INFLUENCE, un jeu à score sur les graphes

Eric Duchêne, Nacim Oijid, Aline Parreau

LIRIS, Lyon

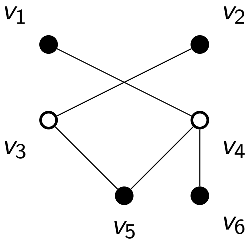
Journées Graphes et Algorithmes, 16 Novembre 2020

Sommaire

Le jeu INFLUENCE

Règles (De Duchêne et al [DGP+20])

Plateau de jeu : graphe possédant un 2-coloriage propre en noir et blanc.
Left (●) *retire un sommet noir et son voisinage,* Right (○) *retire un sommet blanc et son voisinage.*
Score relatif: # sommets retirés par Left - # sommets retirés par Right.

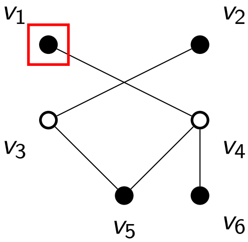


Left (●)	Right (○)	Score
0	0	0

Le jeu INFLUENCE

Règles (De Duchêne et al [DGP+20])

Plateau de jeu : graphe possédant un 2-coloriage propre en noir et blanc.
Left (●) *retire un sommet noir et son voisinage,* Right (○) *retire un sommet blanc et son voisinage.*
Score relatif: # sommets retirés par Left - # sommets retirés par Right.

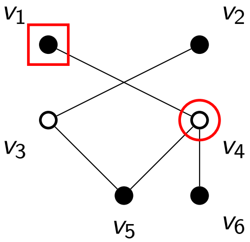


Left (●)	Right (○)	Score
0	0	0

Le jeu INFLUENCE

Règles (De Duchêne et al [DGP+20])

Plateau de jeu : graphe possédant un 2-coloriage propre en noir et blanc.
Left (●) *retire un sommet noir et son voisinage,* Right (○) *retire un sommet blanc et son voisinage.*
Score relatif: # sommets retirés par Left - # sommets retirés par Right.

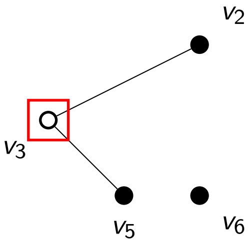


Left (●)	Right (○)	Score
0	0	0
2	0	2

Le jeu INFLUENCE

Règles (De Duchêne et al [DGP+20])

Plateau de jeu : graphe possédant un 2-coloriage propre en noir et blanc.
Left (●) *retire un sommet noir et son voisinage,* Right (○) *retire un sommet blanc et son voisinage.*
Score relatif: # sommets retirés par Left - # sommets retirés par Right.

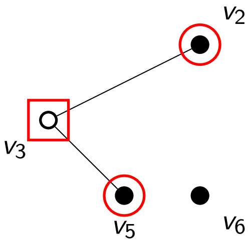


Left (●)	Right (○)	Score
0	0	0
2	0	2

Le jeu INFLUENCE

Règles (De Duchêne et al [DGP+20])

Plateau de jeu : graphe possédant un 2-coloriage propre en noir et blanc.
Left (●) *retire un sommet noir et son voisinage,* Right (○) *retire un sommet blanc et son voisinage.*
Score relatif: # sommets retirés par Left - # sommets retirés par Right.

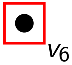


Left (●)	Right (○)	Score
0	0	0
2	0	2
2	3	-1

Le jeu INFLUENCE

Règles (De Duchêne et al [DGP+20])

Plateau de jeu : graphe possédant un 2-coloriage propre en noir et blanc.
Left (●) *retire un sommet noir et son voisinage,* Right (○) *retire un sommet blanc et son voisinage.*
Score relatif: # sommets retirés par Left - # sommets retirés par Right.



Left (●)	Right (○)	Score
0	0	0
2	0	2
2	3	-1
3	3	0

Univers des jeux combinatoires à score

- Il n'y a ni chance, ni information cachée.

