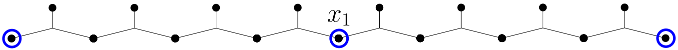


Complexité

Conséquence n°2

Soit H un hypergraphe marqué 3-uniforme. Alors Maker gagne sur H si et seulement si Maker gagne sur H en $O(\log(n))$ tours.

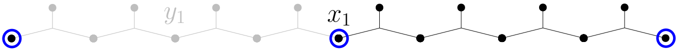
Preuve : dichotomie.



Conséquence n°2

Soit H un hypergraphe marqué 3-uniforme. Alors Maker gagne sur H si et seulement si Maker gagne sur H en $O(\log(n))$ tours.

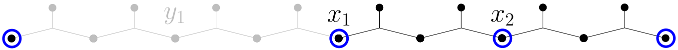
Preuve : dichotomie.



Conséquence n°2

Soit H un hypergraphe marqué 3-uniforme. Alors Maker gagne sur H si et seulement si Maker gagne sur H en $O(\log(n))$ tours.

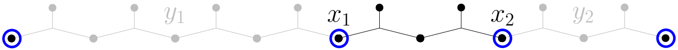
Preuve : dichotomie.



Conséquence n°2

Soit H un hypergraphe marqué 3-uniforme. Alors Maker gagne sur H si et seulement si Maker gagne sur H en $O(\log(n))$ tours.

Preuve : dichotomie.

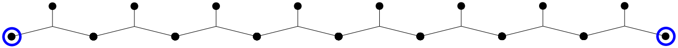


Complexité

Conséquence n°2

Soit H un hypergraphe marqué 3-uniforme. Alors Maker gagne sur H si et seulement si Maker gagne sur H en $O(\log(n))$ tours.

Preuve : dichotomie.



Corollaire

MAKER_BREAKER est quasi-polynomial sur les hypergraphes marqués 3-uniformes : temps $n^{O(\log(n))}$.
(et polynomial si la longueur d'un plus long chemin est $O(1)$)

Conséquence n°3

MAKER_BREAKER sur les hypergraphes marqués 3-uniformes se réduit à 3-UNIFORM_LINEAR_CONNECTIVITY, qui se réduit lui-même à PAFP.

3-UNIFORM_LINEAR_CONNECTIVITY

Entrée : un hypergraphe 3-uniforme H, et deux sommets x, y de H.
Sortie : OUI s'il existe un chemin (linéaire) $x - y$ dans H, NON sinon.

PAFP (Paths Avoiding Forbidden Pairs)

Entrée : un graphe G avec arêtes bleues et rouges, et deux sommets u, v de G.
Sortie : OUI s'il existe un chemin bleu $u - v$ dans G qui utilise au plus un sommet dans chaque arête rouge, NON sinon.

Complexité

Corollaire

MAKER_BREAKER est polynomial sur les hypergraphes marqués 3-uniformes ayant $O(\log(n))$ diamants.

Preuve : via 3-UNIFORM_LINEAR_CONNECTIVITY ou PAFP.

Corollaire

MAKER_BREAKER est polynomial sur les hypergraphes marqués 3-uniformes dont les diamants sont deux-à-deux sommets-disjoints.

Preuve : via PAFP (Yinnone, 1997).

Complexité

Résumé de nos résultats sur la complexité

MAKER_BREAKER sur les hypergraphes marqués 3-uniformes est :

- dans NP.
- quasi-polynomial : temps $n^{O(\log(n))}$.
- polynomial dans chacun des cas suivants :
  - le nombre de diamants est $O(\log(n))$.
  - les diamants sont deux-à-deux sommets-disjoints.
  - la longueur d'un plus long chemin (linéaire) est $O(1)$.

Conjecture

3-UNIFORM_LINEAR_CONNECTIVITY est polynomial, donc MAKER_BREAKER est polynomial sur tous les hypergraphes marqués 3-uniformes.

Merci de votre attention !

- Martin Kutz : Weak Positional Games on Hypergraphs of Rank Three. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, January 1, 2005, DMTCS Proceedings vol. AE, European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb '05).
- Md Lutfar Rahman, Thomas Watson : 6-Uniform Maker-Breaker Game Is PSPACE-Complete. Preprint.
- Hananya Yinnone : On paths avoiding forbidden pairs of vertices in a graph. *Discrete Applied Mathematics*, Volume 74, Issue 1, 4 April 1997, Pages 85-92.