Univers des jeux combinatoires à score

- Il n'y a ni chance, ni information cachée.
- Les 2 joueurs jouent chacun leur tour alternativement (sans pouvoir passer).

Univers des jeux combinatoires à score

- Il n'y a ni chance, ni information cachée.
- Les 2 joueurs jouent chacun leur tour alternativement (sans pouvoir passer).
- On considère uniquement les coups optimaux:
  - Left (●) : maximise le score,
  - Right (O) : minimise le score.

Univers des jeux combinatoires à score

- Il n'y a ni chance, ni information cachée.
- Les 2 joueurs jouent chacun leur tour alternativement (sans pouvoir passer).
- On considère uniquement les coups optimaux:
  - Left (●) : maximise le score,
  - Right (○) : minimise le score.
- Le score dépend du joueur qui commence. L'intérêt principal de la théorie des jeux est de le calculer.

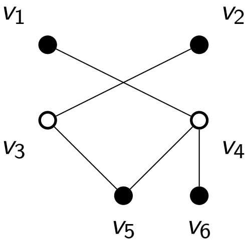
Definition

$Ls(G)$: score quand Left (●) commence.
$Rs(G)$: score quand Right (○) commence.

Définition du score

Definition

$Ls(G)$: score quand Left (●) commence.
$Rs(G)$: score quand Right (○) commence.



Ici, $Ls(G) = 6, Rs(G) = -2$.

Historique des jeux combinatoire à score :

- Historique :
- Jeux étudiés dans les années 60 : [Mil53], [Han59].

Historique des jeux combinatoire à score :

Historique :

- Jeux étudiés dans les années 60 : [Mil53], [Han59].
- Formalisé dans les années 2010 [Ste11], [Lar19].

Historique des jeux combinatoire à score :

Historique :

- Jeux étudiés dans les années 60 : [Mil53], [Han59].
- Formalisé dans les années 2010 [Ste11], [Lar19].

Univers de Milnor :

- Dicotic: Si un joueur peut jouer, son adversaire aussi.
- Nonzugzwang: Il n'est jamais avantageux de passer son tour. i.e. $Ls(G) \geq Rs(G)$.

Historique des jeux combinatoire à score :

Historique :

- Jeux étudiés dans les années 60 : [Mil53], [Han59].
- Formalisé dans les années 2010 [Ste11], [Lar19].

Univers de Milnor :

- Dicotic: Si un joueur peut jouer, son adversaire aussi.
- Nonzugzwang: Il n'est jamais avantageux de passer son tour. i.e. $Ls(G) \geq Rs(G)$.

Théorème (Duchêne et al [DGP+20])

INFLUENCE appartient à l'univers de Milnor.

Résultats

Résultats obtenus :

- Le problème décisionnel associé à INFLUENCE est PSPACE-complet.

Résultats

Résultats obtenus :

- Le problème décisionnel associé à INFLUENCE est PSPACE-complet.
- Condition suffisante pour que le score soit nul.

Résultats

Résultats obtenus :

- Le problème décisionnel associé à INFLUENCE est PSPACE-complet.
- Condition suffisante pour que le score soit nul.
- Bornes sur $|Ls(G) - Rs(G)|$.

Résultats

Résultats obtenus :

- Le problème décisionnel associé à INFLUENCE est PSPACE-complet.
- Condition suffisante pour que le score soit nul.
- Bornes sur $|Ls(G) - Rs(G)|$.
- Graphes particuliers (chemins, grilles, hypercubes, cylindres, tores) .

Sommaire

PSPACE-complétude: définition du problème

Problème (DECISIONAL INFLUENCE)

Entrée:

- $G = \{(B, W), E\}$ *un graphe noir et blanc.*
- k *un entier.*

Sortie: *Vrai si* $Ls(G) \geq k$, *Faux sinon.*

PSPACE-complétude: définition du problème

Problème (DECISIONAL INFLUENCE)

Entrée:

- $G = \{(B, W), E\}$ *un graphe noir et blanc.*
- k *un entier.*

Sortie: Vrai si $Ls(G) \geq k$, *Faux sinon.*

Théorème

DECISIONAL INFLUENCE est PSPACE-complet.

- DECISIONAL INFLUENCE est dans PSPACE.

PSPACE-complétude: définition du problème

Problème (DECISIONAL INFLUENCE)

Entrée:

- $G = \{(B, W), E\}$ *un graphe noir et blanc.*
- k *un entier.*

Sortie: Vrai si $Ls(G) \geq k$, *Faux sinon.*

Théorème

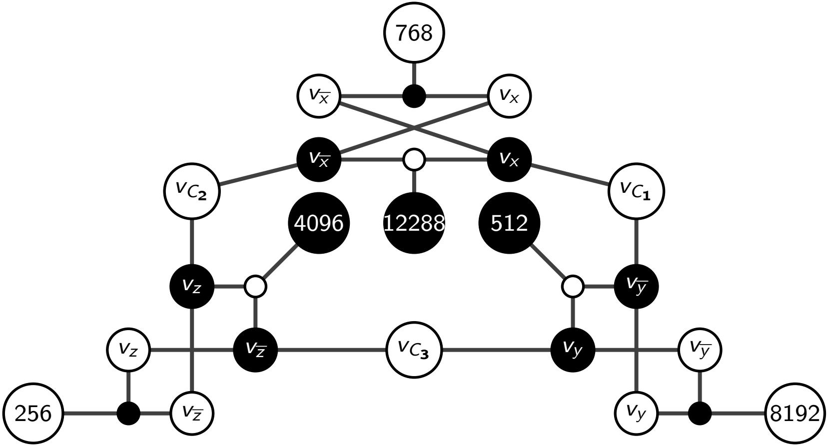
DECISIONAL INFLUENCE est PSPACE-complet.

- DECISIONAL INFLUENCE est dans PSPACE.
- Réduction depuis TQBF. On considère:

$$\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \ldots \exists x_n \ \psi$$

PSPACE complétude: exemple de réduction

$$\varphi = \exists x \forall y \exists z, (x \vee \neg y) \wedge (z \vee \neg x) \wedge (y \vee \neg z)$$



Sommaire

Condition suffisante pour avoir $G \simeq 0$

Théorème

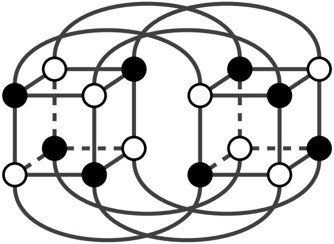
Soit $G = ((B, W), E)$ *un graphe noir et blanc. S'il existe* φ *un automorphisme involutif de* G *tel que pour tout* $v \in B$*, on ait* $\varphi(v) \in W$ *et* $d(\varphi(v), v) \geq 3$*.*
Alors, on a $Ls(G) = Rs(G) = 0$*.*

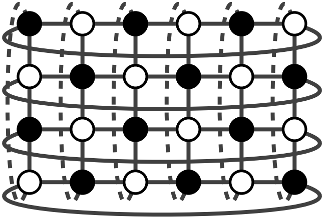
Condition suffisante pour avoir $G \simeq 0$

Théorème

Soit $G = ((B, W), E)$ un graphe noir et blanc. S'il existe φ un automorphisme involutif de G tel que pour tout $v \in B$, on ait $\varphi(v) \in W$ et $d(\varphi(v), v) \geq 3$.
Alors, on a $Ls(G) = Rs(G) = 0$.

Application : Hypercubes, Tores, Cylindres



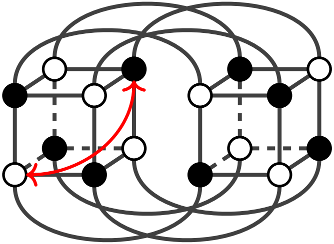


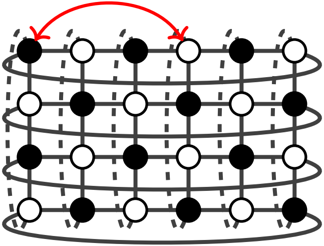
Condition suffisante pour avoir $G \simeq 0$

Théorème

Soit $G = ((B, W), E)$ un graphe noir et blanc. S'il existe φ un automorphisme involutif de G tel que pour tout $v \in B$, on ait $\varphi(v) \in W$ et $d(\varphi(v), v) \geq 3$.
Alors, on a $Ls(G) = Rs(G) = 0$.

Application : Hypercubes, Tores, Cylindres





Borne sur $|Ls - Rs|$

Théorème

Soit G un graphe noir et blanc. On a $|Ls(G) - Rs(G)| = O(\Delta(G)^3)$

Borne sur $|Ls - Rs|$

Théorème

Soit G un graphe noir et blanc. On a $|Ls(G) - Rs(G)| = O(\Delta(G)^3)$

"un joueur peut décider de donner des sommets de sa couleur à son adversaire. Son adversaire aura toujours intérêt à accepter".

Lemme

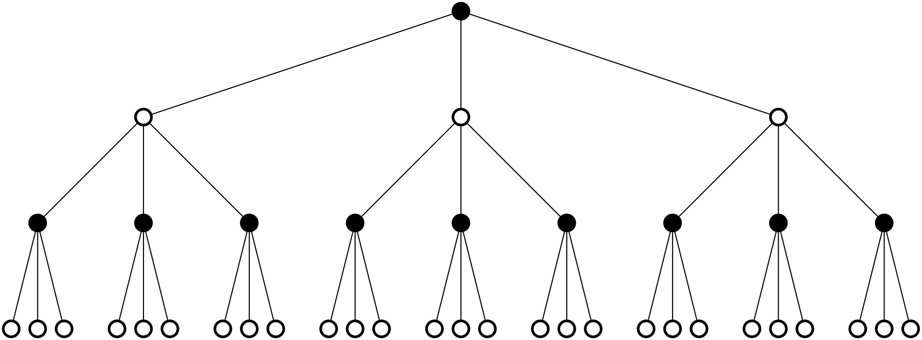
Soit $G = ((B, W), E)$ est un graphe noir et blanc, soit $B_0 \subset B$ et $W_0 \subset W$. On a:

$$Ls(G \backslash W_0) + |W_0| \geq Ls(G)$$
$$Ls(G \backslash B_0) - |B_0| \leq Ls(G)$$

Exemple du pire cas

Théorème

Soit G un graphe noir et blanc. On a $|Ls(G) - Rs(G)| = O(\Delta(G)^3)$



Arbre k-régulier ($\Delta = k+1$) , $Rs = \Theta(\Delta^3)$, $Ls = \Theta(\Delta)$

Sommaire

Études sur les chemins alternés

Definition

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note S_n (resp. S_{-n}) le chemin de taille n, de couleur de sommets alternés, commençant par un sommet noir (resp. blanc).

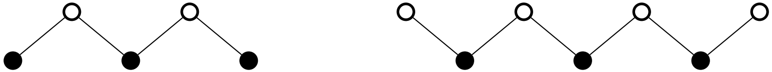


Figure: Chemins alternés S_5 et S_{-7}

Résultats de [DGP+20]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$Ls(S_n)$	1	2	3	4	5	2	1	2	3	2	1	2	3	4	3	2	3	2	3
$Rs(S_n)$	1	-2	-3	-4	-1	-2	-3	-2	-1	-2	-3	-2	-1	-4	-3	-2	-1	-2	-3

n	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
$Ls(S_n)$	2	5	4	3	2	3	2	3	2	5	4	3	2	3	2	3	2	5	2
$Rs(S_n)$	-2	-1	-4	-3	-2	-1	-2	-3	-2	-1	-4	-3	-2	-1	-2	-3	-2	-1	-2

Études sur les chemins alternés

Definition

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note S_n (resp. S_{-n}) le chemin de taille n, de couleur de sommets alternés, commençant par un sommet noir (resp. blanc).

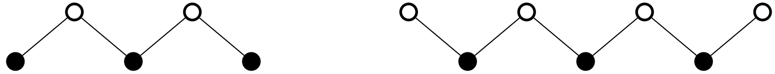


Figure: Chemins alternés S_5 et S_{-7}

Résultats de [DGP+20]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Ls(S_n)	1	2	3	4	5	2	1	2	3	2	1	2	3	4	3	2	3	2	3
Rs(S_n)	1	-2	-3	-4	-1	-2	-3	-2	-1	-2	-3	-2	-1	-4	-3	-2	-1	-2	-3

n	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
Ls(S_n)	2	5	4	3	2	3	2	3	2	5	4	3	2	3	2	3	2	5	2
Rs(S_n)	-2	-1	-4	-3	-2	-1	-2	-3	-2	-1	-4	-3	-2	-1	-2	-3	-2	-1	-2

Nouveaux résultats sur les chemins

n	001	002	003	004	005	006	007	008	009	010	011	012	013	014	015	016	017	018	019	020
Ls(S_n)	-1	2	3	4	1	2	3	2	1	2	3	2	1	4	3	2	1	2	3	2
Rs(S_n)	-1	-2	-3	-4	-5	-2	-1	-2	-3	-2	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-3	-2	-3	-2

n	021	022	023	024	025	026	027	028	029	030	031	032	033	034	035	036	037	038	039	040
Ls(S_n)	1	4	3	2	1	2	3	2	1	4	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2
Rs(S_n)	-5	-4	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-5	-4	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-5	-2	-3	-2

n	041	042	043	044	045	046	047	048	049	050	051	052	053	054	055	056	057	058	059	060
Ls(S_n)	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2
Rs(S_n)	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2

n	061	062	063	064	065	066	067	068	069	070	071	072	073	074	075	076	077	078	079	080
Ls(S_n)	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2
Rs(S_n)	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-5	-2	-3	-2

n	081	082	083	084	085	086	087	088	089	090	091	092	093	094	095	096	097	098	099	100
Ls(S_n)	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2
Rs(S_n)	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2

n	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
Ls(S_n)	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2
Rs(S_n)	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-5	-2	-3	-2

Nouveaux résultats sur les chemins

n	001	002	003	004	005	006	007	008	009	010	011	012	013	014	015	016	017	018	019	020
$Ls(S_n)$	-1	2	3	4	1	2	3	2	1	2	3	2	1	4	3	2	1	2	3	2
$Rs(S_n)$	-1	-2	-3	-4	-5	-2	-1	-2	-3	-2	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-3	-2	-3	-2

n	021	022	023	024	025	026	027	028	029	030	031	032	033	034	035	036	037	038	039	040
$Ls(S_n)$	1	4	3	2	1	2	3	2	1	4	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2
$Rs(S_n)$	-5	-4	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-5	-4	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-5	-2	-3	-2

n	041	042	043	044	045	046	047	048	049	050	051	052	053	054	055	056	057	058	059	060
$Ls(S_n)$	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2
$Rs(S_n)$	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2

n	061	062	063	064	065	066	067	068	069	070	071	072	073	074	075	076	077	078	079	080
$Ls(S_n)$	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2
$Rs(S_n)$	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-5	-2	-3	-2

n	081	082	083	084	085	086	087	088	089	090	091	092	093	094	095	096	097	098	099	100
$Ls(S_n)$	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2
$Rs(S_n)$	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2

n	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
$Ls(S_n)$	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2
$Rs(S_n)$	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-3	-2	-5	-2	-3	-2

Conjecture

Les valeurs de Ls et Rs sont périodique de période 40.

Sommes de chemins

Si G et H sont 2 graphes, jouer sur $G + H$ revient à jouer sur un graphe dont G et H sont deux composantes connexes

Sommes de chemins

Si G et H sont 2 graphes, jouer sur $G + H$ revient à jouer sur un graphe dont G et H sont deux composantes connexes

Théorème (de [DGP+20])

Si $n_1, \ldots, n_p$ sont des entiers avec au plus 1 des n_i impairs, alors
$5 \geq Ls(S_{n_1} + \cdots + S_{n_p}) \geq 0 \geq Rs(S_{n_1} + \cdots + S_{n_p}) \geq -5$

Sommes de chemins

Si G et H sont 2 graphes, jouer sur $G+H$ revient à jouer sur un graphe dont G et H sont deux composantes connexes

Théorème (de [DGP+20])

Si $n_1, \dots, n_p$ sont des entiers avec au plus 1 des n_i impairs, alors $5 \geq Ls(S_{n_1} + \cdots + S_{n_p}) \geq 0 \geq Rs(S_{n_1} + \cdots + S_{n_p}) \geq -5$

Théorème (Généralisation du précédent)

Si $n_1, \dots, n_p$ sont des entiers avec au plus k des n_i impairs, alors $4+k \geq Ls(S_{n_1} + \cdots + S_{n_p}) \geq 0 \geq Rs(S_{n_1} + \cdots + S_{n_p}) \geq -k-4$

Sommes de chemins

Si G et H sont 2 graphes, jouer sur $G + H$ revient à jouer sur un graphe dont G et H sont deux composantes connexes

Théorème (de [DGP+20])

Si $n_1, \ldots, n_p$ sont des entiers avec au plus 1 des n_i impairs, alors
$5 \geq Ls(S_{n_1} + \cdots + S_{n_p}) \geq 0 \geq Rs(S_{n_1} + \cdots + S_{n_p}) \geq -5$

Théorème (Généralisation du précédent)

Si $n_1, \ldots, n_p$ sont des entiers avec au plus k des n_i impairs, alors
$4 + k \geq Ls(S_{n_1} + \cdots + S_{n_p}) \geq 0 \geq Rs(S_{n_1} + \cdots + S_{n_p}) \geq -k - 4$

- Preuve : Définitions de moyenne et température selon Hanner [Han59], puis formalisées par Larsson. [Lar19]

cas où la borne est atteinte

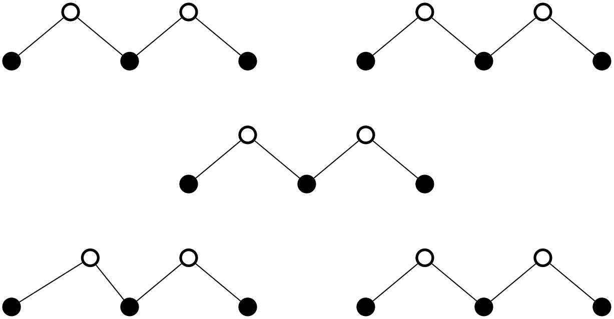
Théorème (Généralisation du précédent)

Si $n_1, \ldots, n_p$ sont des entiers avec au plus k des n_i impairs, alors
$4 + k \geq Ls(S_{n_1} + \cdots + S_{n_p}) \geq 0 \geq Rs(S_{n_1} + \cdots + S_{n_p}) \geq -k - 4$

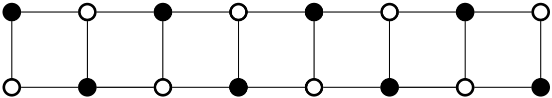
cas où la borne est atteinte

Théorème (Généralisation du précédent)

Si $n_1, \ldots, n_p$ *sont des entiers avec au plus* k *des* n_i *impairs, alors*
$4 + k \geq Ls(S_{n_1} + \cdots + S_{n_p}) \geq 0 \geq Rs(S_{n_1} + \cdots + S_{n_p}) \geq -k - 4$



Grille de 2 lignes



Propriété

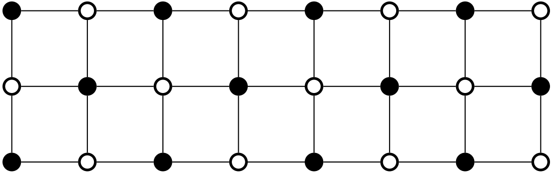
Sur une grille de 2 lignes et n colonnes, si $n \geq 4$, on a:

$$Ls(G_{2,n}) = -Rs(G_{2,n}) = \begin{cases} 4 & si\ n \equiv 1 \mod 2 \\ 2 & si\ n \equiv 0 \mod 2 \end{cases}$$

Grille de 3 lignes

Definition

On note $G_{3,n}$ la grille de 3 lignes et n colonnes ayant un sommet en haut à gauche noir.



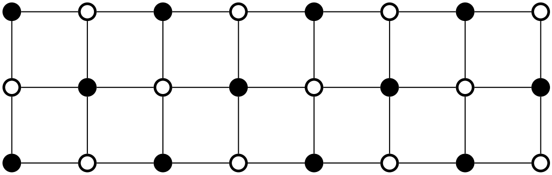
Conjecture

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $Ls(G_{3,n}) > 0 > Rs(G_{3,n})$. C'est à dire que le 1er joueur est gagnant.

Grille de 3 lignes

Definition

On note $G_{3,n}$ la grille de 3 lignes et n colonnes ayant un sommet en haut à gauche noir.



Conjecture

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $Ls(G_{3,n}) > 0 > Rs(G_{3,n})$. C'est à dire que le 1er joueur est gagnant.

7 cas sur 8 de la conjecture sont déjà prouvés. Il reste à prouver $Rs(G_{3,n}) < 0$ lorsque $n \equiv 3 \mod 4$.

Sommaire

Conclusion

Perspectives :

- Prouver que le premier joueur est toujours gagnant sur une grille.

Conclusion

Perspectives :

- Prouver que le premier joueur est toujours gagnant sur une grille.
- Tester la conjecture de périodicité sur les segments.

Conclusion

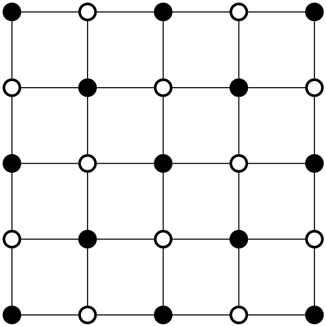
Perspectives :

- Prouver que le premier joueur est toujours gagnant sur une grille.
- Tester la conjecture de périodicité sur les segments.
- Analyser la complexité paramétrée du jeu.

Conclusion

Perspectives :

- Prouver que le premier joueur est toujours gagnant sur une grille.
- Tester la conjecture de périodicité sur les segments.
- Analyser la complexité paramétrée du jeu.
- Jouer au jeu ?



References

[DGP+20] Duchêne, Gonzalez, Parreau, Rémila, and Solal. Influence: a partizan scoring game on graphs, 2020. arXiv:2005.12818 [math.CO].

[Han59] Hanner. Mean play of sums of positional games. *Pacific Journal of Mathematics*, 1959.

[Lar19] Larsson. *Games of No Chance 5*. Cambridge University Press, 2019.

[Mil53] Milnor. Sums of positional games. In *Contributions to the Theory of Games, vol.2*. Princeton University Press, 1953.

[Ste11] Stewart. *Scoring Play Combinatorial Games*. PhD thesis, University of Dundee, 2011.